بسم الله الرحمن الرحيم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه ملایر
دانشکده علوم پایه - گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی
(گرایش آنالیز عددی)

چندجمله‌ایهای برنولی
برای حل معادلات انتگرال فردهلم

استاد راهنما

دکتر فرشید میرزائی

استاد مشاور

دکتر خسرو سایوند

توسط

زهرا بیرانوند

مهرماه ۱۳۹۲

چندجمله ایهای برنولی
برای حل معادلات انتگرال فردهلم

توسط

زهرا بیرانوند

پایان نامه
ارایه شده به تحصیلات تکمیلی به عنوان بخشی
از فعالیت های لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد
در رشته
ریاضی کاربردی (گرایش آنالیز عددی)
از دانشگاه ملایر

ارزیابی و تایید شده توسط کمیته پایان نامه با درجه ....
دکتر فرشید میرزائی، استادیار ریاضیات کاربردی (استاد راهنما) ....
دکتر خسرو سایوند، استادیار ریاضیات کاربردی (استاد مشاور) ....
دکتر مهدی قیاسوند، استادیار ریاضیات کاربردی (داور خارجی) ....
دکتر محسن اسماعیل بیگی، استادیار ریاضیات کاربردی (داور داخلی) ....
دکتر ابراهیم غلامی، استادیار فیزیک(نماینده تحصیلات تکمیلی) ....

مهر ماه ۱۳۹۲

تقدیم به

اسوه ی صبر و بردباری، پدر عزیزم

و تقدیم به

الگوی دلسوزی و مهربانی، نازنین مادرم

آنان که وجودشان سرشار از محبت و مهربانیست و بدون وجودشان پیمودن این مسیر پر از فراز و نشیب غیر ممکن است.

با تشکر از

استاد ارجمند

جناب آقای دکتر فرشید میرزائی

که توفیق شاگردی ایشان نصیب من شد و از تجربیات این استاد بزرگوار استفاده نمودم.

نام خانوادگی دانشجو: بیرانوند	نام: زهرا
عنوان پایان نامه:چندجمله ایهای برنولی برای حل معادلات انتگرال فردهلم	
استاد راهنما: فرشید میرزائی	
استاد مشاور: خسرو سایوند	
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی دانشگاه ملایر - گروه ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: مهر ماه ۱۳۹۲ تعداد صفحات:۱۲۵	
کلید واژه ها: معادلات انتگرال فردهلم، معادلات انتگرال - دیفرانسیل فردهلم، چندجمله ایهای برنولی، روش ماتریس برنولی، روش عددی.	

چکیده

در این پایان نامه حل عددی معادلات انتگرال -دیفرانسیل فردهلم خطی و غیرخطی با استفاده از روش چندجمله ایهای برنولی مورد بررسی قرار گرفته است. این پایان نامه شامل پنج فصل است که به صورت زیر ارایه گردیده اند. در فصل اول مقدمه ای کوتاه در مورد معادلات انتگرال و تعاریف و قضایای مربوط به این پایان نامه بیان شده است، فصل دوم شامل مختصر توضیحاتی از چندجمله ایهای برنولی و بسط توابع بر حسب سری چندجمله ایهای برنولی آن می باشد. در فصل سوم این روش برای حل عددی معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم خطی به همراه چندین مثال به کار برده شده است. حل عددی معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم غیرخطی با استفاده از روش مذکور و چندین مثال در فصل چهارم بررسی شده است. در انتها، حل عددی دستگاه معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم خطی را به همراه چند مثال در فصل پنجم بیان نموده ایم.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

لیست جداول

فصل ۱

تاریخچه معادلات انتگرال و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در این فصل ابتدا معادلات انتگرال را تعریف کرده و سپس به بیان تاریخچه معادلات انتگرال و دسته بندی آن می پردازیم. پس از آن تعریف و قضایای لازم و مرتبط با این پایان نامه را ارایه کرده و در انتها به شرح روش حل دستگاه های غیرخطی به روش نیوتن می پردازیم.

تعریف ۱.۱ معادله انتگرال، معادله ای است که تابع مجهول، زیر یک یا چند علامت انتگرال ظاهر می شود؛ همچنین این تابع مجهول می تواند علاوه بر زیر علامت انتگرال، در خارج از علامت انتگرال نیز ظاهر شود [۳, ۱۰, ۱۲, ۱۶].

