بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور

پایان نامه
برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
دررشته آمار ریاضی

دانشکده علوم

گروه علمی آمار

عنوان پایان نامه:
توزیع کوشی چوله تعمیم‌یافته و ویژگی‌های آن

استاد راهنما:
دکتر نرگس عباسی

استاد مشاور:
دکتر مینا توحیدی

نگارش:
مهتاب اسفندی

ماه و سال
شهریور 1388

دانشگاه پیام نور

بسمه تعالی

تصویب پایان نامه /رساله

پایان نامه تحت عنوان : **توزیع کوشی چوله تعمیم‌یافته و ویژگی‌های آن**

که توسط **مهتاب اسفندی** در مرکز شیراز تهیه و به هیـأت داوران ارائـه گردیـده اسـت مـورد تأییـد می باشد. تاریخ دفاع: 88/6/31 نمره: **17/75** درجه ارزشیابی : عالی

اعضای هیأت داوران:

نام و نام خانوادگی	هیأت داوران	مرتبه علمی	امضاء
1- استاد راهنما	دکتر نرگس عباسی	دانشیار	
2- استاد مشاور	دکتر مینا توحیدی	استادیار	
3- استاد داور	دکتر مسعود یارمحمدی	استادیار	
4- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر احمد خاکساری	استادیار	

تقدیم به

روح پدر عزیزم و مادر زحمتکشم ،

که همواره در کـــــوره راههای سخت مشکلات همــراه من بودند

و دستهای گرم حمایتشگرشان را هیچ گاه از من دریغ نکردند .

و همراهیهای همسر مهربانم ، امید

که وسعت سکوت نگاهش بهترین راهنمایم بود

به او که چون نهالی کوچک سایه گستر بیابان زندگیم شد .

دراین قسمت جا دارد که از استاد راهنمایم سرکار خانم دکتر نرگس عباسی که در طول این مدت زحمت راهنمایی این پایان نامه را به عهده گرفتند، تشکر و قدردانی نموده و همچنین از سرکار خانم دکتر مینا توحیدی که استاد مشاور اینجانب بودند، سپاسگذاری نمایم و از جناب آقای دکتر مسعود یارمحمدی که داوری این پایان نامه را تقبل نمودند نهایت قدردانی را دارم.

چکیده

در این پایان‌نامه توزیع‌های متقارن- چوله و ویژگی‌های آن را بیان کرده‌ایم و با تعمیم آن خانواده‌های توزیع‌های نرمال- چوله چند متغیره و کوشی- چوله چند متغیره و تی- چوله چند متغیره را مورد مطالعه قرار داده‌ایم. ارتباطات بین توزیع‌های نرمال و کوشی در حالت‌های چوله با اعمال شرایط استقلال و هم توزیعی را نشان می‌دهیم. اینکه چگونه توزیع کوشی چوله را می‌توان از روی متغیرهای تصادفی دیگر به دست آورد و پارامترهای آن را برآورد کرد یکی از نتایج این پایان نامه می‌باشد. با استفاده از یک مثال پارامترهای برآورد شده را مورد تجزیه و تحلیل قرار داده‌ایم. همچنین، توزیع کوشی چوله k بعدی پایه بررسی شده است و نتیجه گرفتیم که هر تبدیل خطی از آن نیز دارای توزیع کوشی چوله است. یک گروه جدید از توزیع کوشی چوله را بیان کرده‌ایم و با تغییراتی توانستیم یک متغیرجدید کوشی چوله ایجاد کنیم. درانتها بررسی و مثال‌های خاصی از توزیع کوشی چوله تعمیم‌یافته نیزارائه شده است و نمودارهایی از تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی، تحت حالت‌های متفاوت نشان داده شده است.

فهرست

فصل اول

توزیع‌های چوله

1-1 مقدمه

ابتدا ساختار یک توزیع چوله که از روی یک توزیع متقارن ساخته می‌شود را بیان می‌کنیم. آنگاه توزیع نرمال-چوله را معرفی می‌نماییم، سپس ویژگی‌های توزیع نرمال چوله را ارائه می‌دهیم و در انتهای این فصل، توزیع کوشی چوله و برخی از ویژگی‌های آن در ارتباط با توزیع نرمال چوله به صورت مختصر بیان می‌شود که این ویژگی‌ها به طور آشکار در قضیه 3-1 و 3-2 بیان خواهد شد.

