دانشگاه تربیت معلّم

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (جبر)

عنوان

حلقه‌هایی که همه مدولها روی آن‌ها قویاً گرنشتاین تصویری هستند

تدوین

سیامک ندرخانی

استاد راهنما

دکتر عبدالجواد طاهری‌زاده

اسفند ۱۳۸۷

چکیده

یکی از اصلی‌ترین نتایج فصل دوم و سوم این پایان نامه، مشخص‌سازی حلقه‌هایی است که تمام مدول‌ها روی آن‌ها قویاً گرنشتاین تصویری[1] است. ثابت می‌شود که این نوع از حلقه‌ها حالت بسیار خاصی از حلقه‌های شبه ـ فروبنیوس هستند.

در ادامه مثال‌هایی از حلقه‌هایی که تمام مدول‌ها روی آن‌ها قویاً گرنشتاین تصویری هستند ولی لزوماً گرنشتاین تصویری نیستند ارائه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی:

مدول‌های گرنشتاین تصویری[2]، انژکتیو و یکدست؛ تحلیل‌های کامل تصویری، انژکتیو و یکدست؛ مدول‌های قویاً گرنشتاین تصویری و انژکتیو ؛ حلقه‌های Gـ نیم ساده[3] و SG ـ نیم ساده [4].

[1] Strongly Gorenstein projective

[2] Gorenstein projective

[3] G-semisimple

[4] SG-semisimple

مقدمه

در سرتاسر این پایان‌نامه، R نمایشگر یک حلقه‌ی جابه‌جایی و یکدار ، و همه‌ی مدول‌ها یکانی هستند. اگر M یک R ـ مدول دلخواه فرض شود، $pd_R(M)$ ، $id_R(M)$ ، $fd_R(M)$ به ترتیب دلالت بر بعد تصویری، بعد انژکتیو و بعد یکدست Mدارد. هم‌چنین حلقه نه ضرورتاً نوتری R موضعی نامیده می‌شود هرگاه R تنها یک ایده‌آل ماکسیمال داشته باشد. در سال‌های ٦٩– ١٩٦٧ ، آسلندر[1] و بریدجر[2]، بعد گرنشتاین را برای مدول‌های با تولید متناهی روی حلقه‌های نوتری مطرح کردند، که با $G-\dim(M)$ نشان داده می‌شود. همچنین نامساوی $G-\dim(M)\leq Pd(M)$ را ثابت کردند و نشان دادند تساوی زمانی برقرار است که بعد تصویری M متناهی باشد. گفته می‌شود که بعد گرنشتاین تظریف بعد تصویری است. چندین دهه قبل، ایناکس[3]، جندا[4]و توریسلا[5] نظریه آسلندر و بریدجر را توسعه دادند (به [3,6] رجوع شود) و سه بعد همولوژی، به نام‌های بعد گرنشتاین تصویری، بعد گرنشتاین انژکتیو و بعد یکدست را مطرح کردند که همه‌ی این‌ها توسط بنیانگذاران این مفهوم‌ها و مؤلفینی نظیر آوراموف[6]، اریستنسن[7]، فاکبسی[8]، فرانکلید[9]، هلم[10]، ژو[11] به‌طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفتند(به [5,7,9] رجوع شود).

در فصل اول این پایان نامه به ارائه پیش‌نیازها و تعاریف و مطالبی که در ادامه موردنیاز است می‌پردازیم.مطالب این بخش عمدتاً بر گرفته از مراجع [1] ، [3] ، [5] ، [8] و [9] می‌باشد.

در فصل دوم این پایان‌نامه به مطالعه مدول‌های قویاً گرنشتاین تصویری و انژکتیو می‌پردازیم و با توجه به تعاریف رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

---

[1] Aslander
[2] Bridger
[3] Enochs
[4] Jenda
[5] Torrecillas
[6] Avramov
[7] Ehristensen
[8] Foxby
[9] Franklid
[10] Holm
[11] Xu

(مدول‌های گرنشتاین تصویری) $\subseteq$ (مدول‌های قویاً گرنشتاین تصویری) $\subseteq$ (مدول‌های تصویری)

مطالب این بخش عمدتاً برگرفته از [3] و [6] می‌باشد.

در فصل سوم به موضوع اصلی پایان‌نامه پرداخته و رده‌ی خاصی از حلقه‌ها به نام حلقه‌های G ـ نیم ساده و SGـ نیم ساده را معرفی می‌کنیم و نتیجه‌ی مهم این فصل پیدا کردن رابطه آنها با مدول‌های گرنشتاین انژکتیو، تصویری و قویاً گرنشتاین انژکتیو و تصویری است.

