

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی گرایش آنالیز تابعی

تعمیم اصول مرتب سازی و کاربردهای آن

استاد راهنما:

دکتر مجید فخار

استاد مشاور:

دکتر جعفر زعفرانی

پژوهشگر:

مهری ابوطالبی

مهرماه ۱۳۹۰

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و
نوآوری های ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه
متعلق به دانشگاه اصفهان است .

بسمه تعالی







دانشگاه اصفهان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش آنالیز خانم مهری ابوطالبی

تحت عنوان:

تعمیم اصول مرتب سازی و کاربردهای آن

در تاریخ ۹۰/۷/۲۷ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه بسیار خوب به تصویب نهایی رسید.

	با مرتبه علمی دانشیار	دکتر مجید فخار	۱- استاد راهنمای پایان نامه
	با مرتبه علمی استاد	دکتر جعفر زعفرانی	۲- استاد مشاور پایان نامه
	با مرتبه علمی دانشیار	دکتر صغری نوبختیان	۳- استاد داور داخل گروه
	با مرتبه علمی استادیار	دکتر علیرضا امینی هرنندی	۴- استاد داور خارج گروه

مهر و امضای مدیر گروه


خدایا تو را سپاس که مراد دایره امکان نهادی و نقش علم را بر دقت راندیشه ام کشیدی و چشمه ساز زلال دانش و معرفت را ارزانی داشتی تا در برهوت نادانی سیراب گردم و وجودم باشد.

و خالصانه ترین سپاس را برای خانواده عزیزم به خصوص پدر و مادرم که از کودکی، شور و دانستن و لذت جستجو را در من بیدار کردند و استقامت را به من آموختند، بر دستا نشان بوسه می زنم و بعد از خدا وجود مقدسشان را ستایش می کنم.

این مجموعه را مرهون راهبانی های استاد گرامی و بزرگوارم جناب آقای دکتر محمد فخاری دانم که فراتر از یک استاد راهبانه نهایت سگیایی مرا تشویق و راهبانی نموده اند. بر خود لازم می دانم از زحمات بی دریغ ایشان صادقانه سپاسگزاری کنم و از درگاه ایزد منان توفیقی روز افزون برای ایشان خواهانم.

از جناب آقای دکتر زعفرانی که افتخار ساگردی ایشان را دارم و الگویی بی نظیر از یک پژوهشگر و یک استاد فرهیخته در ذهن من حک نمودن بی نهایت سپاسگزارم.

زحمات استیداد و جناب آقای دکتر امینی حمندی و سرکار خانم دکتر نوبختیان ارج نهاده و از ایشان تشکر و قدردانی می کنم.

قدردان استاد محترم سرکار خانم دکتر رضایی که همواره الطاف خویش را از اینجانب دریغ نداشته اند، می باشم.

در پایان از گروه محترم ریاضی و تمامی دوستانی که در طول شکل گیری این پایان نامه مرایاری نمودند نهایت سپاس را دارم.

این اثر را تقدیم می‌کنم به: همه کسانی

پدرم

که نور وجودش روشنایی بخش راهم بود

ومادرم

که درس فداکاری به من آموخت

و تقدیم به تمام کسانی که دوستان دارم.....

چکیده

در این پایان نامه ابتدا اصل بریزیس_برودر را بیان می کنیم و سپس تعمیم هایی از این اصل را در فضاهای مرتب ثابت می کنیم و با استفاده از اصل بیان شده، قضیه وجود مینیمال قوی را در یک فضای شبه مرتب به دست می آوریم، که از آن برای اثبات قضیه وجود جواب قوی استفاده می شود و در ادامه مسأله بهینه سازی برداری مورد بررسی قرار می گیرد، که یکی از مهمترین روش ها در پیدا کردن نقاط مینیمال و ماکسیمال برای نگاشت های برداری مقدار است. یکی از ابزارهای مهم ریاضی که به طور ویژه، همراه با دستاوردهایش در مطالعه این بهینه سازی به کار گرفته می شود، مفهوم مخروط و اصول مرتب سازی است. پس از بیان اصول مرتب سازی، اصل تغییراتی اکلند را در فضاهای مرتب بیان می کنیم و در پایان قضیه های نقطه ثابت نظیر عملگرهای چندمقداری را ثابت می کنیم.