2-1 توزیع متقارن-چوله

اگر تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به شکل زیر باشد:

$$f_X(x) = 2f(x)G(lx), \qquad x \in R$$

که در آن f تابع چگـالی احتمال متغیر تصادفی متقارن حول صفر و G تابع اندازه پذیر لبـگ باشد و دارای این ویژگی‌ها می‌باشد:

به ازای هر $x \in R$ ، $G(x)+G(-x)=1$ ، $0 \le G(x) \le 1$ ،

یعنی G تابع توزیع یک متغیر تصادفی متقارن است، آنگاه X یک توزیع متقارن چوله دارد.

گوپتا[1] و دیگران (2002) در حالت‌های خاصی که f تابع چگالی احتمال نرمال، تی‌استودنت، کوشی، لاپلاس، لجستیک و توزیع یکنواخت را اختیار می‌کند، نتایجی ارائه دادند.

ناداراجا و کوتز[2] (2003) مدل‌هایی از f با تابع چگالی احتمال نرمال چند متغیره با میانگین صفر را در نظر گرفته و با Gای که از توزیع‌های متقارن پیوسته مذکور آمده‌اند، ترکیب کردند و نتایجی حاصل شد.

توزیع متقارن- چوله چند متغیره، بوسیله گوپتا و چانگ (2003) و وانگ[3] و دیگران (2004) مورد مطالعه قرار گرفت. در این میان توزیع کوشی چوله چند متغیره و توزیع تی‌چوله چند متغیره که به ترتیب به وسیله آرنولد و بیور[4](2000) و گوپتا (2003) مطرح گردید، با توجه به ویژگی‌های خاصی که داشتند مورد توجه قرار گرفت.

در بخش بعدی یکی از جنجالی‌ترین توزیع‌ها، از توزیع‌های متقارن چوله را شرح می‌دهیم.

3-1 توزیع نرمال چوله

توزیع نرمال چوله یک متغیره به وسیله بسیاری از محققان از جمله: آزالینی[5] (1985و1986) و هنز[6] (1986) و چیوگنا[7](1998) و گوپتا و دیگران (2009) مطالعه شده بود. بنا به تعریف مطرح شده توسط آزالینی (1985)، متغیر تصادفی، X، توزیع نرمال چوله با پارامتر l دارد و با نماد $X \sim SN(l)$ نشان داده می‌شود، اگر تابع چگالی احتمال (pdf)[8] به این صورت باشد.

$$f_X(x) = 2f(x)\Phi(lx) \qquad l, x \in R$$

[1] Gupta
[2] Nadarajah and kotz
[3] Wang
[4] Arnold and Beaver
[5] Azzalini
[6] Henze
[7] chiogna
[8] Probability density function

که در آن f، تابع چگالی احتمال (pdf) و Φ، تابع توزیع تجمعی (cdf) مربوط به توزیع نرمال استاندارد است. در یک حالت دیگر، تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر نیز آشکار می‌شود:

$$f_X(x) = 2f(x)\Phi\left(\frac{l_1 x}{\sqrt{1+l_2 x^2}}\right) \qquad l_1, x \in R, \quad l_2 \geq 0$$

آرلانو-واله[1] و دیگران (2004) اصلاح توزیع نرمال چوله تعمیم‌یافته را به صورت فوق تعریف کردند و آن‌ها این توزیع را به صورت $GSN(l_1, l_2)$ نشان دادند.

در این قسمت برخی از ویژگی‌های مدل آزالینی پایه $SN(l)$ را بیان می‌کنیم:

1- فرض کنید U و V متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد مستقل باشند. آنگاه،

$$Z_l = a|U| + bV \sim SN(l)$$

که در آن

$$b = \frac{1}{\sqrt{1+l^2}} \quad \text{و} \quad a = \frac{l}{\sqrt{1+l^2}}$$

2- فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد مستقل باشند. آنگاه، توزیع شرطی Y به شرط $X < lY$ برابر است با $SN(l)$.

