بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه علم وصنعت ایران
دانشکده ریاضی

گرافهای کیلی نرمال از گروههای متناهی

مرجان جمشیدی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی محض

استاد راهنما:
دکتر مهدی علا ئیان

مهر۱۳۸۳

تقدیم به گلهاي زندگیم

پدرم، مادرم، برادار و خواهرم

تقدیر و تشکر

سپاس پروردگارجهانیان را که موهبت تعلم به من ارزانی داشت تا با بهره‌گیـری از فـروغ حکمـت بزرگـان میدان دانش خویش را روشن بینم و در پرتو اندیشه‌های والای آن فرزانگان قدمی هرچند کوتاه پیش‌نهم.

اکنون که این رساله به پایان رسیده‌است برخود لازم می‌دانم که از استاد ارجمندم **جناب آقای دکتر مهـدی علائیان** که با راهنمائیهای ارزنده و دلسوزانه‌اشان مرا در انجام هر چه بهتر پایـان‌نامـه یـاری نمودنـد کمـال تشکر وقدردانی را بنمایم.

از استاد مشاور **جناب آقای دکترحمید تولایی** و داوران محترم **جناب آقای دکتـر محمـد رضـا درفـشه وسرکار خانم زهره مستقیم** کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از **سرکار خانم یوسفی** کارشناس تحصیلات تکمیلی **وسـرکار خـانم کردبچـه** مـسئول محتـرم کتابخانـه دانشکدهٔ ریاضی به خاطر زحمات و مساعدتهای بی‌دریغشان کمال تشکر وقدردانی را دارم.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فهرست جداول

فهرست شکلها

فهرست نمادها

اثر g روی Ω	Ω^g
اعداد اول	$p, q, \ldots$
اعداد صحیح	$m, n, i, j, \ldots$
اندیس H در G	$\lvert G:H \rvert$
اندیس کیلی گروه G	$c(G)$
بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک $q-1$ و n	$gcd(q-1, n)$
پایدارساز عنصر a درگروه G	G_a
پایدارساز رأس a در اتومورفیسم گراف X	$A_a(X)$
تفاضل i و j بوسیلهٔ n شمرده می‌شود	$i \equiv j (\bmod n)$
تفاضل گروه های H و G	$G \setminus \mathrm{H}$
حاصاضرب مستقیم n کپی از G	G^n
حاصلضرب حلقوی G با H	$G\, Wr\, H$
حاصلضرب مستقیم گروه‌های H و K	$H \times K$
حاصلضرب ترکیبی دو گراف X_1 و X_2	$X_1[X_2]$
حاصلضرب نیم مستقیم گروه‌های H و K	$H \times K$
زیرگروه مشخصهٔ H از G	$H \lhd^C G$
زیرگروه نرمال H از G	$H \lhd G$

زیرگروه(واقعی) H از G	$H \leq G \ (H < G)$
عناصر یک گروه یا رئوس یک گراف	$a, b, c, \ldots$
فاصلهٔ x از y	$d(x, y)$
عنصر همانی گروه G	1_G
کلاس هم ارزی شامل x	$[x]$
گروهها	$G, H, \ldots$
گراف	$X, X(V, E)$
گراف دوبخشی	$K_{a,b}$
گروه متقارن روی n حرف	S_n, Σ_n
گروه متناوب روی n حرف	A_n
گراف کامل با n رأس	K_n
گروه متقارن روی G	$Sym(G)$
گروه دووجهی از مرتبهٔ $2n$	D_{2n}
گروه تولید شده بو سیلهٔ a, b	$\langle a, b \rangle$
گراف دور با n رأس	C_n
گروه خودریختی‌های G و X	$Aut(X), Aut(G)$
گروه خطی عمومی	$GL(n, F), GL(n, q)$
گروه خطی خاص	$SL(n, F)$

گروه خطی عام تصویری و خاص تصویری	$PGL(n,F), PSL(n,F)$
گراف نردبانی با $2h$ رأس	L_h
گراف کیلی G نسبت به S	$Cay(G,S)$
گروه آفین	$AGL(1,p)$
گروه شبه خطی	$TL(n,F)$
گروه شبه خطی تصویری	$\frac{TL(n,F)}{Z}$
گروه دوری از مرتبهٔ m, $Z_m \setminus \{0\}$	$Z_m,\ Z_m^*$
گروه کواترنیون از مرتبه ۸	Q_8
مجموعهٔ اعداد صحیح ،اعداد گویا ،تهی	Z,Q,ϕ
مدار G شامل x	$x^G, Orb_G(x)$
مجموعه رئوس مجاور با رأس a درگراف X	$X(a)$
مجموعه رئوس و یالهای گراف X	$V(X),E(X)$
مجموعهٔ تمام اتومورفیسم های گروه G که S را ثابت نگه می‌دارند	$Aut(G,S)$
مجموعهٔ تمام اتومورفیسم های گراف X که 1_G را ثابت نگه می‌دارند	$A_1, A_1(X)$
مرکزساز H در G	$C_G(H)$
مرکز G	$Z(G)$