مثال ۱.۱ معادلات زیر، نمونه هایی از معادلات انتگرال فردهلم هستند:

$$x(x)=\int_a^b k(x,t)y(t)dt, \tag{۱.۱}$$

$$y(x)=x(x)+\int_a^b k(x,t)y(t)dt, \tag{۲.۱}$$

$$y(x)=\int_a^b k(x,t)y^{2}(t)dt, \tag{۳.۱}$$

که در آنها $a\leq t\leq b$ و $y(x)$ تابع مجهول و سایر توابع معلوم هستند. تابع دو متغیره $k(x,t)$ هسته معادله انتگرال نامیده می شود. این توابع می توانند مقدار حقیقی یا مختلط از متغیرهای حقیقی t و x باشند. همچنین معادله انتگرال ممکن است به چندین متغیر وابسته باشد. برای مثال:

$$y(x)=x(x)+\int_\Omega k(x,t)y(t)dt, \tag{۴.۱}$$

که در آن sوt بردارهای $n-$ بعدی و Ω ناحیه ای از فضای $n-$ بعدی است. همچنین می توانیم دستگاه معادلات انتگرالی را بررسی کنیم که چندین تابع مجهول داشته باشد، به عبارت دیگر تابع مجهول آن به صورت یک بردار سطری یا ستونی می باشد.

تعریف ۲.۱ یک هسته را متقارن گوییم هرگاه

$$k(x,t) = k^*(x,t), \tag{۵.۱}$$

که در آن k^* مزدوج مختلط k می باشد.

تذکر ۱.۱ اگر k حقیقی مقدار باشد، آنگاه $k(x,t) = k^*(x,t)$ است.

۲.۱ تاریخچه

در روند بررسی برخی از معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات با مشتقات جزئی، با معادلاتی رو به رو می شویم که به آنها معادلات انتگرال گفته می شود. نظریه معادلات انتگرال یکی از مهم ترین شاخه های آنالیز ریاضی است که در بسیاری از مسائل فیزیکی و مهندسی ظاهر می شود.

بنیان‌گذاران اصلی نظریه معادلات انتگرال ویتو ولترا[۱] (۱۹۴۰–۱۸۶۰) و اریک ایوار فردهلم[۲] (۱۹۲۷–۱۸۶۶)به همراه دیوید هیلبرت [۳] (۱۹۴۳ – ۱۸۲۶) و ارهارد اسمیت [۴] (۱۸۷۶) می باشند. در ابتدا حل معادله انتگرال تحت عنوان معکوس گرفتن از انتگرال تلقی می شد، لیکن اولین بار اصطلاح معادله انتگرال توسط بویس ریموند [۵] پیشنهاد شد. در سال ۱۷۸۲ لاپلاس [۶] اولین کسی بود که برای حل معادلات دیفرانسیل، با معرفی $x(x) = \int_{0}^{\infty} e^{-xt} y(t)dt$ بحث درباره نظریه معادلات انتگرال را آغاز کرد.

در جریان تکامل و پیشرفت ریاضیات، فوریه [۷] در سال ۱۸۱۱ روی نظریه حرارت کار کرد و به نوعی از این معادلات برخورد کرد. به دنبال آن آبل [۸] نیز در سال ۱۸۲۳ در مساله خود، که به مساله مکانیکی آبل معروف است، کاربرد معادلات انتگرال را مطرح کرد. در سال۱۸۲۶ پواسن[۹] در نظریه مغناطیسی خود، به

[۱] Vito Volterra

[۲] Erik Ivar Fredholm

[۳] David Hilbert

[۴] Irhard Smith

[۵] Bois Reymond

[۶] Laplace

[۷] Fourier

[۸] Able

[۹] Poissone

معادله انتگرال زیر رسید:

$$x(x) = \frac{۱}{۲\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{xt}y(t)dt,$$

که در آن a عددی به قدر کافی بزرگ است. لیوویل[۱] نیز مستقیماً معادلات انتگرال خاصی را از سال ۱۸۳۲ به بعد حل نمود و یک گام اساسی در توسعه معادلات انتگرال برداشت و آن چگونگی حل بعضی معادلات دیفرانسیل به کمک معادلات انتگرال بود.

در سال ۱۸۷۰ نیومن [۲] با تبدیل مساله دیریکله[۳] به یک معادله انتگرال از دیگر کسانی بود که نقش موثری در تکامل معادلات انتگرال داشت.

برای اولین بار اصطلاح نوع اول و دوم که امروزه در معادلات انتگرال به کار می رود، توسط هیلبرت پیشنهاد شد. البته قبل از هیلبرت معادلات آبل و لیوویل به فرم های زیر مطرح بود که هر دو از نمونه های مهم در معادلات انتگرال هستند:

$$x(x) = \int_a^t k(x,t)y(t)dt; \qquad a \le t \le b,$$

و

$$y(x) = x(x) + \int_a^t k(x,t)y(t)dt; \qquad a \le t \le b,$$

که در آنها $k(x,t)$ و $x(x)$ توابعی معلوم و $y(x)$ تابعی مجهول است.