واژه های کلیدی: اصل تغییراتی اکلند، بهینه سازی برداری، ماکسیمال، مینیمال، مخروط، مرتب

فهرست مطالب

۱	تعاریف و مفاهیم اولیه	۱
۱	۱.۱ مروری بر مفاهیم توپولوژی	۱
۴	۲.۱ مروری بر مفاهیم آنالیز تابعی	۴
۶	۳.۱ فضاهای مرتب و مخروط	۶
۱۵	۲ تعمیم اصل بریزیس-برودر در فضاهای مرتب	۱۵
۱۶	۱.۲ مفاهیم مقدماتی	۱۶
۱۹	۲.۲ صورت‌هایی از تعمیم اصل بریزیس-برودر	۱۹
۳۲	۳.۲ وجود جواب‌های قوی	۳۲
۴۸	۳ اصل تغییراتی اکلند در فضاهای مرتب	۴۸
۴۹	۱.۳ اصل تغییراتی اکلند در فضاهای شبه مرتب	۴۹
۶۲	۲.۳ اصل تغییراتی اکلند برای نگاشت‌های چند مقداری	۶۲
۶۶	۳.۳ اصل تغییراتی اکلند در فضای توپولوژیکی از نوع \mathcal{F}	۶۶
۷۲	۴.۳ به دست آوردن اصول تغییراتی اکلند مبنی بر جواب‌های تقریبی	۷۲
۷۷	۴ قضیه‌های نقطه ثابت نظیر عملگرهای چندمقداری	۷۷

۷۸	مفاهیم اولیه	۱.۴
۷۹	قضیه نقطه ثابت از نوع مانچ	۲.۴
۸۷	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۹۰	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	
۹۳	مراجع	

پیشگفتار

امروزه پیدا کردن نقاط مینیمال و ماکسیمال از یک مجموعه در بسیاری از مسائل مطلوب می‌باشد. بهینه‌سازی برداری یکی از مفیدترین روش‌ها در پیدا کردن این نقاط برای نگاشت‌های برداری مقدار است. در سال ۱۹۷۶ بریزیس و برودر [۴] تحقیقات خود را برای نگاشت‌های حقیقی مقدار آغاز کردند، که ما در این پایان‌نامه اصل بریزیس-برودر^۱ را با شرایط ضعیف‌تر بیان می‌کنیم و در ادامه این اصل را در فضاهای مرتب تعمیم می‌دهیم. در سال ۱۹۷۲ اکلند، [۹] اصل تغییراتی اکلند^۲ (به اختصار EVP) اولیه را برای حل تقریبی مسائل مینیماکس غیرمحدب ثابت کرد، که مهمترین نتیجه به‌دست آمده در آنالیز غیرخطی است و کاربردهای مهمی در بهینه‌سازی، تئوری کنترل بهینه دارد و ما در این پایان‌نامه این اصل را در فضاهای مرتب با استفاده از اصل بریزیس-برودر و قضیه وجود نقاط مینیمال قوی ثابت می‌کنیم.

فصل اول شامل سه بخش می‌باشد. در بخش اول و دوم به بیان مفاهیم توپولوژی و آنالیز تابعی مورد نیاز در این پایان‌نامه می‌پردازیم. در بخش سوم ابتدا ترتیب و فضایی را که

^۱Brezis-Browder
^۲Ekeland

در آن کار می‌کنیم معرفی کرده و پس از آن به تعریف انواع مخروط می‌پردازیم.