مجموعهٔ تمام اعداد طبیعی کوچکتر از m که نسبت به آن متباین‌اند	U_m
نرمال‌ساز H در G	$N_G(H)$
نمایش منظم راست G	$R(G)$
نمایش منظم چپ G	$L(G)$
یکریختی بین H و K	$H \cong K$

چکیده

گراف کیلی(جهتدار) $X = Cay(G,S)$ را نرمال می‌گوییم هرگاه $R(G) \triangleleft Aut(X)$ باشد که $R(G)$ نمایش منظم راست G است. هرگاه G دارای یک زیرمجموعهٔ S باشد به‌طوریکه گراف کیلی(جهتدار) $X = Cay(G,S)$ نرمال باشد آنگاه گروه G را دارای گراف کیلی(جهتدار) نرمال گوئیم.

در این پایان‌نامه ثابت می‌کنیم که هرگروه متناهی G دارای گراف کیلی نرمال است مگر اینکه $G \cong Z_4 \times Z_2$ یا $G \cong Q_8 \times Z_2^r$ $(r \geq 0)$. وهمچنین ثابت می‌کنیم که هرگروه متناهی G دارای گراف کیلی جهتدار نرمال است.

مقدمه

فرض کنید G یک گروه متناهی و S زیرمجموعهٔ ناتهی از آن باشد به‌طوریکه $1_G \notin S$. در اینصورت گراف کیلی(جهتدار) G نسبت به S گرافی مانند $X = Cay(G,S)$ است به‌طوریکه رأ سهای گراف X همان اعضای گروه G هستند و یالهای آن عبارتند از

$$E(X) = \{(g,h); hg^{-1} \in S\}$$

گراف کیلی (جهتدار) $X = Cay(G,S)$ را نرمال می‌گوئیم هرگاه $R(G) \lhd Aut(X)$.

گروه G را دارای گراف کیلی(جهتدار) نرمال گوئیم هرگاه G دارای زیرمجموعه‌ای چون S باشد به طوریکه $X = Cay(G,S)$ نرمال باشد.

دراین پایان‌نامه و در فصل اول به تعاریف و قضایای مقدماتی در نظریهٔ گروهها می‌پردازیم و در فصل دوم گراف، اتومورفیسم گراف، گرافهای کیلی واتومورفیسم گرافهای کیلی را مطرح کرده و درفصل سوم نرمال بودن گرافهای کیلی را مورد بررسی قرار می‌دهیم و در فصل چهارم که کار اصلی ما دراین پایان نامه می‌باشد به این سؤال پاسخ داده می‌شود که آیا هرگروه متناهی G دارای گراف کیلی(جهتدار) نرمال است.

درمورد رده‌بندی گرافهای نرمال تاکنون کارهای متعددی انجام شده است. از میان آنها می‌توان به رده‌بندی گرافهای نرمال روی گروههای آبلی توسط Y.G.Baik,H.S.Sim,M.Y.Xu,Y.Q.Feng درسال ۱۹۹۷ و بعد از آن روی گروههای آبلی متناهی از ظرفیت پنج توسط Y.Q.Feng,Y.G.Baik درسال ۱۹۹۸ اشاره کرد و همچنین M.Y.Xu دراین زمینه مثالهای متعددی را نیز در [4] بیان نموده است.

فصل اول

تعاریف و قضایای
مقدماتی

تعاریف وقضایای مقدماتی

در این فصل مفاهیم، تعریفها و قضایایی از نظریهٔ گروهها که در فصلهای آتی استفاده می شوند را بیان می‌کنیم. بعضی از قضایا را بدون برهان ذکر کرده‌ایم زیرا برهان این قضایا در بیشتر کتابهای مربوط به نظریهٔ گروهها موجود است و علاقه‌مندان می‌توانند جهت ملاحظهٔ برهان به مراجع مورد اشاره مراجعه نمایند.