مطالب این بخش عمدتاً برگرفته از [1] ، [3] و [7] می‌باشد.

این پایان‌نامه بر اساس مقاله ذیل تدوین شده است:

D. Bennis, N. Mahdou and K. Ouarghi, Rings over which all modules are strongly Gorenstein projective,To applied in Rocky Mountain journal of Mathematics. Available from math. Ac\ 0712.0127v1 2 Des 2007.

فهرست مندرجات

فصل اول: پیش‌نیازها

۱۰۱ تعریف‌ها و قضیه‌های اساسی ۱

۲۰۱ مدول‌های گرنشتاین تصویری.. ۳

۳۰۱ بعد گرنشتاین تصویری مدول‌ها.. ۱۰

۴۰۱ مدول‌های گرنشتاین انژکتیو.. ۱۲

۵۰۱ بعد گرنشتاین انژکتیو مدول‌ها.. ۱۳

۶۰۱ مدول‌های گرنشتاین یکدست.. ۱۸

۷۰۱ بعد مدول‌های گرنشتاین یکدست.. ۱۸

۸۰۱ مفهوم حد مستقیم.. ۱۹

فصل دوم: مدول‌های قویاً گرنشتاین تصویری و انژکتیو

۱۰۲ تعریف‌ها و قضیه‌های اساسی.. ۲۲

فصل سوم: حلقه‌هائی که همه‌ی مدول‌ها روی آن‌ها قویاً گرنشتاین تصویری اند.

۱۰۳ حلقه‌های G ـ نیم ساده.. ۴۰

۲۰۳ حلقه‌های SG ـ نیم ساده.. ۴۶

فصل اول

پیش‌نیازها

۱.۱ تعریف‌ها و قضیه‌های اساسی

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم M_o و . . . و M_n $(n \geq 2)$ R– مدول‌هایی دلخواه باشند در این‌صورت دنباله‌ی

$$M_o \xrightarrow{\rho_1} M_1 \xrightarrow{\rho_2} M_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{\rho_n} M_n$$

را که دنباله‌ای از R– همریختی‌های ρ_1 ، . . . ، ρ_{n-1} و ρ_n است، دنباله‌ی دقیق می‌نامیم هرگاه برای هر $2 \leq i \leq n$ ، $\ker \rho_i = Im \rho_{i-1}$

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنید M ، N و K ، R– مدول‌هایی دلخواه باشند در این صورت اگر دنباله‌ی

$$\circ \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} K \longrightarrow \circ$$

دقیق باشد آن را دنباله‌ی دقیق کوتاه می‌گوییم، به عبارت دیگر دنباله‌ی فوق دقیق کوتاه است اگر و تنها اگر R– همریختی f یک به یک ، R– همریختی g پوشا و $\mathrm{Im} f = \ker g$ باشد.

تعریف ۳.۱.۱ R– مدول P را تصویری می‌نامیم هرگاه تابعگون همورد $Hom(p,-)$ دقیق باشد. به عبارت دیگر R– مدول P تصویری است اگر و تنها اگر به ازای هر دنباله‌ی دقیق کوتاه از R– همریختی‌ها مثل

$$\circ \longrightarrow M \xrightarrow{\rho} N \xrightarrow{\psi} K \longrightarrow \circ$$

دنباله‌ی $0 \to Hom(P,M) \to Hom(P,N) \to Hom(P,K) \to 0$ دقیق باشد.

قضیه ۱.۱.۴ شرایط زیر معادل‌اند:

۱) P، R- مدول تصویری است؛

۲) هر دنباله‌ی دقیق کوتاه مثل $0 \to M \to N \to P \to 0$ شکافته می‌شود؛

۳) R- مدولی آزاد مانند F موجود است که $F \cong K \oplus P'$.

قضیه ۱.۱.۵ هر R- مدول مثل M، تصویر همریخت یک مدول تصویری است.

تعریف ۱.۱.۶ فرض کنیم F یک R- مدول باشد. مولد X برای F را پایه می‌نامیم هرگاه مستقل خطی باشد.

تعریف ۱.۱.۷ F را یک R- مدول آزاد می‌نامیم هرگاه F دارای پایه باشد.

قضیه ۱.۱.۸ هر R- مدول آزاد، تصویری است.