3- فرض کنید Y و W متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد مستقل باشند. در این صورت رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$X = \frac{(lY - W)}{(1+l^2)^{\frac{1}{2}}}$$

آنگاه

---
[1] Arellano-valle

(1) (X,Y) توزیع نرمال دو متغیره استاندارد با ضریب همبستگی $\frac{l}{\sqrt{1+l^2}}$ دارد.

(2) توزیع Y به شرط $X>0$ برابر است با $SN(l)$.

توزیع نرمال چوله چند متغیره اغلب به وسیله آزالینی و دالاواله[1] (1996)، آزالینی و کاپیتانیو[2] (1999)،گوپتا و کالو[3] (2003)،گوپتا و دیگران (2004) مطرح بوده است. بردار تصادفی p بعدی X توزیع نرمال چوله چند متغیـره دارد، که به صورت $X \sim SN_p(\Omega, a)$ تعریف می‌شود، هرگاه تابع چگالی آن بصورت زیر باشد:

$$f_X(x) = 2f_p(x;\Omega)\Phi(\alpha' x)$$

که در آن $a \in R^p$ و Ω یک ماتریس همیشه مثبت و $f_p(x;\Omega)$ تابع چگالی احتمال توزیع $N_p(o,\Omega)$ (توزیع نرمال p بعدی با بردار میانگین صفر و ماتریس کوواریانس Ω) است. شکـل‌های درجه دوم از بردار تصـادفی نرمال چوله به وسیله آزالینی (1985)، آزالینی و دالاواله(1996)، آزالینی و کاپتانیو (1999)، لوپرفیدو[4] (2001)، جنتون[5] و دیگران (2001)، گوپتا و هانـگ[6] (2002) مطالعه شده بود. از روی نتایج گوپتا و هانگ (2002)، بعضـــی از خواص خانواده‌ی توزیع نرمال-چوله چند متغیره توسط هانـگ و چن[7] (2006)، حاصل شد.

4-1 توزیع نرمال چوله چند متغیره

[1] Azzalini and dalla valle
[2] Azzalini and capitanio
[3] kollo
[4] Loperfido
[5] Genton
[6] haang
[7] chen

بردار تصادفی پیوسته $Y(p\times 1)$ دارای توزیع نرمال چوله چند متغیره است اگر تابع چگالی آن به شکل زیر باشد

$$f_p(y;m,\Sigma,D)=\frac{1}{\Phi_p(0;I+D\Sigma D')}f_p(y;m,\Sigma)\Phi_p[D(y-m)] \qquad (1-1)$$

که در آن $m\in R^p$ ، $\Sigma>0$ ، $D(p\times p)$ و $f_p(.;m,\Sigma)$ معرف تابع چگالی احتمال و $\Phi_p(.\,;\Sigma)$ تابع توزیع تجمعی توزیع نرمال p بعدی با میانگین m و ماتریس کوواریانس $\Sigma>0$ می‌باشد. هر چند $f_p(.\,;0,I)$ به صورت $f_p(.)$ و $\Phi_p(.\,;0,\Sigma)$ به صورت $\Phi_p(.;\Sigma)$ نشان داده خواهد شد. بردار تصادفی بر مبنای MSN با پارامترهای m,Σ,D توزیع شده و با $Y\sim SN_p(m,\Sigma,D)$ نشان داده می‌شود.

قضیه 1-1

اگر $Y\sim SN_p(m,\Sigma,D)$ برقرار باشد، آنگاه تابع مولد گشتاور چنین است

$$M_Y(t)=\frac{\Phi_p(D\Sigma t;I+D\Sigma D')}{\Phi_p(0;I+D\Sigma D')}e^{m't+\frac{1}{2}t'\Sigma t}, \qquad t\in R^p \qquad (2-1)$$

توجه کنید که اگر $D=diag(d_1,...,d_p)$ و $\Sigma=diag(s_1^2,...,s_p^2)$ برقرار باشد آنگاه

$$M_Y(t)=2^p\prod_{i=1}^{p}\Phi\left(\frac{d_i s_i^2 t_i}{\sqrt{1+d_i^2 s_i^2}}\right)e^{t_1 m_1+\frac{1}{2}s_i^2 t_i^2}$$

که در حالت استقلال برقرار لست.