در سال ۱۸۹۶ پوانکاره[۴] معادله انتگرالی را که متناظر با معادله دیفرانسیل جزئی حرکت موج می باشد به دست آورد:

$$\triangledown y(x,t) + \lambda y(x,t) = x(x,t); \quad \lambda \epsilon R$$

که در آن

$$\nabla = \frac{\partial^۲}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲}{\partial t^۲},$$

[۱] Liouville

[۲] Neuman

[۳] Dirichlet

[۴] Poincare

و

$$y(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)y(t)dt = x(x).$$

در همان سال دانشمندی از ایتالیا به نام ولترا برای اولین بار نظریه عمومی معادلات انتگرال را مطرح کرد و اهمیت این نظریه را به رسمیت شناخت و به شکلی اصولی به تحقیق و بررسی در این موضوع پرداخت.

ولترا در سال ۱۸۹۰ با استفاده از مفاهیم حساب انتگرال و دیفرانسیل تابعی، نشان داد که نظریه هامیلتون[۱] و ژاکوبی [۲] برای انتگرال گیری از معادلات دینامیکی را می توان به دیگر مسائل ریاضی فیزیک توسعه داد. ولترا در خلال سال های ۱۸۹۲ تا ۱۸۹۴ مقالاتی تحت عنوان معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی منتشر کرد. شهرت او بیشتر به واسطه کارهایش در زمینه معادلات انتگرال می باشد. او مطالعه در این زمینه را در سال ۱۸۸۴ شروع کرد که هم اکنون تحت عنوان معادلات انتگرال ولترا شناخته می شود .

فردهلم تا حدود سال ۱۹۰۰ نقش عمده ای در بسط و گسترش این نظریه نداشت. او اوایل به تحقیق در مورد مساله های مکانیک کاربردی پرداخت و در اواخر زندگی اش به کار بر روی ریاضیات کاربردی ادامه داد. شهرت او بیشتر به خاطر کارهایش در نظریه معادلات انتگرال و نظریه طیفی می باشد. در سال ۱۹۰۰ اولین مقاله فردهلم در نظریه معادلات انتگرال تحت عنوان:

Sur une nouvelle methode du de dirichle,

منتشر شد. ریمان [۳]، شوارتز [۴]، نیومن، پوانکاره مسائلی را حل کرده بودند که حالت خاصی از نظریه ای بود که فردهلم ارایه کرده بود که این امر نشان از قدرتمند بودن نظریه او در معادلات انتگرال داشت.

در سخنرانی که درباره نظریه فردهلم در گوتینگن در سال ۱۹۰۱، توسط یک ریاضیدان سوئدی به نام اریک هولمگر [۵] ارایه شد، فردهلم به عنوان چهره ای در عرصه ریاضیات شناخته شد و علاقه هیلبرت را به تحقیق روی معادلات انتگرال برانگیخت و او در بسیاری از مسائل ریاضی فیزیک از معادلات انتگرال کمک گرفت. هیلبرت فاصله انتگرال گیری را (۰,۱) و هسته را پیوسته فرض کرد. فردهلم در سال ۱۹۰۳ نسخه کامل تری از نظریه اش را در معادلات انتگرال تحت عنوان:

[۱] Hamilton

[۲] Jacobi

[۳] Riemann

[۴] Schwartz

[۵] Erick Holmger

منتشر کرد. هیلبرت که به اهمیت نظریه فردهلم پی برده بود، ثابت کرد که معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی حاصل از نوسانات یک صفحه می تواند منجر به یک معادله انتگرال فردهلم با هسته متقارن شود.
هیلبرت حدود ده سال به کار روی نظریه فردهلم پرداخت و کارهای او را توسعه داد که منجر به نظریه مقادیر ویژه برای معادلات انتگرال شد. حدود دو دهه اول قرن بیستم معادلات انتگرال یکی از عمده ترین موضوعات تحقیق در ریاضیات بود.