قضیه ۱.۱.۹ F، یک R- مدول آزاد با پایه‌ی X است اگر و تنها اگر

$$F \cong \bigoplus_{x \in X} R$$

تعریف ۱.۱.۱۰ R- مدول مثل E را انژکتیو می‌نامیم هر گاه تابعگون پادورد $Hom(-,E)$ دقیق باشد. به عبارت دیگر R- مدول E انژکتیو است اگر و تنها اگر به ازای هر دنباله‌ی دقیق کوتاه از R- همریختی‌ها مثل

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\rho} N \xrightarrow{\psi} K \longrightarrow 0$$

دنباله‌ی

$0 \to Hom(K,E) \to Hom(N,E) \to Hom(M,E) \to 0$ دقیق باشد.

نتیجه ۱ . ۱ . ۱۱ به ازای هر R- مدول مثل M ، R- مدول انژکتیو مثل E موجود است که $M \leq E$.

قضیه ۱ . ۱ . ۱۲ اگر E ، R- مدولی انژکتیو باشد آن‌گاه به ازای هر توسیع از E مثل E' ، زیر مدولی مانند K از E' موجود است که $E' = E \oplus K$

قضیه ۱ . ۱ . ۱۳ E ، یک R- مدول انژکتیو است اگر و تنها اگر E فاقد توسیع اساسی سره باشد.

تعریف ۱ . ۱ . ۱۴ R- مدول راست، F را یکدست می‌نامیم هرگاه تابعگون همورد $F \underset{R}{\otimes} -$ دقیق باشد. هم‌چنین R- مدول چپ L را یکدست می‌نامیم هرگاه تابعگون همورد $- \underset{R}{\otimes} L$ دقیق باشد.

نتیجه ۱ . ۱ . ۱۵ هر R- مدول تصویری، یکدست است.

تعریف ۱ . ۱ . ۱۶ فرض کنید E یک R- مدول و A یک زیر مدول E باشد. R- مدول E را توسیع اساسی A گوییم، هرگاه برای هر زیر مدول ناصفر E' از E داشته باشیم

$$A \bigcap E' \neq 0$$

تعریف ۱ . ۱ .۱۷ گوییم R- مدول M را با نمایش متناهی است؛ اگر یک R- مدول آزاد متناهی مولد مانند F و یک زیر مدول متناهی مولد از F مانند G موجود باشد به‌طوری‌که $M \cong \frac{F}{G}$.

تعریف ۱ . ۱ . ۱۸ فرض کنید R یک حلقه باشد. R- مدول M را کوهرنت گوییم هرگاه M با تولید متناهی و زیر مدول‌های با تولید متناهی از M ، با نمایش متناهی باشند.

تعریف ۱ . ۱ . ۱۹ حلقه‌ی R را یک حلقه‌ی کوهرنت گویند هرگاه R به عنوان R- مدول کوهرنت باشد، یعنی هر ایده‌آل متناهیاً تولید شده از R با نمایش متناهی باشد.

۱ . ۲ مدول‌های گرنشتاین تصویری

در این بخش ابتدا مدول گرنشتاین تصویری معرفی و سپس رفتار آن روی دنباله‌های دقیق بررسی شده است.

تعریف ۱ . ۲ . ۱ [۳] فرض کنید P' یک دنباله دقیق از R- مدول‌های تصویری باشد،

$$P' = \dots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_\circ \xrightarrow{f_\circ} P^\circ \xrightarrow{f^1} P^1 \longrightarrow \dots.$$

به‌طوری که به ازای هر R- مدول تصویری Q ، دنباله‌ی

$$\dots \to Hom(P_1,Q) \to Hom(P_\circ,Q) \to Hom(P^\circ,Q) \to \dots$$

دقیق باشد. در این صورت P' را یک تحلیل تصویری کامل گوییم.

فرض کنید M یک R- مدول باشد و تحلیل تصویری کاملی مانند $P_\circ$ وجود داشته باشد به‌طوری که $M \cong \operatorname{Im} f_\circ = \ker f^1$ در این صورت M را یک R- مدول گرنشتاین تصویری (یا به اختصار G- تصویری) نامیم. کلاس تمام R- مدول‌های گرنشتاین تصویری را با $GP(R)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱ . ۲ . ۲ برای هر R- مدول M ، بعد تصویری و انژکتیو به شکل زیر تعریف می‌شود:

$id_R(M) = \sup\{n \in N_\circ \mid Ext_R^n(N,M) \neq \circ$ که R- مدول Nی وجود دارد $\}$

$pd_R(M) = \sup\{n \in N_\circ \mid Ext_R^n(M,N) \neq \circ$ که R- مدول Nی وجود دارد $\}$

قضیه ۱ . ۲ . ۳ [۵, ۴.۴.۱۲] فرض کنیم $M \in GP(R)$. در این صورت به ازای هر $i > \circ$ و به ازای هر R- مدول L که $pd_R L < \infty$ داریم. $Ext_R^i(M,L) = \circ$.

