دانشگاه فردوسی مشهد
دانشکده علوم ریاضی

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض
گرایش جبر

عنوان :

گراف غیرجا به جایی گروه ها

استاد راهنما :
دکتراحمد عرفانیان

استاد مشاور :
دکترفریدون رهبرنیا

نگارنده :
سعیده خداشناس

زمستان ۱۳۸۹

فهرست مندرجات

چکیده

فرض کنید G گروهی ناآبلی و $Z(G)$ مرکز آن باشد. در این صورت گراف Γ_G (که گراف غیر جا به جایی G نامیده می شود) را به صورت زیر به G نسبت می دهیم: $G\backslash Z(G)$ را به عنوان رأس های Γ_G در نظر بگیرید و دو رأس متمایز x و y را هرگاه $xy \neq yx$ به هم وصل کنید. در این پایان نامه به بررسی ویژگی های این نوع گراف ها و ارتباط خواص بین گروه ها و گراف های غیرجا به جایی متناظر با آن ها می پردازیم. به ویژه این حدس را مورد مطالعه قرار می دهیم که اگر G و H دو گروه متناهی ناآبلی باشند به طوری که $\Gamma_G \cong \Gamma_H$، آن گاه $|G| = |H|$. همچنین نشان می دهیم که اگر G گروهی متناهی، ناآبلی و پوچ توان و H گروهی باشد که $\Gamma_G \cong \Gamma_H$ و $|G| = |H|$، آن گاه H پوچ توان است.

مقدمه

مطالعه ی ساختارهای جبری با استفاده از ویژگی های گراف ها موضوعی است که در بیست سال اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته و سؤالات و نتایج بسیار شگفت انگیزی به وجود آورده است. مقالات متعددی وجود دارد که در آن ها به یک گروه یا حلقه، گرافی نسبت داده شده و ویژگی های جبری حلقه ها و گروه ها با استفاده از این گراف مورد بررسی قرار گرفته است، به عنوان مثال مراجع [۷-۵،۹،۱۰،۳۴] را ببینید. در این پایان نامه به هر گروه ناآبلی G گرافی نسبت می دهیم و خواص جبری گروه ها را با استفاده از مفاهیم نظری گراف بررسی می کنیم. پیش از شروع تعدادی از نمادگذاری های مورد نیاز را معرفی می کنیم.

فرض کنید G یک گروه باشد. روش های متفاوتی برای نسبت دادن یک گراف به گروه G وجود دارد (به عنوان مثال مراجع [۱۱، ۱۸، ۲۸، ۲۹، ۳۴، ۴۱] را ببینید). در اینجا روش زیر را در نظر می گیریم: مجوعه ی $G\backslash Z(G)$ را به عنوان رأس های Γ_G در نظر بگیرید و دو رأس متمایز x و y را هرگاه $xy \neq yx$ به هم وصل کنید. توجه کنید که اگر G آبلی باشد، آن گاه گراف Γ_G پوچ است.

گراف غیر جا به جایی Γ_G نخستین بار توسط پاول اردوش [۱] در نظر گرفته شد. وی

[۱] Paul Erdös

مسئله ی زیر را در سال ۱۳۷۵ [۲۸] مطرح کرد:
فرض کنید G گروهی باشد که گراف غیرجا به جایی آن زیرگراف کامل نامتناهی نداشته باشد. در این صورت آیا می توان نتیجه گرفت که مجموعه ی کاردینال های زیرگراف های کامل Γ_G دارای کران متناهی است؟
نیومن [۱] به سؤال اردوش پاسخ مثبت داد. در این پایان نامه مسئله ای مشابه سؤال اردوش مطرح خواهیم کرد. مسئله ی اردوش و پاسخ نیومن سرآغاز سؤالات بسیاری شد و افراد زیادی مسائل مختلفی را در همین راستا در نظر گرفتند (به عنوان مثال مراجع [۴-۱، ۱۵، ۱٦، ۲۷-۲۵] را ببینید).

هدف اصلی این پروژه بررسی چگونگی تأثیر ویژگی های نظری گراف Γ_G بر روی ویژگی های نظری گروه G است. Γ_G را گراف غیرجا به جایی G می نامیم. همچنین آن دسته از ویژگی های گروه را که همواره در گروه های ناآبلی با گراف های غیرجا به جایی یکریخت، یکسان هستند مورد مطالعه قرار می دهیم.