در فصل دوم ابتدا اصل بریزیس-برودر را بیان می‌کنیم. در بخش دوم تعمیم‌هایی از اصل بیان شده را در فضاهاى مرتب ثابت می‌کنیم و در ادامه قضیه‌هایی در مورد اصول مرتب‌سازی که در تعمیم اصل بریزیس-برودر مورد استفاده قرار می‌گیرد، معرفی می‌کنیم.

در بخش سوم به معرفی یکی از مسائل بهینه‌سازی $OP(F, \leq)$ می‌پردازیم و به دنبال پیدا کردن نقاط مینیمال قوی برای مسأله $OP(F, \leq)$ هستیم.

در فصل چهارم اصل تغییراتی اکلند را در فضاهاى مرتب بیان می‌کنیم. در بخش اول مسأله بهینه‌سازی $OP((i, F), \leq_e)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم و اولین و دومین اصل تغییراتی اکلند در فضای شبه‌مرتب معرفی می‌شود. در بخش دوم این اصل را برای نگاشت‌های برداری چندمقداری ثابت می‌کنیم. در بخش سوم فضای مورد نظر، یک فضای توپولوژیکی از نوع \mathcal{F} می‌باشد و در ادامه در بخش چهارم هدف به‌دست آوردن اصول تغییراتی اکلند مبنی بر جواب‌های تقریبی برای مسأله بهینه‌سازی می‌باشد.

در فصل چهارم با استفاده از اصول مرتب‌سازی بیان شده در فصل‌های قبلی قضیه‌های نقطه ثابت نظیر عملگرهای چندمقداری را ثابت می‌کنیم.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل ما به ارائه برخی از تعاریف، قضایا و نتایج مورد نیاز در این پایان‌نامه می‌پردازیم. لازم به ذکر است که در این فصل از منابع [۴، ۶، ۷، ۱۰، ۱۲، ۱۳، ۱۶، ۱۷، ۱۸] استفاده شده است.

۱.۱ مروری بر مفاهیم توپولوژی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه غیرتهی باشد و تابع $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ در این صورت دامنه و نمودار تابع f به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\text{dom} f := \{x \mid f(x) < \infty\},$$

$$\text{Graph} f := \{(x, f(x)) \mid x \in \text{dom} f\}.$$

تعریف ۲.۱.۱. تابع $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ را سره گویند، هرگاه $x \in X$ ای موجود باشد

که $f(x) < \infty$ ، به عبارت دیگر $dom f \neq \emptyset$.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید X, Y دو مجموعه ناتهی باشند. نگاشت $F : X \rightarrow 2^Y$

را یک نگاشت مجموعه مقدار گویند، که در آن 2^Y ، تمام زیرمجموعه‌های Y را نشان

می‌دهد.

مجموعه‌ی $dom F := \{x \in X \mid F(x) \neq \emptyset\}$ دامنه F ، $Im F := \bigcup_{x \in X} F(x)$ برد F و

مجموعه‌ی $Graph F := \{(x, y) \mid y \in F(x)\}$ نمودار F را مشخص می‌کنند.

تعریف ۴.۱.۱. اگر (M, d) یک فضای متریک و $F : M \rightarrow 2^M$ یک نگاشت

مجموعه مقدار باشد، آن‌گاه نقطه‌ی $x_0 \in M$ را یک نقطه‌ی ثابت برای نگاشت F

گویند، هرگاه $x_0 \in F(x_0)$.

تعریف ۵.۱.۱. زیرمجموعه A از فضای برداری X را محدب گویند، هرگاه برای هر

$x, y \in X$ و هر $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in A.$$

تعریف ۶.۱.۱. یک فضای متری را تفکیک‌پذیر گویند، هرگاه شامل زیرمجموعه‌ی

چگال شمارش‌پذیری باشد.

قضیه ۷.۱.۱. هر زیرفضای یک فضای متریک تفکیک‌پذیر، تفکیک‌پذیر می‌باشد.

□

اثبات. به [۷] رجوع کنید.