از قضیه 1-1، توزیع تبدیل خطی $\boldsymbol{Y}$ را می‌توان به دست آورد.

قضیه 1-2

فرض $\boldsymbol{Y} \sim \boldsymbol{SN}_{\boldsymbol{p}}(m, \Sigma, \boldsymbol{D})$ برقرار باشد و اگر $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{p})$ یک ماتریس غیر تکین و $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{p}}$ ثابت باشد، آنگاه

$$\boldsymbol{AY} + \boldsymbol{b} \sim \boldsymbol{SN}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{A}m; \boldsymbol{A}\Sigma\boldsymbol{A}', \boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1})$$

قضیه 1-3

فرض کنید

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} \end{pmatrix} \sim \boldsymbol{N}_{2\boldsymbol{p}}\left[\begin{pmatrix} x \\ m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} + \boldsymbol{D}\Sigma\boldsymbol{D}' & \boldsymbol{D}\Sigma \\ \Sigma\boldsymbol{D}' & \Sigma \end{pmatrix}\right]$$

آنگاه توزیع بردار تصادفی $\boldsymbol{Y} \big| \{\boldsymbol{X} \geq x\}$ به صورت $\boldsymbol{SN}_{\boldsymbol{p}}(m, \Sigma, \boldsymbol{D})$ می‌باشد.

اثبات

با استفاده از

$$\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{y} | \boldsymbol{X} > x) = \frac{\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y})\, \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{X} > x | \boldsymbol{y})}{\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{X} > x)}$$

و چگالی شرطی $\boldsymbol{X}$ به شرط $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}$ که به صورت زیر نشان داده شده است

$$\boldsymbol{X} \big| \{\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}\} \sim \boldsymbol{N}_{\boldsymbol{p}}(x + \boldsymbol{D}(\boldsymbol{y} - m), \boldsymbol{I})$$

داریم

$$f_{Y|X}(y|X>x)=\frac{f_p(y;m,\Sigma)}{P_r(x-X<0)}P_r(x-X<0|y)$$
$$=\frac{f_p(y;m,\Sigma)}{\Phi_p(0;I+D\Sigma D')}\Phi_p\left[D(y-m)\right]$$

قضیه 1-4

فرض کنید $W\sim N_p(0;I)$ و $X\sim N_p(0,\Sigma)$ دو بردار تصادفی مستقل هستند و D یک ماتریس $p\times p$ دلخواه است، آنگاه $Y=X\big|\{DX\geq W\}$ دارای تابع چگالی داده شده در (1-1) می‌باشد.

5-1 توزیع کوشی چوله

ارتباط بین دو توزیع نرمال و کوشی را می‌توان در این ویژگی نشان داد که اگر X و Y مستقل و هم‌توزیع با توزیع نرمال استاندارد باشند، $\frac{Y}{X}$ و $\frac{Y}{|X|}$، هر دو دارای توزیع کوشی $C(0,1)$ می‌باشند. (رجوع شود به جانسون[1] و دیگران 1994، (فصل 16).

با ساخته شدن توزیع نرمال-چوله محققان به دنبال ارائه ارتباطی مشابه با برقراری ویژگی‌های غیرچوله برای توزیع کوشی چوله بودند. در ادامه در یک حالت به این ارتباط خواهیم رسید.

متغیر تصادفی W_l، توزیع کوشی چوله با پارامتر l، ($l\in R$) دارد (به وسیله $SC(l)$ نمایش داده می‌شود). اگر $W_l\overset{d}{=}\frac{Z_l}{|X|}$ که در آن متغیرهای $Z_l\sim SN(l)$ و $X\sim N(0,1)$ مستقل هستند.