قضیه ۱ . ۲ . ۴ دیاگرام زیر را در نظر بگیرید به‌طوری که ستون‌های آن تحلیل‌های تصویری و سطر آن دنباله‌ی دقیق است در این صورت یک تحلیل تصویری از A موجود است که دیاگرام را کامل می‌کند به طوری سطرهای آن دقیق و ستون‌های آن دنباله‌ی دقیق از همبافت‌ها است. (نعل اسب)

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 & & P_1' & & & & P_1'' & & \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 & & P_\circ' & & & & P_\circ'' & & \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
\circ & \to & A' & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{j} & A'' & \to & \circ \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 & & \circ & & & & \circ & &
\end{array}$$

قضیه ۱ . ۲ . ۵ فرض کنیم $M_\circ$ یک تحلیل تصویری کامل باشد. در این صورت به ازای هر R- مدول L که $pd_R L < \infty$ ، $Hom_R(M_\circ, L)$ دقیق است.

برهان: فرض کنیم

$$M_\circ = \ldots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{f_2} P_1 \xrightarrow{f_1} P_\circ \xrightarrow{f_\circ} Q^\circ \xrightarrow{\varepsilon^\circ} Q^1 \xrightarrow{\varepsilon^1} Q^2 \longrightarrow \ldots$$

یک تحلیل تصویری کامل باشد. از $M_\circ$ دنباله‌های دقیق

$$\begin{array}{ll}
P_\circ: & \ldots \to P_2 \to P_1 \to P_\circ \to M \to \circ \\
Q_\circ: & \circ \to M \to Q^\circ \to Q^1 \to Q^2 \to \ldots
\end{array} \qquad (*)$$

را داریم که در آن $M = \mathrm{Im} f^\circ = \ker \varepsilon^\circ$.

نشان می‌دهیم به ازای هر R- مدول L که $pd_R L < \infty$، دنباله‌های $Hom_R(P_\circ, L)$ و $Hom_R(Q_\circ, L)$ دقیق‌اند.

با توجه به تعریف مدول گرنشتاین تصویری داریم، $M \in GP(R)$ پس با توجه به قضیه 1.2.3 برای هر $i > \circ$ داریم، $Ext_R^i(M, L) = \circ$ لذا با توجه به تعریف تابگون $Ext_R^i(-,-)$ دنباله $Hom(P_\circ, L)$ دقیق است.

حال نشان می‌دهیم که دنباله $Hom(Q_\circ, L)$ دقیق است این مطلب را با استقرار روی $pd_R L$ ثابت می‌کنیم. فرض کنید $pd_R L = \circ$، در این صورت حکم از تعریف تحلیل تصویری کامل و (*)برقرار است.

فرض کنید $n > \circ$ و $pd_R L = n$ و حکم برای تمام مدول‌های با بعد کم‌تر از n برقرار باشد در این صورت دنباله‌ی دقیق زیر را داریم:

$$o \to k \to F \to L \to o$$

که در آن F یک R- مدول تصویری است و $pd_R k = n - 1$ چون هر جمله دنباله دقیق $Q_\circ$، تصویری است پس دنباله‌ی دقیق زیر از همبافت‌ها را داریم.

$$\circ \to Hom_R(Q_\circ, k) \to Hom_R(Q_\circ, F) \to Hom_R(Q_\circ, L) \to \circ$$

حال حکم از فرض استقراء و قضیه 4.2.1 نتیجه می‌شود.

نتیجه ۶.۲.۱ [۱, ۷.۵] دنباله دقیق

$$\circ \longrightarrow G_{m+2} \xrightarrow{f_{m+2}} G_{m+1} \xrightarrow{f_{m+1}} G_m \to \dots \to G_1 \xrightarrow{f_1} G_\circ \to \circ$$

از R- مدول‌ها و R- همریختی‌ها که $G_\circ$ و . . . و G_m گرنشتاین تصویری هستند را در نظر بگیرید. در این صورت G_{m+1} گرنشتاین تصویری است اگر و تنها اگر G_{m+2} گرنشتاین تصویری باشد.