گروه متقارن و گروه متناوب روی n حرف را به ترتیب با S_n و A_n نمایش می دهیم. همچنین نماد های Q_8 و D_{2n} را به ترتیب برای گروه چهارگان با ۸ عنصر و گروه دو وجهی از مرتبه ی $2n$ $(n > 2)$ به کار می بریم. اگر $n > 0$ عددی صحیح و q توانی از یک عدد اول باشد، آن گاه گروه خطی خاص تصویری، گروه خطی عام تصویری، گروه خطی خاص و گروه خطی عام از درجه ی n روی میدان متناهی از اندازه ی q را به ترتیب با نمادهای $PSL(n,q)$، $PGL(n,q)$، $SL(n,q)$ و $GL(n,q)$ نشان می دهیم. فرض کنید G یک گروه و H زیر گروه آن باشد و $x \in G$ را در نظر بگیرید. در این صورت $C_G(x)$ و $N_G(H)$ به ترتیب نشان دهنده ی مرکز ساز x و نرمال ساز H در G می باشند.

در فصل ۲، برخی از ویژگی های گراف غیرجا به جایی Γ_G از گروه ناآبلی G را

---
[۱] B. H. Nneumann

مورد مطالعه قرار می دهیم. مشاهده می کنیم که Γ_G همواره همبند است و قطر و کمر آن برابر با ۲ و ۳ می باشد. اگر G متناهی باشد، آن گاه Γ_G همیلتنی است. همچنین Γ_G مسطح است اگر و تنها اگر G متناهی از مرتبه ی ٦ یا ۸ باشد. منظم بودن Γ_G، در حالتی که G متناهی است، مورد بررسی قرار می گیرد. نتایجی درباره ی مجموعه های برش در Γ_G ثابت می شوند. نیز نشان داده می شود که اگر G عضو مجموعه ی معینی از گروه ها باشد، آن گاه متناهی بودن تمام مجموعه های مستقل Γ_G، وجود یک کران متناهی برای اندازه های تمام مجموعه های مستقل آن را نتیجه می دهد. گروه های تابداری که عدد غلبه ای گراف غیرجا به جایی آن ها برابر یک است، به طور کامل مشخص می شوند. در ارتباط با متناهی بودن عدد غلبه ای نیز نتایجی به دست می آیند. به عنوان مثال، اگر H زیر گروه از اندیس متناهی G باشد به طوری که $\gamma(\Gamma_H)$ متناهی است، آن گاه $\gamma(\Gamma_G)$ نیز متناهی می باشد. همچنین عدد غلبه ای برخی گروه ها محاسبه می شوند.

در فصل ۳، حدس زیر را مورد بررسی قرار می دهیم:

حدس ۱. فرض کنید G و H دو گروه متناهی ناآبلی باشند به طوری که $\Gamma_G \cong \Gamma_H$. در این صورت $|G| = |H|$.

نشان می دهیم که اگر حدس ۱ برای AC ـ گروه های حل پذیر برقرار باشد، آن گاه برای تمام گروه ها برقرار خواهد بود. اگر یکی از گروه ها در حدس ۱، S_n، A_n، D_{2n} و یا AC ـ گروهی ناحل پذیر باشد، آن گاه درستی آن ثابت خواهد شد. همچنین حدس ۱ در مورد دسته ای دیگر از گروه ها برقرار است.

این سؤال به طور طبیعی مطرح می شود که کدام ویژگی های گروه ها را می توان از طریق گراف غیرجا به جایی آن ها پیدا کرد؟ یعنی:

سؤال. فرض کنید G و H دو گروه ناآبلی باشند به طوری که $\Gamma_G \cong \Gamma_H$. در این صورت کدام خاصیت گروه است که اگر G آن را داشته باشد، آن گاه H نیز چنین است؟

اگر حدس ۱ برقرار باشد، آن گاه نشان می دهیم که خاصیت پوچ توانی یکی از پاسخ های سؤال فوق است. همچنین به سادگی مشاهده می شود که سؤال اخیر همواره برای خاصیت متناهی بودن برقرار است.