تعریف ۸.۱.۱. یک ساختار یکنواخت در یک مجموعه X عبارت است از خانواده E

از زیرمجموعه‌های $X \times X$ به طوری که

(۱) اگر $V \in E$ ، آن‌گاه $\Delta \subset V$ ، که در آن Δ نمایش دهنده قطر است،

(۲) اگر $V_1, V_2 \in E$ ، آن‌گاه $W \in E$ وجود دارد به قسمی که $W \subset V_1 \cap V_2$ ،

(۳) اگر $V \in E$ و $V \subset W$ ، آن‌گاه $W \in E$ ،

(۴) اگر $V \in E$ ، آن‌گاه $W \in E$ وجود دارد به طوری که $W \circ W^{-1} \subset V$.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژیکی باشد. به طوری که توپولوژی آن

توسط خانواده‌ای از شبه‌متریک $\{d_\alpha\}_{\alpha \in (0,1]}$ تعیین شود. در این صورت X را یک فضای

توپولوژیکی از نوع \mathcal{F} گویند، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

(۱) برای هر $\alpha \in (0, 1]$ ، $d_\alpha(x, y) = 0$ اگر و فقط اگر $x = y$

(۲) برای هر $\alpha \in (0, 1]$ و هر $x, y \in X$ ، $d_\alpha(x, y) = d_\alpha(y, x)$

(۳) برای هر $\lambda \leq \alpha$ و هر $x, y \in X$ ، $d_\alpha(x, y) \leq d_\lambda(x, y)$

(۴) برای هر $\alpha \in (0, 1]$ ، $\lambda \in (0, 1]$ موجود است که $\lambda \leq \alpha$ و برای هر $x, y, z \in X$

$$d_\alpha(x, y) \leq d_\lambda(x, z) + d_\lambda(z, y).$$

تعریف ۱.۰.۱.۱. فضای X را فضای توپولوژیکی قوی از نوع \mathcal{F} گویند، هرگاه در شرایط (۱) و (۲) و (۳) تعریف قبل صدق کند و همچنین رابطه زیر برقرار باشد.

$$d_\alpha(x, y) \leq d_\alpha(x, z) + d_\alpha(z, y), \quad \forall x, y, z \in X \quad \forall \alpha \in (0, 1].$$

مثال ۱.۱.۱.۱. هر فضای متریک، یک فضای توپولوژیکی از نوع \mathcal{F} است.

۲.۱ مروری بر مفاهیم آنالیز تابعی

تعریف ۱.۲.۱. فضای (X, τ) را یک فضای برداری توپولوژیکی (TVS) گویند، هرگاه X یک فضای برداری روی میدان \mathbb{F} و τ یک توپولوژی روی X باشد به طوری که

$$(1) \quad (x, y) \rightarrow x + y \quad \text{یک تابع پیوسته از } X \times X \text{ به } X \text{ باشد،}$$

$$(2) \quad (t, x) \rightarrow tx \quad \text{یک تابع پیوسته از } \mathbb{F} \times X \text{ به } X \text{ باشد.}$$

به عنوان مثال فضاهای نرم دار مثل \mathbb{R}^n و \mathbb{C}^n و $\mathbb{C}(X)$ (فضای توابع پیوسته روی X) همگی با توپولوژی حاصل از نرمشان یک (TVS) به ما می دهند.

تعریف ۲.۲.۱. فضای برداری توپولوژیکی (X, τ) را موضعاً محدب (LCS) گویند، هرگاه (X, τ) دارای یک پایه از همسایگی های مجموعه های محدب حول صفر باشد.

تعریف ۳.۲.۱. هرگاه X یک فضای برداری توپولوژیکی باشد. منظور از یک تابع خطی یک نگاشت خطی از X به میدان اسکالر است. فضای تمام تابع های خطی و پیوسته روی X را دوگان X می نامند و با X^* نشان می دهند.