قضیه ۱ . ۲ . ۷ [۵, ۴.۲.۶] R- مدول M گرنشتاین تصویری و با تولید متناهی است اگر و تنها اگر $M \in GP(R)$.

قضیه ۱ . ۲ . ۸ [۷, ۲.۵] کلاس $GP(R)$ متشکل از R- مدول‌های گرنشتاین تصویری، تحت جمع مستقیم دلخواه و جمع‌وند مستقیم بسته است.

تعریف ۱ . ۲ . ۹ [۹] حلقه R را شبه فروبنیوس نامند اگر R نوتری و به عنوان R- مدول انژکتیو باشد.

تعریف ۱ . ۲ . ۱۰ [۹] حلقه‌ی R را کامل گوییم اگر و تنها اگر هر R- مدول یکدست ، تصویری باشد.

تعریف ۱ . ۲ . ۱۱ [۹, ۳.۶۲] (لم شانوئل) فرض کنید دو دنباله به شکل

$$\circ \to k_2 \to P_2 \to B \to \circ$$
$$\circ \to k_1 \to P_1 \to B \to \circ$$

دقیق باشند، به‌طوری که در آن P_1 و P_2 مدول‌های تصویری هستند. در این صورت

$$k_1 \oplus P_2 \cong k_2 \oplus P_1$$

قضیه ۱ . ۲ . ۱۲ [۱, ۲۰.۲] فرض کنیم $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ خانواده‌ای از R- مدول‌های چپ باشند در این صورت:

$I)\ Hom_R(-,\Pi_A U_\alpha) \cong \Pi_A Hom_R(-,U_\alpha)$

$II)\ Hom_R(\oplus U_\alpha,-) \cong \Pi_A Hom_R(U_\alpha,-)$

$III)\ (-\otimes_R \oplus U_\alpha) \cong \oplus_A(-\otimes_R U_\alpha)$

قضیه ۱ . ۲ . ۱۳ [۸, ۱.۵۰][۸, ۷.۵۵] اگر R یک حلقه باشد آن‌گاه گزاره‌های زیر معادل است:

۱) R شبه فروبنیوس است.

۲) R آرتینی و خود انژکتیو است.

۳) هر R- مدول تصویری، انژکتیو است.

٤) هر R- مدول انژکتیو، تصویری است.

۵) R نوتری است وبرای هر ایده‌آل I، $Ann(Ann(I)) = I$.

قضیه ۱ . ۲ . ۱۴ R حلقه شبه فروبنیوس است اگر و تنها اگر $R = R_1 \times \ldots \times R_n$ که در آن R_iها حلقه‌های موضعی و شبه فروبینوس هستند.

برهان. فرض کنیم R یک حلقه‌ی شبه فروبنیوس است پس طبق تعریف آرتینی و خود انژکتیو است. حال چون $R = \prod_{i=1}^{n} R_i$، هر R_i آرتینی و موضعی است. ثابت می‌کنیم که هر R_iخودانژکتیو است. فرض کنیم

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & M \\ & R_i & \end{tikzcd}$$

یک دیاگرام از R_i−مدولها است. (i ثابت.) چون R خود انژکتیو، وجود دارد همریختی h به‌طوری‌که دیاگرام

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[ddl, "h"] \\ & R_i \arrow[d, "\tau_i"'] & \\ & \prod R_i & \end{tikzcd}$$

جابه‌جایی است. به راحتی معلوم می‌شود که دیاگرام

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, dotted, "h^*"'] \arrow[ddl, "h"] \\ & R_i \arrow[d, "\tau_i"'] & \\ & \prod R_i & \end{tikzcd}$$

یک دیاگرام از R- مدول‌هاست:

$$\begin{array}{lll} R\times N \longrightarrow N & & R\times R_i \longrightarrow R_i \\ (r,n) \mapsto \pi_i(r)n & & (s,r_i) \mapsto \pi_i(s)r_i \end{array}$$

$$f(rn)=f(\pi_i(r)n)=\pi_i(r)f(n)=rf(n)$$

$$h(r_i m)=h(\tau(r_i)m)=\tau(r_i)h(m)=r_i h(m)$$

پس دیاگرام فوق، از R- مدولهاست. از طرفی بنا بر فرض $hu=\tau_i f$ و قرار می‌دهیم $h^*=\pi_i h$. پس

$$h^*u=\pi_i hu=\pi_i\tau_i f=f$$

پس هر R_i خود انژکتیو ، در نتیجه شبه فروبنیوس است.