در فصل ۴، عدد رنگی و عدد خوشه ای بعضی گروه ها را به دست می آوریم. همچنین گروه هایی با گراف غیرجا به جایی منحصر به فرد معرفی می کنیم، یعنی گروه هایی مانند G با این خاصیت که اگر برای گروهی مانند H، $\Gamma_G \cong \Gamma_H$، آن گاه $|G| = |H|$. همان طور که انتظار داریم، گراف غیرجا به جایی یک گروه در حالت کلی منحصر به فرد نیست و گروه های غیر یکریختی وجود دارند که گراف غیرجا به جایی آن ها یکسان است. نشان داده می شود که گراف غیرجا به جایی گروه های ساده ی سوزوکی و $PSL(۲, ۲^n)$ $(n > ۲)$ یکتاست. با توجه به این نتایج حدس زیر را بیان می کنیم:

حدس ۲. فرض کنید S گروهی ساده، متناهی و ناآبلی و G گروهی باشد که $\Gamma_G \cong \Gamma_S$. در این صورت $G \cong S$.

فصل ۱

پیش نیازها

۱.۱ مقدمات گراف ها

در این بخش برخی تعاریف و قضایای مقدماتی گراف ها را بیان می کنیم. برای هر گراف Γ، مجموعه ی رأس ها و یال های Γ را به ترتیب با $V(\Gamma)$ و $E(\Gamma)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱.۱.۱ درجه ی رأس v در گراف Γ که آن را با $d_\Gamma(v)$ نمایش می دهیم، برابر با تعداد یال های واقع بر v می باشد. اگر گراف شناخته شده باشد، برای سادگی $d_\Gamma(v)$ را با $d(v)$ نشان می دهیم. نمادهای $\Delta(\Gamma)$ و $\delta(\Gamma)$ به ترتیب برای بیشترین درجه و کمترین درجه ی رأس های Γ مورد استفاده قرار می گیرند.

در ادامه تعداد یال ها و تعداد رأس های گراف Γ را به ترتیب با ε و ν نشان می دهیم.

قضیه ۲.۱.۱ $\sum_{u\in V(\Gamma)} d(u) = ۲\varepsilon$.

برهان. به مرجع [۱۲]، قضیه ۱.۱ مراجعه شود. □

تعریف ۳.۱.۱ (i) مرتبه ی Γ به صورت $V(\Gamma)$ تعریف می شود.
(ii) گراف تهی، گرافی است که هیچ یالی ندارد و گراف پوچ گرافی است که هیچ رأس و هیچ یالی ندارد.
(iii) گراف ساده، گرافی است که طوقه و یال چندگانه ندارد.

تعریف ۴.۱.۱ گراف Γ ، K ـمنتظم است هر گاه درجه تمام رأس های آن برابر K باشد. گراف منتظم گرافی است که به ازای یک مقدار K، K ـمنتظم باشد.

تعریف ۵.۱.۱ گراف Γ را قابل نشاندن در صفحه یا مسطح می نامیم، هر گاه بتوان آن را به طریقه ای رسم کرد که هر یال آن، تنها در رأس های دو سر خود با یال های دیگر برخورد داشته باشد.

لم ۶.۱.۱ اگر Γ یک گراف مسطح ساده باشد که در آن $\nu \geq ۳$، آن گاه $\varepsilon \leq ۳\nu - ۶$.

برهان. مرجع [۱۲]، نتیجه ۳.۵.۹ را ببینید. □

لم ۷.۱.۱ اگر Γ یک گراف مسطح ساده باشد، آن گاه $\delta \leq ۵$.

برهان. اگر $\nu = ۱, ۲$، آن گاه حکم بدیهی است. فرض کنید $\nu \geq ۳$، در این صورت با استفاده از ۲.۱.۱ و ۶.۱.۱ داریم:

$$\delta\nu \leq \sum_{u\in V(\Gamma)} d(u) = ۲\varepsilon \leq ۶\nu - ۱۲ \qquad \Longrightarrow \qquad \delta \leq \frac{۶\nu - ۱۲}{\nu} = ۶ - \frac{۱۲}{\nu}$$

در نتیجه $\delta \leq ۵$. □

تعریف ۸.۱.۱ گراف ساده ای که در آن هر دو رأس متمایز، با یک یال به یکدیگر متصل شده باشند، گراف کامل نامیده می شود.