۳.۱ انواع معادلات انتگرال

با توجه به توسعه معادلات انتگرال و کاربردهای وسیع آن تقسیم بندی جامع برای این دسته از معادلات ضرورت دارد؛ به خصوص که از یک طرف در مسائل مختلف فیزیکی، انواع خاصی از معادلات انتگرال ظاهر می شود و از طرف دیگر راه هایی که جهت حل انواع آنها ارایه شده است، متفاوت است. با توجه به موارد فوق، لازم است که برخی از دسته بندی های این نوع از معادلات را معرفی کنیم. اولین دسته بندی که در اینجا به آن اشاره می شود خطی یا غیر خطی بودن این معادلات می باشد.

تعریف ۳.۱ یک معادله انتگرال را خطی گوییم، هرگاه عملگرهای اعمال شده روی تابع مجهول، خطی باشند؛ در غیر این صورت آن را غیر خطی گوییم[۳, ۱۰, ۱۲, ۱۶].

مثال ۲.۱ معادلات (۱.۱)و (۲.۱) معادلات انتگرال خطی هستند و معادله (۳.۱) معادله انتگرال غیرخطی می باشد.

بر حسب ثابت یا متغیر بودن کران بالای انتگرال، دسته بندی دیگری شامل این نوع از معادلات می شود. در این دسته بندی معادلات انتگرال را به سه نوع عمده تقسیم می کنیم [۳, ۱۰, ۱۲, ۱۶].
۱)معادله انتگرال فردهلم: چنانچه در معادله انتگرال، کران بالای انتگرال عددی ثابت باشد، آن را معادله انتگرال فردهلم می نامیم. فرم کلی معادلات انتگرال فردهلم خطی به صورت زیر است :

$$h(x)y(x) = x(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)y(t)dt; \qquad a \leq t \leq b, \tag{۶.۱}$$

که در آن $x(x)$ ، $h(x)$ و$k(x,t)$ توابعی معلوم، $y(x)$ تابعی مجهول، a و b اعدادی ثابت $\lambda \neq 0$ عددی ثابت، حقیقی یا مختلط می باشد.

۲) معادله انتگرال ولترا: اگر در معادله انتگرال، کران بالای انتگرال متغیر باشد، آن را معادله انتگرال ولترا می نامیم. چنانچه در معادله (۶.۱) قرار دهیم $b = x$ فرم کلی معادلات انتگرال ولترا خطی به دست می آید.

۳) معادله انتگرال تکین یا منفرد: اگر حداقل یکی از حدود انتگرال گیری یعنی a یا b نامتناهی باشد، یا هسته در فاصله انتگرال گیری در نقطه یا نقاطی بی نهایت باشد، آن را معادله انتگرال تکین یا منفرد می نامیم.

همچنین هر یک از معادلات فوق به چهار دسته تقسیم می شوند.

۱) معادله انتگرال نوع اول: چنانچه در فرم کلی هر کدام از این معادلات $h(x) = 0$ باشد، معادله انتگرال خطی نوع اول آن حاصل می شود.

مثال ۳.۱ معادله انتگرال فردهلم خطی نوع اول به صورت زیر است:

$$x(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)y(t)dt = 0. \tag{۷.۱}$$

۲) معادله انتگرال نوع دوم: چنانچه در فرم کلی هر کدام از این معادلات $h(x) = 1$ باشد، معادله انتگرال خطی نوع دوم آن حاصل می شود.

مثال ۴.۱ معادله انتگرال فردهلم خطی نوع دوم به صورت زیر است:

$$y(x) = x(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)y(t)dt. \tag{۸.۱}$$

۳) معادله انتگرال نوع سوم: فرم کلی هر کدام از این معادلات، معادله انتگرال خطی نوع سوم آن است.

مثال ۵.۱ معادله (۶.۱)، معادله انتگرال فردهلم خطی نوع سوم می باشد.

۴) معادله انتگرال همگن: چنانچه در فرم کلی هر کدام از این معادلات $h(x) = 1$ و $x(x) = 0$ باشد، معادله انتگرال خطی همگن آن حاصل می شود.

مثال ۶.۱ معادله انتگرال فردهلم خطی همگن به صورت زیر است:

$$y(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)y(t)dt. \qquad (۹.۱)$$

۴.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

تعریف ۴.۱ اگر X یک فضای برداری روی میدان (حقیقی یا مختلط) F باشد، حاصل ضرب داخلی روی X، تابع $U : X \times X \to F$ است، به طوری که به ازای هر $\alpha, \beta \in F$ و $x, y, z \in X$ شرایط زیر برقرار باشند [۷]:

۱) $U(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ و $U(x,x) \geq 0$ ،

۲) $U(\alpha x + \beta y, z) = \alpha U(x,z) + \beta U(y,z)$ ،

۳) $U(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha} U(x,y) + \overline{\beta} U(x,z)$ ،

۴) $U(x,y) = \overline{U(y,x)}$.