برعکس: $R=R_1\times\ldots\times R_n$ که هر R_i موضعی و شبه فروبنیوس است. پس هر R_i آرتینی و خودانژکتیو است. پس R آرتینی و خودانژکتیو است.

فرض کنیم

$$\begin{array}{ccccc} \circ & \longrightarrow & \underline{b} & \xrightarrow{u} & R \\ & & f\downarrow & & \\ & & R & & \end{array}$$

یک دیاگرام از R- مدولها باشد. در این صورت دیاگرام

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[r] & \underline{b} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, dashed, "h^*"] \arrow[ddl, dashed, "h_i"] \\ & R \arrow[d, "\pi_i"'] & \\ & R_i & \end{tikzcd}$$

یک دیاگرام از R_i ها است:

$$R_i \times \underline{b} \longrightarrow \underline{b} \qquad\qquad R_i \times R \longrightarrow R$$

$$(r_i, b) \mapsto \tau(r_i)b \qquad\qquad (r_i, s) \mapsto \tau(r_i)s$$

پس همریختی R_i-مدولهاست. h_i ، همریختی R_i- مدولها و نیز همریختی $R-$ مدولهاست.

$$h_i(rs) = h_i(\pi_i(r)s) = \pi_i(r)h_i(s) = rh_i(s) \qquad\qquad \forall r \in R$$

از طرفی بنابر فرض به ازای هر i که $1 \le i \le n$، همریختی h_i از R به R_i موجود است به

طوری که $h_i u = \pi_i f$. قرار می‌دهیم:

$$h^* = R \longrightarrow R$$

$$h^*(r) = \sum_{i=1}^{n} \tau_i h_i(r)$$

در این صورت

$$(h*u)(r)=\sum_{i=1}^{n}\tau_i h_i(u(r))=\sum_{i=1}^{n}\tau_i(h_i u)(r)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\tau_i(\pi_i(f(r)))=\sum_{i=1}^{n}(\tau_i\pi_i)f(r)$$
$$=f(r)$$

پس حلقه R شبه فروبنیوس است.

۳.۱ بعد گرنشتاین تصویری (بعد G– تصویری)

تعریف ۱ . ۳ . ۱ [۵] فرض کنید Mیک R– مدول باشد. دنباله‌ی دقیق

$$\cdots G_2\to G_1\to G_\circ\to M\to\circ$$

که به ازای هر $i\geq\circ$ و G_iها گرنشتاین تصویری هستند را تحلیل گرنشتاین تصویری (یا تحلیل G– تصویری) M گوییم.

گزاره ۱ . ۳ . ۲ هر مدول تصویری، گرنشتاین تصویری است.

زیرا کافی است P را مدول تصویری و تحلیل کامل تصویری $\circ\to P\xrightarrow[f]{=}P\to\circ$ را در نظر بگیریم.
به وضوح $\mathrm{Im}f\cong P$ و هم‌چنین

$$\circ\to Hom(P,Q)\xrightarrow{=}Hom(P,Q)\to\circ$$

برای هر R– مدول تصویری Q ، دقیق است.

تذکر ۱ . ۳ . ۳ بنابرمطلب فوق که هر R– مدول تصویری، گرنشتاین تصویری است پس هر R– مدول M، تحلیل گرنشتاین تصویری دارد.

تعریف ۱ . ۳ . ۴ [۷] فرض کنید M یک R– مدول ناصفر باشد. بعد گرنشتاین تصویری M را که با $Gpd_R M$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$Gpd_R(M)=\min\{i\in N\cup\{\circ\}\mid$ تحلیل گرنشتاین تصویری از طول i برای m وجود داشته باشد. $\}$

در صورتی که تحلیل گرنشتاین تصویری متناهی طول برای M موجود نباشد بعد گرنشتاین تصویری M را ∞ تعریف می‌کنیم.

قضیه ۱ . ۳ . ۵ [۷, ۲.۲۰] فرض کنید M یک R- مدول باشد، به‌طوری که $Gpd_R M < \infty$ در این صورت به ازای هر $n \geq 0$ گزاره‌های زیر معادل‌اند:

الف) $Gpd_R M \leq n$

ب) به ازای هر R- مدول L که $pd_R L < \infty$ و به ازای هر i که $n < i$ داریم $Ext_R^i(M, L) = 0$.