لم ۹.۱.۱ گراف کامل از مرتبه ی ۵، k_5، مسطح نیست.

برهان. اگر k_5 مسطح باشد، آن گاه بنابر ۶.۱.۱،

$$۱۰ = \varepsilon(k_5) \leq ۳\nu(k_5) - ۶ = ۱۵ - ۶ = ۹ \qquad \Longrightarrow \qquad ۱۰ \leq ۹$$

و این غیر ممکن است. بنابراین k_5 مسطح نیست. $\square$

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض کنید X زیر مجموعه ای ناتهی از $V(\Gamma)$ باشد. در این صورت زیرگرافی از Γ که مجموعه ی رأس های آن X و مجموعه ی یال هایش برابر مجموعه ی یال هایی از Γ باشد که هر دو رأس آن ها در X واقع است، زیرگراف القایی Γ روی X نامیده می شود.

تعریف ۱۱.۱.۱ زیرمجموعه ی X از رأس های Γ، یک خوشه نامیده می شود هرگاه زیرگراف القایی Γ روی X، گرافی کامل باشد. عدد خوشه ای Γ برابر با اندازه ی بزرگترین خوشه ی گراف Γ است و با $\omega(\Gamma)$ نمایش داده می شود.

تعریف ۱۲.۱.۱ یک مجموعه ی مستقل Γ، زیرمجموعه ای مانند X از $V(\Gamma)$ است به طوری که هیچ دو رأس آن در Γ مجاور نیستند. اندازه ی بزرگترین مجموعه ی مستقل گراف Γ ، عدد استقلال Γ نامیده شده و با $\alpha(\Gamma)$ نشان داده می شود.

تعریف ۱۳.۱.۱ یک k ـرنگ آمیزی رأسی گراف Γ عبارت است از نسبت دادن k رنگ به رأس های آن به طوری که هیچ دو رأس مجاور متمایزی دارای رنگ یکسان نباشند. عدد رنگی Γ، $\chi(\Gamma)$، برابر با کوچکترین k ای است که به ازای آن Γ، یک k ـرنگ آمیزی رأسی دارد.

تعریف ۱۴.۱.۱ یک مسیر از Γ عبارت است از دنباله ی متناهی $v_۰e_۱v_۱e_۲\ldots e_kv_k$ به طوری که جملات آن یک در میان رأس ها و یال های متمایز Γ بوده و برای هر i، $۱ \leq i \leq k$، $v_{i-۱}$ و v_i دو سر e_i باشند. دنباله ی فوق، مسیر بین $v_۰$ و v_k و k طول این مسیر نامیده می شوند.

تعریف ۱۵.۱.۱ مسیری که دو رأس ابتدا و انتهای آن یکسان باشد، یک دور نام دارد. طول یک دور برابر با تعداد یال هایش است.

تعریف ۱۶.۱.۱ طول کوتاهترین دور گراف Γ، کمر Γ نامیده شده و با $girth(\Gamma)$ نمایش داده می شود.

تعریف ۱۷.۱.۱ دوری که شامل تمام رأس های Γ باشد، یک دور همیلتنی از Γ نامیده می شود. گرافی که شامل یک دور همیلتنی باشد، گراف همیلتنی نام دارد.

قضیه ۱۸.۱.۱ (قضیه‌دیراک[۱] ۱۹۵۲) فرض کنید γ گرافی ساده باشد. در این صورت اگر $۳ \leq |V(\Gamma)|$ و $\delta(\Gamma) \geq \frac{|V(\Gamma)|}{۲}$، آن گاه گراف Γ همیلتنی است.

برهان. به مرجع [۱۲]، صفحه ی ۵۴ مراجعه شود. □

تعریف ۱۹.۱.۱ فرض کنید u و v رأس های گراف Γ باشند. در این صورت فاصله‌ی بین u و v که آن را با $d(u,v)$ نمایش می دهیم، عبارت است از طول کوتاهترین مسیر بین u و v. بیشترین فاصله‌ی بین رأس های Γ قطر Γ نام دارد و با $diam(\Gamma)$ نمایش داده می شود.