۱-۱-گروههای جایگشتی

۱.۱.۱ تعریف:

یک عمل * از یک گروه Gروی یک مجموعهٔ Ω نگاشتی مانند $* : \Omega \times G \to \Omega$ است به‌طوریکه

الف) برای هر $\alpha \in \Omega$ ، $(\alpha, 1_G)* = \alpha$

ب) برای هر $\alpha \in \Omega$ و هر $g_1, g_2 \in G$ ، $((\alpha, g_1)*, g_2)* = (\alpha, g_1 g_2)*$

دراین پایان‌نامه ما به جای نماد (α, g) از نماد α^g استفاده خواهیم کرد.

۱. ۱. ۲ مثال:

فرض کنید G یک گروه باشد.دراینصورت G روی خودش با ضابطهٔ ضرب از طرف راست $\alpha^g = \alpha g$ عمل می‌کند که این عمل را یک عمل طبیعی گروه G روی خودش می‌گوئیم.

۱. ۱. ۳ مثال:

هر گاه G یک گروه باشد و روی خودش با ضابطهٔ $\alpha^g = g^{-1}\alpha g$ عمل کند آنگاه این عمل را ، عمل تزویج می‌گوئیم.

۴.۱.۱ تعریف:

می‌گوئیم گروه G روی یک مجموعهٔ Ω به طور انتقالی عمل می‌کند هرگاه داشته باشیم

$$\forall \alpha,\beta \in \Omega\,,\ \exists g \in G \quad s.t \quad \alpha^{g} = \beta$$

۱ .۱ .۵ تعریف:

فرض کنید گروه G روی مجموعهٔ Ω عمل کند و فرض کنید که $x \in \Omega$ دلخواه باشد در اینصورت مدار G شامل x عبارتست از مجموعه $\{x^{g}\,;\, g \in G\}$ و با نماد x^{G} یا $Orb_{G}(x)$ نشان می‌دهیم.

۶.۱.۱ تعریف:

فرض کنیدگروه G بر مجموعهٔ Ω عمل کند و $x \in \Omega$. در اینصورت مجموعهٔ $\{g \in G; x^{g} = x\}$ را پایدارساز x در G می‌نامیم و آن را با علامت اختصاری G_{x} نشان می‌دهیم.

۷.۱.۱ قضیه:

فرض کنید یک گروه G روی مجموعهٔ Ω عمل کند و فرض کنید H یک زیر گروه انتقالی از G باشد. در اینصورت $G = HG_{\alpha}$ که در آن $\alpha \in \Omega$ است.

برهان: فرض کنید $\alpha \in \Omega, g \in G$ باشد. اگر $g \in G_{\alpha}$، آنگاه حکم ثابت است. در غیر اینصورت به ازای هر $g \in G$ یک $\beta \in \Omega$ $(\beta \neq \alpha)$ موجود است به‌طوریکه $\alpha^{g} = \beta$. چون H انتقالی است لذا وجود دارد یک $h \in H$ به‌طوریکه $\beta^{h} = \alpha$ و درنتیجه $\alpha^{gh} = \beta^{h} = \alpha$. پس $gh \in G_{\alpha}$ و لذا $g \in HG_{\alpha}$.

۱. ۸.۱ تعریف:

۱. فرض کنید G یک گروه متناهی و Ω یک مجموعه باشد. در اینصورت عمل G روی Ω را منظم می‌نامیم، هرگاه G روی Ω به طور انتقالی عمل کند و برای هر $x \in \Omega$ داشته باشیم $G_{x} = \{1_{G}\}$.

۲. هر گاه گروه G انتقالی بوده اما منظم نباشد و برای هر $x \neq y$ داشته باشیم $G_{xy} = \{1_G\}$ ، آنگاه گروه G را یک گروه فروبینیوس می‌گوییم.

۹.۱.۱ تعریف:

فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. برای هر $g \in G$ نگاشت $R_g : G \to G$ را با ضابطهٔ $R_g : x \to xg$ تعریف می‌کنیم، قرار می‌دهیم $R(G) = \{R_g ; g \in G\}$. براحتی می‌توان نشان داد $R(G)$ روی G منظم است و نگاشت $R : G \to R(G)$ با ضابطهٔ $R : g \to R_g$ یک ایزومورفیسم گروهها است.

متشابهاً برای $g \in G$ نگاشت $L_g : G \to G$ را با ضابطهٔ $L_g : x \to g^{-1}x$ تعریف می‌کنیم و قرار می‌دهیم $L(G) = \{L_g ; g \in G\}$. براحتی می‌توان نشان داد که $L(G)$ روی G منظم است و نگاشت $L : G \to L(G)$ با ضابطهٔ $L : g \to L_g$ یک ایزومورفیسم گروهها است.