ج) به ازای هر R- مدول تصویری Q و به ازای هر i که $i > n$ داریم. $Ext_R^i(M, Q) = 0$

د) به ازای هر دنباله‌ی دقیق

$$0 \to K_n \to G_{n-1} \to G_{n-2} \to \ldots \to G_0 \to M \to 0$$

که در آن G_0 و . . . و G_{n-1} مدول‌های گرنشتاین تصویری هستند، k_n نیز گرنشتاین تصویری است.

تعریف ۱ . ۳ . ۶ [۷] بعد کلی گرنشتاین تصویری حلقه‌ی R به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$GPD(R) = \sup\{Gpd_R(M) \mid \text{یک } M \text{ مدول است -R}\}$$

قضیه ۱ . ۳ . ۷ [۷, ۲.۴] فرض کنید R یک حلقه نوتری و Mیک R- مدول متناهی مولد باشد در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند.

الف) $M \in GP(R)$

ب) تحلیل کامل تصویری مانند

$$F_0 = \to \ldots . \to F_1 \to F_0 \to L^0 \to L^1 \to \ldots$$

وجود دارد به طوری که به ازای هر $n \geq 0$ و F_n و L^nآزاد و متناهی مولد هستند و $M \cong \mathrm{Im}(F_0 \to L^0)$

ج) $M \in G(R)$

۱ . ۴ مدول گرنشتاین انژکتیو

تعریف ۱ . ۴ . ۱ فرض کنید $E_{\circ}$ یک دنباله دقیق از R- مدول‌های انژکتیو باشد:

$$E_{\circ} = \ldots \to I_2 \xrightarrow{\lambda_2} I_1 \xrightarrow{\lambda_1} I_{\circ} \xrightarrow{\lambda_{\circ}} E^{\circ} \xrightarrow{\varepsilon^{\circ}} E^1 \xrightarrow{\varepsilon^1} E^2 \to \ldots$$

به‌طوری که به ازای هر R- مدول انژکتیو I، $Hom_R(I, E_{\circ})$ دقیق باشد. در این صورت $E_{\circ}$ را تحلیل انژکتیو کامل گوییم.
فرض کنید M یک R- مدول باشد و تحلیل انژکتیو کاملی مانند $E_{\circ}$ وجود داشته باشد به طوری که $M \cong \mathrm{Im}\lambda_{\circ} = \ker\varepsilon^{\circ}$. در این صورت Mرا یک R- مدول گرنشتاین انژکتیو (یا G- انژکتیو) نامیم.
کلاس تمام R- مدول‌های گرنشتاین انژکتیو (G ـ انژکتیو) را با $GI(R)$ نشان می‌دهیم.

نتیجه ۲ . ۴ . ۱ فرض کنید $M \in GI(R)$ ، در این صورت به ازای هر $i > \circ$ و به ازای هر R- مدول L که $id_R L < \infty$ داریم $Ext_R^i(L, M) = \circ$.

نتیجه ۳ . ۴ . ۱ فرض کنید $E_{\circ}$ یک تحلیل انژکتیو کامل باشد. در این صورت به ازای هر R- مدول Lکه $id_R L < \infty$، $Hom(L, E_{\circ})$دقیق است.

قضیه ۴ . ۴ . ۱ [۷, ۲.۶] کلاس $GI(R)$ از R- مدول‌های گرنشتاین انژکتیو تحت حاصلضرب دلخواه و جمع‌وند مستقیم بسته است.
نتیجه ۵ . ۴ . ۱ دنباله دقیق

$$\circ \to I^{\circ} \to I^1 \to \ldots \to I^{m+1} \to I^{m+2}$$

از R- مدول‌ها و R- همریختی‌ها که I° وI^1 و . . . و I^m گرنشتاین انژکتیو هستند را در نظر بگیرید در این صورت I^{m+1} گرنشتاین انژکتیو است اگر و فقط اگر I^{m+2} گرنشتاین انژکتیو باشد.

قضیه ۶ . ۴ . ۱ فرض کنید $\circ \to M \to H \to H' \to \circ$ دنباله‌ای دقیق باشد به طوری که Hو H' گرنشتاین انژکتیو است و به ازای هر R- مدول انژکتیو I داریم، $E_R^1(I, M) = \circ$ در این صورت Mگرنشتاین انژکتیو است.