---
[۱] Dirac

تعریف ۲۰.۱.۱ گراف Γ همبند است هرگاه بین هر دو رأس آن یک مسیر وجود داشته باشد. در غیر این صورت Γ ناهمبند می باشد.

تعریف ۲۱.۱.۱ یک زیرگراف القایی Γ مؤلفه‌ی همبند نامیده می شود هرگاه بزرگترین زیرگراف همبند Γ باشد.

تعریف ۲۲.۱.۱ زیرمجموعه ی S از رأس های گراف همبند Γ، یک مجموعه ی برش نامیده می شود هرگاه $\Gamma\backslash S$ یک گراف ناهمبند باشد.

تعریف ۲۳.۱.۱ یک مجموعه‌ی برش با k عنصر را یک k-برش رأسی می نامیم و همبندی رأسی Γ، $\kappa(\Gamma)$، را کوچکترین k ای در نظر می گیریم که با ازای آن Γ یک k-برش رأسی داشته باشد.

تعریف ۲۴.۱.۱ فرض کنید S زیرمجموعه ای از رأس های گراف Γ باشد. در این صورت مجموعه ی رأس های Γ که عضو S اند و یا با رأسی از S مجاورند را با $N_\Gamma(S)$ نمایش می دهیم. اگر $N_\Gamma(S) = V(\Gamma)$، آن گاه S یک مجموعه ی غالب Γ نامیده می شود. کوچکترین اندازه ی مجموعه های غالب Γ، عدد غلبه ای Γ نام دارد و با $\gamma(\Gamma)$ نشان داده می شود.

تعریف ۲۵.۱.۱ دو گراف G و H یکریخت نامیده می شوند هرگاه نگاشت های دو سویی $\theta : V(G) \longrightarrow V(H)$ و $\psi : E(G) \longrightarrow E(H)$ وجود داشته باشند به طوری که برای هر $u, v \in V(G)$ داشته باشیم: $uv \in E(G)$ اگر و تنها اگر $\theta(u)\theta(v) \in E(H)$.

تعریف ۲۶.۱.۱ گراف k-بخشی، گرافی است که می توان مجموعه ی رأس های آن را به k زیرمجموعه افراز کرد به طوری که دو سر هیچ یالی در یک زیر مجموعه قرار نگیرد.

تعریف ۲۷.۱.۱ گراف k ـبخشی کامل، یک گراف ساده ی k ـ بخشی است که در آن هر رأس با تمام رأس هایی که در زیرمجموعه ای غیر یکسان با آن قرار دارند، مجاور است.

۲.۱ مفاهیم و قضایای مورد نیاز در گروه ها

در این بخش به بیان برخی از تعاریف نظریه ی گروه ها و قضایا و لم هایی که در ادامه مورد نیازند، می پردازیم.

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید G یک گروه و H و K زیر گروه های آن باشند. در این صورت همرده ی مضاعف (H,K) عبارت است از کلاس هم ارزی مربوط به رابطه ی هم ارزی زیر:
" $x \sim y$ هر گاه یک h در H و یک k در K وجود داشته باشند به طوری که $hxk = y$ "
هر همرده مضاعف (H,K) به فرم HxK است که در آن $x \in G$. مجموعه‌ی همرده های مضاعف (H,K) یک افراز برای گروه G تشکیل می دهند.

قضیه ۲.۲.۱ اگر در گروه G تعداد عناصری که دو به دو با هم جا به جا نمی شوند حداکثر برابر با n باشد، یعنی $\omega(\Gamma_G) = n < \infty$، آن گاه $|G : Z(G)| \leq c^n$ که در آن c عدد ثابت مثبتی است.

برهان. به مرجع [۲۹] مراجعه کنید. □

تعریف ۳.۲.۱ فرض کنید G گروهی متناهی باشد و اعداد $n_1 > n_2 > \cdots > n_r = 1$ اندیس های مرکزسازهای اعضای G باشند. در این صورت بردار $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$،

بردار نوع مزدوج [۱] نامیده می شود. گروه G با بردار نوع مزدوج $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$، گروه از نوع $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ نام دارد.