---

[1]: Janson

توجه دارید که اگر $l \neq 0$ باشد، $\frac{Z_l}{|X|}$ نمی‌تواند توزیع کوشی را ایجاد کند و فقط بـا قـرار گـرفتن توزیع نرمال چوله بر روی قدر مطلق نرمال استاندارد، توزیع کوشی چوله حاصل می‌شود. آرنولد[1] و بیور[2] (2000) یک خانواده متشکل از توزیع کوشی چوله چند متغیره بر پایه بردار تصادفی k بعـدی X بـه شرط $Y > y_0$ معرفی کردند که در آن (X,Y) بردار تصادفی $(k+1)$ با مؤلفه‌های مســتقل کوشــی است.

[۳] : Arnold
[٤] : Bevear

فصل دوم

توزیع کوشی چوله

2-1 مقدمه

این فصل، مبنای توزیع کوشی چوله k بعدی پایه، توزیع‌های شرطی و حاشیه‌ای آن را بررسی می‌کند. همچنین پارامترهای توزیع کوشی چوله، برآورد می‌شوند و به عنوان یک کاربرد، داده‌های مربوط به ورزشکاران استرالیایی مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد.

توزیع کوشی چوله k بعدی پایه دنباله سنگین‌تر از مدل کوشی چوله می‌باشد. با وجود این دیدگاه، این مدل، با مدل کوشی به مقایسه گذاشته خواهد شد.

2-2 توزیع کوشی چوله k بعدی پایه

این توزیع با $k+1$ متغیر تصادفی کوشی استاندارد مستقل، $W_1, W_2, \ldots, W_k, U$ شروع می‌شود. توزیع شرطی $\mathrm{W} = (W_1, W_2, \mathbf{K}, W_k)$ به شرط $l_0 + \lambda_1' \mathrm{W} > U$ که در آن λ_1 ، برداری k بعدی متشکل از اعداد حقیقی است، **توزیع کوشی چوله پایه** نامیده شده است.

برای تعیین تابع چگالی این توزیع و اینکه مطالب به صورت راحت‌تر قابل تعقیب باشند، پیشامد زیر را معرفی می‌کنند.

$$\begin{aligned} A(l_0, \lambda_1) &= \{l_0 + \lambda_1' \mathrm{W} > U\} \\ &= \{(\mathrm{W}, U) \in B(l_0, \lambda_1)\}, \end{aligned}$$

که در آن

$$\boldsymbol{B}(l_0,\lambda_1)=\{(\boldsymbol{w},\boldsymbol{u}):\ l_0+\lambda_1'\mathrm{w}>\boldsymbol{u}\}.$$

تابع چگالی شرطی $(\mathrm{W},\boldsymbol{U})$ به شرط $\boldsymbol{A}(l_0,\lambda_1)$ به صورت واضح از قسمت زیر بدست می‌آید.

در نتیجه خواهیم داشت

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{W},\boldsymbol{U}|\boldsymbol{A}(l_0,\lambda_1)}(\mathrm{w},\boldsymbol{u})=\frac{\prod_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{k}}y(\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{i}})y(\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{I}((\mathrm{w},\boldsymbol{u})\in\boldsymbol{B}(l_0,\lambda_1))}{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}(l_0,\lambda_1))},\qquad(1-2)$$

که در آن تابع چگالی کوشی استاندارد با y

$$y(\boldsymbol{u})=\frac{1}{p(1+\boldsymbol{u}^2)},\qquad\boldsymbol{u}\in\Re$$

و تابع توزیع آن با Ψ،

$$\Psi(\boldsymbol{u})=\frac{1}{2}+\frac{1}{p}\tan^{-1}\boldsymbol{u},\qquad\boldsymbol{u}\in\Re$$

نشان داده شده است. با انتگرالگیری از تابع چگالی (2-1)، نسبت به $\boldsymbol{u}$، جهت خارج کردن این متغیر، تابع چگالی $\mathbf{W}$ را به دست می‌آوریم.