به $R(G)$ و $L(G)$ به ترتیب نمایش منظم راست گروه G و نمایش منظم چپ گروه G می‌گوئیم.

۱۰.۱.۱ قضیه:

فرض کنید گروه G روی یک مجموعهٔ Ω به طور انتقالی عمل کند. اگر C مرکزساز گروه G در $Sym(G)$ باشد آنگاه

i) C انتقالی است اگر وتنها اگر G منظم باشد.

ii) اگر C انتقالی باشد آنگاه با گروه G در $Sym(G)$ مزدوج است و بنابراین C منظم است.

iii) اگر گروه G آبلی باشد آنگاه $C = G$ است.

برهان: به مرجع [7] مراجعه شود.

۱۱.۱.۱ قضیه:

فـرض کنیـد گـروه G روی یـک مجموعـهٔ Ω بـه طـور انتقـالی عمـل کنـد و $\alpha \in \Omega$ باشـد. اگـر نگاشـت $\psi : N \to Aut(G)$ کـه در آن $N = N_{Sum(G)}(G)$ اسـت باضـابطهٔ $\psi(x) : u \to x^{-1}ux$ یـک هم‌ریختی باشد و $\sigma \in Aut(G)$ باشد آنگاه

$\sigma \in Im\psi$ است اگروتنها اگر $(G_\alpha)^\sigma$ یک نقطهٔ پایدارساز برای گروه G باشد.

برهان: به مرجع [7] مراجعه شود.

۱. ۱. ۱۲ تعریف:

فرض کنید G یک گروه و Ω یک مجموعه باشـد. در اینـصورت نمـایش جایگـشتی از G روی Ω یـک هومورفیسم گروهی مانند λ از G به $Sym(G)$است. همچنین $Ker(\lambda)$ را هـسته نمـایش جایگـشتی و $\lambda(G)$ را گروه جایگشی G روی Ω می‌گوئیم.

۱. ۱۳.۱ تعریف:

فرض کنید گروههای G_2, G_1 به ترتیب روی Ω_2, Ω_1 عمل کنند. دو عمل را هـم ارز گـوئیم هرگـاه یـک یکریختی مانند $\varphi : G_1 \to G_2$ و نگاشت دوسویی $\mu : \Omega_1 \to \Omega_2$ موجود باشند به‌طوریکـه بـرای هـر $g_1 \in G_1$ و $w_1 \in \Omega_1$ داشته باشیم.

$$\left(w_1^{g_1}\right)\mu = \left(w_1\mu\right)^{(g_1\varphi)}$$

۱. ۱. ۱٤ تعریف:

فرض کنید گروه G روی مجموعه Ω عمل کند. اگر برای $\alpha \in \Omega$ و $g \in G$ داشته باشیم $\alpha^g = \alpha$ آنگاه می‌گوئیم g، α را ثابت نگه می‌دارد و به مجموعه عناصری از G که هر $\alpha \in \Omega$ را ثابت نگـه مـی دارنـد هسته عمل می‌گوئیم و اگر هسته فقط شامل عنصر همانی گروه G باشد عمل را صادقانه می‌نامیم.

۱. ۱۵.۱ قضیه (قضیه کوشی):

اگر G یک گروه متناهی و p یک عدد اول باشد به‌طوریکه $p\|G|$ ، آنگاه G حداقل یک عضو از مرتبه p دارد.

۱. ۱٦.۱ تعریف:

فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان K باشد رابطه هم ارزی $\equiv$ را برروی $V^* = V - \{0\}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$x \equiv y \Leftrightarrow \exists \lambda \in K^* \quad \text{s.t} \qquad y = \lambda x (x, y \in V^*)$$

و همچنین $[x]$ را به فرم زیر تعریف می‌کنیم

$$[x] = \{y : x \equiv y\}$$

و $[x]$ را کلاس هم ارزی شامل x می‌گوئیم.

۱. ۱۷.۱ تعریف:

فرض کنید V یک فضای برداری و W یک زیر فضای V باشد و $[w] = \{[x]; x \in w^*\}$. هر گاه W دارای بعد از اندازه $m+1$ باشد آنگاه مجموعهٔ $[w]$ را زیر فضای تصویری از بعد m می‌گوئیم.

در حالتهای خاص $m = 0,1,2$ ، $[w]$ به ترتیب نقاط تصویری، خطوط تصویری و صفحات تصویری می‌باشد و زیر فضای تصویری از بعد $n-1$، از یک فضای تصویری از بعد n را ابرصفحه تصویری می‌گوئیم.