قضیه ۴.۲.۱ هر گروه از نوع $(n_1, 1)$ پوچ توان است. به علاوه n_1، توانی از عدد اول p، مانند p^α است و هر گروه از نوع $(p^\alpha, 1)$، حاصلضرب مستقیم یک p ـ زیرگروه از نوع $(p^\alpha, 1)$ و یک زیرگروه آبلی است.

برهان. به مرجع [۲۳]، قضیه ۱ مراجعه شود. $\square$

قضیه ۵.۲.۱ فرض کنید G یک p ـگروه متناهی باشد که در آن p عددی اول است. در این صورت اگر طول کلاس های مزدوج G، برابر با مجموعه ی $(1, p^n)$ که در آن $n \geq 1$ باشد، آن گاه کلاس پوچ توانی G، حداکثر برابر ۳ است.

برهان. مرجع [۲۲] را ببینید. $\square$

قضیه ۶.۲.۱ هر گروه از نوع $(n_1, n_2, 1)$ حل پذیر است.

برهان. به مرجع [۲۴] مراجعه کنید. $\square$

قضیه ۷.۲.۱ گروه G، حل پذیر است اگر و تنها اگر یک m عضو $\mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که $G^{(m)} = \langle 1 \rangle$.

برهان. به [۳۱] مراجعه شود. $\square$

تعریف ۸.۲.۱ گروهی که هر عنصر آن از مرتبه ی متناهی باشد، گروه متناوب یا تابدار نام دارد.

لم ۹.۲.۱ هر گروه آبلی متناهیاً تولید شده، تابدار متناهی است.

برهان. به [۳۱] مراجعه کنید. $\square$

---

[۱] conjugate type vector

لم ۱۰.۲.۱ اگر H زیرگروهی از اندیس متناهی از گروه متناهیاً تولید شده‌ی G باشد، آن گاه H متناهیاً تولید شده است.

برهان. مرجع [۳۱] را ببینید. □

قضیه ۱۱.۲.۱ هر گروه حل پذیر تابدار متناهیاً تولید شده، متناهی است.

برهان. فرض کنید G گروهی با ویژگی های فوق باشد و d را طول سری مشتق آن در نظر بگیرید. اگر $d = 0$، آن گاه حکم بدیهی است. فرض کنید $d > 0$ و قرار دهید $A = G^{(d-1)}$. واضح است که گروه A آبلی است. با استقرا روی d گروه خارج قسمتی $\frac{G}{A}$ متناهی است (توجه کنید که گروه $\frac{G}{A}$ نیز حل پذیر، تابدار و متناهیاً تولید شده است). این نتیجه می دهد که A زیرگروهی از اندیس متناهی از گروه متناهیاً تولید شده ی G است. بنا به ۱۰.۲.۱، زیرگروه A متناهیاً تولید شده است. حال با توجه به ۹.۲.۱، A تابدار متناهی است. بنابراین گروه G متناهی می باشد. □

تعریف ۱۲.۲.۱ گروه G موضعاً متناهی نامیده می شود، هرگاه هر زیرگروه متناهیاً تولید شده ی آن متناهی باشد.

قضیه ۱۳.۲.۱ هرگروه نامتناهی موضعاً متناهی، یک زیرگروه آبلی نامتناهی دارد.

برهان. به مرجع [۳۱] مراجعه کنید. □

لم ۱۴.۲.۱ فرض کنید G یک p ـگروه باشد که در آن p عددی اول است. در این صورت گروه G موضعاً متناهی است.

برهان. فرض کنید H زیرگروهی متناهیاً تولید شده از G باشد. از آن جایی که G، p ـگروه و در نتیجه حل پذیر است، H نیز حل پذیر می باشد. از طرفی مرتبه‌ی هر عضو H، توانی از عدد اول p و در نتیجه متناهی است. بنابراین H تابدار است. با توجه به ۱۱.۲.۱، گروه H متناهی است. □

تعریف ۱۵.۲.۱ گروه G موضعاً حل پذیر نامیده می شود، هرگاه هر زیرگروه متناهیاً تولید شده ی آن حل پذیر باشد.