تعریف ۴.۲.۱. یک نیم‌نرم روی فضای برداری X یک تابع $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$ است به طوری که

$$(۱) \quad \text{برای هر } x \in X, \|x\| \geq 0,$$

$$(۲) \quad \text{برای هر } x \in X \text{ و هر } t \in F, \|tx\| = |t| \|x\|,$$

$$(۳) \quad \text{برای هر } x, y \in X, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

یک نیم‌نرم، نرم نامیده می‌شود، هرگاه این شرط اضافه شود که $\|x\| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$.

قضیه ۵.۲.۱. اگر (X, τ) یک فضای LCS و \mathcal{P} خانواده تمام نیم‌نرم‌های پیوسته روی X باشد، آنگاه $\tau = \sigma(X, \mathcal{P})$ که ضعیف‌ترین توپولوژی روی X است به طوری که نیم‌نرم‌های $p \in \mathcal{P}$ پیوسته باشد.

□ **اثبات.** به [۱۷] رجوع کنید.

قضیه ۶.۲.۱. فرض کنید K زیرمجموعه بسته و محدب از یک فضای موضعاً محدب و هاسدورف X باشد و $x \notin K$. در این صورت $x^* \in X^*$ وجود دارد به طوری که

$$\operatorname{Re}\langle x^*, x \rangle > \sup\{\operatorname{Re}\langle x^*, y \rangle : y \in K\}.$$

□ **اثبات.** به [۱۷] رجوع کنید.

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژی و $E \subset X$

- (a) E را فشرده نسبی گویند، هرگاه \bar{E} فشرده باشد،
- (b) E را فشرده شمارشی مشروط گویند، هرگاه هر دنباله در E دارای نقطه تجمع باشد،
- (c) E را فشرده دنباله‌ای مشروط گویند، هرگاه هر دنباله در E دارای یک زیردنباله‌ی همگرا باشد.

قضیه ۱.۸.۲.۱. اگر X یک فضای نرم‌دار خطی باشد، آن‌گاه a, b, c از تعریف قبل برای توپولوژی ضعیف معادلند.

اثبات. به [۱۷] رجوع کنید. \square

۳.۱ فضاهای مرتب و مخروط

نظر به این‌که نتایج به دست آمده از این پژوهش، در یک فضای مرتب ارائه گردیده است، لذا در ادامه ابتدا به تعریفی از این فضا می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱.۳.۱. فرض کنید X یک مجموعه غیرتهی باشد.

(الف) هر زیرمجموعه غیرتهی R از مجموعه $X \times X$ یک رابطه دوتایی R روی X نامیده می‌شود.

(ب) هر رابطه دوتایی \leq روی X ، یک ترتیب جزئی روی X نامیده می‌شود، هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

$$(۱) \quad x \leq x, \quad x \in X$$

(۲) برای هر $x, y \in X$ ، اگر $x \leq y$ و $y \leq x$ ، آن گاه $x = y$ ،

(۳) برای هر $x, y, z \in X$ ، اگر $x \leq y$ و $y \leq z$ ، آن گاه $x \leq z$.

اگر رابطه دوتایی \leq روی X ، فقط در شرط (۱) و (۳) صدق کند، آن گاه رابطه \leq یک شبه‌ترتیب روی X معرفی می‌کند و هرگاه فقط در شرط (۳) صدق کند رابطه \leq یک پیش‌ترتیب روی X معرفی می‌کند.

تعریف ۲.۳.۱. یک ترتیب جزئی \leq روی مجموعه X ، ترتیب کلی است اگر و فقط اگر برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $x \leq y$ یا $y \leq x$.