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{W}|\boldsymbol{A}(l_0,l_1)}(\boldsymbol{w})=\frac{\prod_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{k}}y(\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{i}})\Psi(l_0+\lambda_1'\mathrm{w})}{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}(l_0,\lambda_1))}.\qquad(2-2)$$

محاسبه‌ی مخرج برابری (2-2)، دشوار نیست، در اینجا برای بهتر شدن نتایج آن را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}(l_0,\lambda_1))&=\boldsymbol{P}(l_0+\lambda_1'\mathrm{W}>\boldsymbol{U})\\&=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{U}-\lambda_1'\mathrm{W}<l_0).\end{aligned}$$

توجه شود که $U-\lambda_1' W$ یک ترکیب خطی از متغیرهـای تصـادفی مسـتقل کوشـی یـا در واقـع $U-\lambda_1' W$ دارای توزیع کوشی $\left(0,1+\sum_{i=1}^{K}\left|l_{1i}\right|\right)$ است که در آن l_{1i} مولفـه‌ی iام از بـردار λ_1 می‌باشد. در نتیجه

$$P\left(A\left(l_0,\lambda_1\right)\right)=\Psi\left(\frac{l_0}{1+\sum_{i=1}^{k}\left|l_{1i}\right|}\right).$$

بنابراین، توزیع کوشی چوله kبعدی پایه به صورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$f\left(w;l_0,\lambda_1\right)=\frac{\prod_{i=1}^{k} y\left(w_i\right)\Psi\left(l_0+\lambda_1' w\right)}{\Psi\left(\frac{l_0}{1+\sum_{i=1}^{k}\left|l_{1i}\right|}\right)}, \qquad (3-2)$$

اگر $l_0=0$ و $\lambda_1=o$ باشند، عبارت (3-2) تابع چگالی kمتغیره با تابع چگالی حاشیه‌ای کوشی استاندارد مستقل می‌شود.

به طورکلـی، عبـارت (3-2) یـک نسـخه وزن‌دار شـده از تـابع وزن $\Psi\left(l_0+\lambda_1' w\right)$ اسـت. اگـر $l_0=0$ باشد، توزیع $U-\lambda_1' W$ متقارن است، مخرج (3-2) به مقدار $\frac{1}{2}$ ساده می‌شود. بنابراین

$$f\left(w;0,\lambda_1\right)=2\left[\prod_{i=1}^{k} y\left(w_i\right)\right]\Psi\left(\lambda_1' w\right) \qquad (4-2)$$

و لذا

$$f\left(w;0,\lambda_1\right)=2\frac{1}{p\left(1+\left(\sum_{i=1}^{k} w_i\, l_{1i}\right)^2\right)}\left[\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{p\left(1+w_i^{\,2}\right)}\right]$$

پیامد 2-1

با جایگزینی تابع توزیع Ψ، به وسیله یک توزیع متقارن Ψ^* در تابع چگالی (2-4)، یک تـابع چگـالی معتبر دیگر به دست می‌آید. بنابراین، چگالی‌های کوشی چوله مختلف را می‌توان بـه صـورت زیـر نشـان داد.

$$f\left(w;0,\lambda_1\right)=2\left[\prod_{i=1}^{k} y\ \left(w_i\right)\right]\Psi^*\left(\lambda_1' \mathbf{w}\right),$$

که در آن Ψ^* می‌تواند برای مثال، نرمال، لجستیک و یا لاپلاس باشد.

اگر W توزیع کوشی چوله پایه (2-3) را داشته باشد، آنگـاه هـر تبـدیل خطـی از W، نیـز دارای توزیع کوشی چوله است، یعنی هر بردار تصادفی X به شکل زیر

$$\mathrm{X}=\mu+\sum^{\frac{1}{2}}\mathrm{W}$$

دارای توزیع کوشی چوله اسـت. زیـرا اگـر W دارای چگـالی (2-3) باشـد و $m\in\Re^{k}$ و $\sum^{\frac{1}{2}}$ یـک ماتریس مثبت معین باشد، آنگاه

$$\mathbf{W}=\sum^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})$$

در نتیجه

$$f_X(x)=|J|\,f_W\left(\sum^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right)$$

از آنجا که مقدار ژاکوبین برابر است با

$$|J|=\frac{\partial W}{\partial X}=\left|\sum^{-\frac{1}{2}}\right|=\left|\sum\right|^{-\frac{1}{2}}$$