لم ۱٦.۲.۱ هر گروه انگل که تمام زیرگروه های آبلی آن متناهی باشد، متناهی و پوچ توان است.

برهان. به مرجع [۳۰]، نتیجه صفحه ۵۵ مراجعه شود. □

تعریف ۱۷.۲.۱ خودریختی α از گروه G را در نظر بگیرید. مجموعه ی عناصر G که توسط α ثابت نگه داشته می شوند را با $C_G(\alpha)$ نمایش می دهیم. اگر $C_G(\alpha) = ۱$، یعنی همانی تنها نقطه ی ثابت α باشد، آن گاه α خودریختی بدون نقطه ی ثابت نامیده می شود.

قضیه ۱۸.۲.۱ فرض کنید G گروهی متناهی باشد. در این صورت G، خودریختی بدون نقطه ی ثابت از مرتبه ی ۲ دارد اگر و تنها اگر G آبلی و از مرتبه ی فرد باشد.

برهان. به مرجع [۳۱]، تمرین ۱.۵.۱۰ مراجعه کنید. □

تعریف ۱۹.۲.۱ حاصلضرب مستقیم (خارجی) خانواده ای از گروه ها مانند $\{G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$، زیرگروه حاصلضرب دکارتی آن ها و شامل عناصری است که همه ی مؤلفه های آن ها به جز تعدادی متناهی، همانی اند.

تعریف ۲۰.۲.۱ فرض کنید گروه G روی یک مجموعه مانند Ω عمل کند. در این صورت برای هر $\alpha \in \Omega$، ثابت نگه دارنده ی α در G را با G_α نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$G_\alpha = \{x \in G \mid \alpha^x = \alpha\}$$

قضیه ۲۱.۲.۱ فرض کنید G گروهی متناهی و $H \leq G$ باشد. در این صورت تعداد مزدوج های H در G برابر با $[G : N_G(H)]$ است.

برهان. فرض کنید Ω مجموعه‌ی تمام مزدوج های H باشد، یعنی

$$\Omega = \{H^g \mid g \in G\} = \{g^{-1}Hg \mid g \in G\}$$

در این صورت عمل گروه G روی مجموعه ی Ω را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\forall H^g \in \Omega \ , \forall x \in G \ ; \ (H^g)^x := H^{gx}$$

بدیهی است که G روی Ω عمل می کند. به علاوه این عمل انتقالی است، زیرا اگر $H^{g_1}, H^{g_2} \in \Omega$، آن گاه برای $x = g_1^{-1}g_2$ داریم:

$$(H^{g_1})^x = (H^{g_1})^{g_1^{-1}g_2} = H^{g_1 g_1^{-1} g_2} = H^{g_2}$$

همچنین $H \in \Omega$ و $G_H = \{g \in G \mid H^g = H\} = N_G(H)$. از طرفی چون عمل $(G \mid \Omega)$ انتقالی است داریم $|\Omega| = [G : G_H]$. بنابراین تعداد مزدوج های H در G برابر با $[G : N_G(H)]$ است. □

تعریف ۲۲.۲.۱ زیرگروه H از گروه G، خود نرمال ساز نامیده می شود، هرگاه $N_G(H) = H$.

قضیه ۲۳.۲.۱ فرض کنید G زیرگروه انتقالی گروه $Sym(\Omega)$ و $\alpha \in \Omega$ باشد. در این صورت اگر C مرکزساز G در گروه $Sym(\Omega)$ باشد، آن گاه $C = 1$ اگر و تنها اگر G_α خود نرمال ساز باشد، یعنی $N_G(G_\alpha) = G_\alpha$.

برهان. مرجع [۱۷]، قضیه A۲.۴ را ببینید. □

قضیه ۲۴.۲.۱ هر گروه ساده متناهی می تواند توسط دو عنصر تولید شود.

برهان. برای مشاهده ی اثباتی از آن مرجع [۸]، قضیه B را ببینید. □

در ادامه به برخی از ویژگی های مهم گروه های خطی اشاره می کنیم.