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنید \mathcal{E} یک مجموعه غیرتهی و $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ یک تابع باشد. در این صورت $(\mathcal{E}, +, \preceq)$ را پیش‌ترتیب مگما^۱ با عنصر صفر گویند، هرگاه (\mathcal{E}, \preceq) دارای خاصیت تعدی باشد و در شرط زیر صدق کند:

$$(1.1) \quad y, y_1, y_2 \in \mathcal{E}, \quad y_1 \preceq y_2 \implies y + y_1 \preceq y + y_2, \quad y_1 + y \preceq y_2 + y$$

به‌علاوه برای هر $y \in \mathcal{E}$ و $\circ_{\mathcal{E}} \in \mathcal{E}$ داشته باشیم

$$y + \circ_{\mathcal{E}} = \circ_{\mathcal{E}} + y = y.$$

اکنون به معرفی ابزار اصلی پژوهش‌مان یعنی مخروط و انواع مختلف آن می‌پردازیم.

تعریف ۴.۳.۱. زیرمجموعه D از فضای برداری X را یک مخروط گویند، هرگاه برای

$$\text{هر } \circ \geq 0, \lambda D \subseteq D,$$

^۱preordered magma

تعریف ۵.۳.۱. مخروط D را محدب گویند، هرگاه برای هر $\lambda \geq 0$

$$D + D \subseteq D \quad (۱)$$

به طور معادل، اگر برای هر $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ و $y_1, y_2 \in D$ داشته باشیم

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in D.$$

تعریف ۶.۳.۱. مخروط محدب D را نوکدار نامند، هرگاه $D \cap (-D) = \{0\}$.

مثال ۷.۳.۱. اگر $X = \mathbb{R}^n$ ، آن گاه زیرمجموعه‌ی

$$D := \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 ; \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}\} = \mathbb{R}_+^n.$$

یک مخروط نوکدار محدب در \mathbb{R}^n است.

مثال ۸.۳.۱. فرض کنید X یک فضای برداری دلخواه و مجموعه D به صورت

$$D := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = f(-x) \quad \forall x \in X\}$$

باشد. در این صورت D در فضای برداری مجموعه توابع پیوسته یک مخروط محدب

است ولی نوکدار نیست.

تعریف ۹.۳.۱. فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیکی و $D \subset X$ یک مخروط

محدب باشد. در این صورت مخروط مثبت و مثبت اکید را به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D^+ := \{\zeta \in X^* : \zeta(d) \geq 0, \forall d \in D\},$$

$$D^{+S} := \{\zeta \in X^* : \zeta(d) > 0, \forall d \in D \setminus \{0\}\}.$$

تعریف ۱۰.۳.۱. فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیکی و $D \subset X$ مخروط محدب و غیرتهی باشد و X به صورت زیر مرتب شده باشد.

$$x \leq_D y \iff y - x \in D \quad \forall x, y \in X.$$

در این صورت فضا را با (X, D) نمایش می دهند و آن را فضای برداری توپولوژیکی مرتب شده به وسیله مخروط D گویند.

برای مثال اگر $X = \mathbb{R}^n$ ، آن گاه زیرمجموعه‌ی

$$D := \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 ; \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}\} = \mathbb{R}_+^n.$$

یک مخروط نوکدار محدب بسته در \mathbb{R}^n است که به وسیله آن می توان رابطه‌ی ترتیب جزئی \leq را تعریف کرد و آن را مخروط ترتیب طبیعی روی \mathbb{R}^n می نامند.

تعریف ۱۱.۳.۱. فرض کنید (X, τ) یک فضای برداری توپولوژیکی و $D \subset X$ یک مخروط محدب باشد. در این صورت مخروط $D \subset X$ را (نسبت به توپولوژی τ) نرمال گویند، هرگاه $(x_i)_{i \in I}$ و $(y_i)_{i \in I}$ دو تور دلخواه در D باشند به قسمی که برای هر $i \in I$

$$\lim_{i \in I} y_i = 0, \quad 0 \leq_D x_i \leq_D y_i,$$

$$\lim_{i \in I} x_i = 0$$

آن گاه داشته باشیم

مثال ۱۲.۳.۱. فرض کنید X یک فضای موضعاً محدب هاسدورف و $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ مجموعه‌ای مستقل خطی از X باشد. در این صورت

$$D = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : \lambda_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \right\}.$$