که $\overline{U(x,y)}, \overline{\alpha}, \overline{\beta}$ مزدوج مختلط $U(x,y), \alpha, \beta$ هستند.

تذکر ۲.۱ ضرب داخلی دو بردار به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$U(x,y) = < x, y > . \qquad (۱۰.۱)$$

تعریف ۵.۱ فضای برداری H را روی میدان حقیقی F همراه با حاصل ضرب داخلی$< .,. >$ ،فضای هیلبرت می نامیم، هرگاه H نسبت به متر القا شده به وسیله نُرم $d(x,y) = \| x - y \|$ یک فضای متریک کامل باشد [۷] .

فضای L^2 متشکل از توابع پیوسته و اندازه پذیر است که انتگرال مربع آنها موجود هستند یعنی

$$L^2(a,b) = \left\{ f(t) | \int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty \right\}.$$

مثال ۷.۱ اگر $H = L^2(\mu)$ و $< f, g > = \int f\overline{g} d\mu$ باشد، همچنین نُرم القا شده را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\|f\| = (\int | f |^2 d\mu)^{1/2}, \qquad (۱۱.۱)$$

به کمک نظریه اندازه خواهیم داشت که $L^2(\mu)$ یک فضای هیلبرت است.

تعریف ۶.۱ تابع $f(t)$ را روی فاصله $[\circ,۱)$ به طور مربع انتگرال پذیر گوییم، هر گاه داشته باشیم:

$$\int_{\circ}^{۱} \mid f(t) \mid^{۲} dt < \infty. \tag{۱۲.۱}$$

قضیه ۱.۱ فرض کنیم تابع $f(t)$ روی فاصله $[\circ,۱)$ پیوسته و در فاصله $(\circ,۱)$ مشتق پذیر باشد و عدد حقیقی M وجود داشته باشد، به طوری که به ازای هر t متعلق به فاصله $[\circ,۱)$ ، $\mid f'(t) \mid\leq M$.در این صورت به ازای هر a و b متعلق به فاصله $[\circ,۱)$ داریم [۳۱]:

$$\mid f(b)-f(a) \mid\leq M \mid b-a \mid . \tag{۱۳.۱}$$

۵.۱ حل عددی دستگاه معادلات غیر خطی به روش نیوتن

در این روش برای حل عددی دستگاه معادلات غیر خطی $F(X)=\begin{bmatrix} f_۱(x_۱,...,x_n)\\ \vdots \\ f_n(x_۱,...,x_n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\circ\\ \vdots\\ \circ\end{bmatrix}$، فرض کنیم $\widehat{X}=[\widehat{x_۱},...,\widehat{x_n}]^T$، جواب دقیق این دستگاه است و حدس اولیه یعنی $X^{(\circ)}=[x_۱^{(\circ)},...,x_n^{(\circ)}]^T$، تقریبی نزدیک به$\widehat{X}$باشد (که در آن T ترانهاده ماتریس است). همچنین قرار می دهیم:

$$\widehat{X}-X^{(\circ)}=\begin{bmatrix}\widehat{x_۱}\\ \vdots\\ \widehat{x_n}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_۱^{(\circ)}\\ \vdots\\ x_n^{(\circ)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}h_۱\\ \vdots\\ h_n\end{bmatrix}=H. \tag{۱۴.۱}$$

حال برای بدست آوردن H از بسط تیلور توابع $f_i(\widehat{X}); i=۱,...,n$ حول $X^{(\circ)}$ استفاده می کنیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \circ=f_۱(\widehat{x_۱},...,\widehat{x_n})=f_۱(x_۱^{(\circ)}+h_۱,...,x_n^{(\circ)}+h_n)=f_۱(x_۱^{(\circ)},...,x_n^{(\circ)})\\ +h_۱\frac{\partial f_۱}{\partial x_۱}|_{X^{(\circ)}}+\cdots+h_n\frac{\partial f_۱}{\partial x_n}|_{X^{(\circ)}}+\cdots\\ \vdots\\ \circ=f_n(\widehat{x_۱},...,\widehat{x_n})=f_n(x_۱^{(\circ)}+h_۱,...,x_n^{(\circ)}+h_n)=f_n(x_۱^{(\circ)},...,x_n^{(\circ)})\\ +h_۱\frac{\partial f_n}{\partial x_۱}|_{X^{(\circ)}}+\cdots+h_n\frac{\partial f_n}{\partial x_n}|_{X^{(\circ)}}+\cdots \end{cases}, \tag{۱۵.۱}$$