۵.۱ بعد گرنشتاین انژکتیو

تعریف ۱ . ۵ . ۱ [۱۰] فرض کنید M یک R- مدول باشد، دنباله دقیق

$$\circ \to M \to H^{\circ} \to H^{1} \to H^{2} \to \dots$$

که به ازای هر $i \geq \circ$ ، H^{i}ها گرنشتاین انژکتیو هستند را تحلیل گرنشتاین انژکتیو M(تحلیل G- انژکتیو) گوییم.

منظور از تحلیل گرنشتاین انژکتیو به طول n، تحلیلی است که در آن به ازای $i > n$، $H^{i} = \circ$ و $H^{n} \neq \circ$

تعریف ۱ . ۵ . ۲ [۶] فرض M یک R- مدول ناصفر باشد، بعد گرنشتاین انژکتیو یا G- انژکتیو را که با $Gid_{R}M$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف کنیم:

در صورتی که تحلیل انژکتیو متناهی طول برای M وجود داشته باشد بعد گرنشتاین انژکتیو M را عدد زیر تعریف کنیم:

$Gid_{R}M = \min\{i \in Nu\{\circ\} \mid$ تحلیل گرنشتاین انژکتیو از طول i برای M وجود داشته باشد. $\}$

در صورتی که M تحلیل گرنشتاین انژکتیو متناهی طول نداشته باشد بعد گرنشتاین انژکتیو M را ∞ تعریف می‌کنیم.

قضیه ۱ . ۵ . ۳ فرض کنید Mیک R- مدول باشد به طوری که $Gid_{R}M < \infty$.

در این صورت به ازای هر $n \geq \circ$ گزاره‌های زیر معادلند:

الف) $Gid_{R}M \leq n$

ب) به ازای هر R- مدول L که $id_{R}L < \infty$ و به ازای هر $i > n$ داریم، $Ext_{R}^{i}(L,M) = \circ$.

ج) به ازای هر R- مدول انژکتیو I و به ازای هر $i > n$ داریم، $Ext_{R}^{i}(I,M) = \circ$

د) به ازای هر دنباله دقیق

$\circ \to M \to H^{\circ} \to \dots \to H^{n-1} \to C^{n} \to \circ$ که H° و . . . و H^{n-1}

گرنشتاین انژکتیو هستند داریم، C^n نیز گرنشتاین انژکتیو است.

تعریف ۱ . ۵ . ۴ [۱۰] بعد کلی گرنشتاین انژکتیو حلقه‌ی R را به فرم زیر تعریف می‌کنیم:

$$GID(R) = SUP\{Gid_R M \mid \text{یک } R\text{– مدول است } M\}$$

قضیه ۱ . ۵ . ۵ اگر M یک R– مدول باشد با $Pd_R M < \infty$ آن‌گاه $Gid_R M = id_R M$ به ویژه اگر $GidR < \infty$ آن‌گاه $id_R R < \infty$.

برهان. همواره داریم $Gid_R M \leq id_R M$ پس کافیست ثابت کنیم $id_R M \leq Gid_R M$.

اگر $Gid_R M = \infty$ حکم برقرار است پس فرض کنید. $Gid_R M < \infty$.

ابتدا فرض کنید که M گرنشتاین انژکتیو باشد ، در نتیجه $Gid_R M = \circ$. بنابر تعریف، M هستهٔ تحلیل کامل انژکتیو است یعنی

$$E : \ldots \to E_1 \to E_\circ \to E_{-1} \to \ldots$$

از R– مدول‌های انژکتیو موجود است به‌طوری برای هر R– مدول انژکتیو $Hom(I,-)$، فانکتور دقیق است، $M \cong \ker(E_1 \to E_\circ)$ به ویژه یک رشته دقیق کوتاه به صورت

$$o \to M' \to E \to M \to \circ$$

موجود است به طوری که E انژکتیو و M' گرنشتاین انژکتیو است. چون M' گرنشتاین انژکتیو است و $Pd_R M < \infty$ لذا $Ext_R^1(M, M') = \circ$ بنابراین

$$\circ \to M' \to E \to M \to \circ$$

یک رشته دقیق شکافته شده است زیرا رشته فوق دقیق است، پس رشته دقیق طولانی

$$\circ \to Hom(M, M') \to Hom(E, M') \to Hom(M', M') \to Ext_R^1(M, M') \to \ldots$$

را داریم که $Ext_R^1(M, M') = \circ$ پس رشته‌ی دقیق