لم ۲۵.۲.۱ گروه های خطی $GL(n,q)$، $SL(n,q)$، $PSL(n,q)$ و $PGL(n,q)$ را در نظر بگیرید. در این صورت

(الف) $|GL(n,q)| = (q^n - ۱)(q^n - q)\dots(q^n - q^{n-۱})$

(ب) $|SL(n,q)| = |GL(n,q)|/(q-۱) = |PGL(n,q)|$

(ج) $|PSL(n,q)| = |GL(n,q)|/(q-۱)(n,q-۱).$

برهان. به مرجع [۳۱]، قضیه ۷.۲.۳ مراجعه شود. □

قضیه ۲۶.۲.۱ خودریختی های زیر برقرارند:

(i) $PSL(۲,۲) \cong SL(۲,۲) = GL(۲,۲) \cong S_۳$

(ii) $PSL(۲,۳) \cong A_۴$

(iii) $PSL(۲,۴) \cong PSL(۲,۵) \cong A_۵$.

برهان. مرجع [۲۰] را ببینید. □

قضیه ۲۷.۲.۱ (جردن ـ دیکسون[۱]) اگر $n > ۲$ یا $n = ۲$ و $|F| > ۳$، آن گاه $PSL(n,F)$ گروهی ساده است.

برهان. به مرجع [۳۱] مراجعه شود. □

لم ۲۸.۲.۱ اگر $n \geq ۳$ یا $n = ۲$ و $|F| > ۳$، آن گاه

$$GL(n,F)' = SL(n,F)' = SL(n,F)$$

[۱] Jordan,Dickson

برهان. به مرجع [۲۰] مراجعه کنید. □

لم ۲۹.۲.۱ فرض کنید $G = PSL(n,q)$ که در آن ۲ $< n$ یا ۲ $= n$ و ۳ $> q$. در این صورت G حل پذیر نیست.

برهان. بنا به قضیه جردن ـ دیکسون، گروه $G = PSL(n,q)$ که در آن ۲ $< n$ یا ۲ $= n$ و ۳ $> q$، ساده است. از طرفی G'، زیرگروه نرمال G است. بنابراین داریم $G' =< 1 >$ یا $G' = G$. با توجه به اینکه G ناآبلی است، $G' \neq \langle 1 \rangle$. از این رو $G' = G$. این نتیجه می دهد که برای هر $m \in \mathbb{N}$، $G^{(m)} = G$. بنابراین با توجه به ۷.۲.۱، گروه G، حل پذیر نیست. □

لم ۳۰.۲.۱ فرض کنید $G = GL(n,q)$ که در آن ۲ $< n$ یا ۲ $= n$ و ۳ $> q$. در این صورت G حل پذیر نیست.

برهان. به برهان خلف فرض کنید G حل پذیر باشد. در این صورت چون $SL(n,q) \leq GL(n,q)$، $SL(n,q)$ نیز حل پذیر است. حال از آن جایی که $PSL(n,q) = \frac{SL(n,q)}{Z(SL(n,q))}$ نتیجه می شود که $PSL(n,q)$ حل پذیر می باشد و این با ۲۹.۲.۱ تناقض دارد. بنابراین G حل پذیر نیست. □

قضیه ۳۱.۲.۱ فرض کنید $G = PGL(2,q)$ که در آن $q = p^n > 2$ و p عددی اول است. در این صورت G افرازی مانند ρ، شامل $q+1$، p ـ زیرگروه سیلو، $\frac{q(q+1)}{2}$ زیرگروه دوری از مرتبه ی $q-1$ و $\frac{q(q-1)}{2}$ زیرگروه دوری از مرتبه ی $q+1$ دارد.

برهان. به مرجع [۲۰]، صفحه های ۱۸۷ ـ۱۸۵ و ۱۹۳ مراجعه شود. □

قضیه ۳۲.۲.۱ فرض کنید $G = PSL(2,q)$ که در آن q توانی از عدد اول p است و قرار دهید $k = gcd(q-1, 2)$. در این صورت G افرازی مانند ρ، شامل $q+1$، p ـ زیرگروه سیلو، $\frac{q(q+1)}{2}$ زیرگروه دوری از مرتبه ی $\frac{q-1}{k}$ و $\frac{q(q-1)}{2}$ زیرگروه دوری از مرتبه ی $\frac{q+1}{k}$ دارد.