دانشگاه لرستان

دانشکده علوم پایـه

گروه ریاضی

توصیف مجموعه های جواب مسئله های محدب و نامساوی تغییراتی

نگارش :

الهام نیکوراد

استاد راهنما:

دکتر علی بارانی

استاد مشاور:

دکتر ناصر عباسی

پایان نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی

بهمن ۱۳۹۰

نام خانوادگی : نیکوراد **نام :** الهام

عنوان پایان‌نامه : توصیف مجموعه های جواب مسائل محدب و نامساوی تغییراتی

استاد راهنما: دکتر علی بارانی **استاد مشاور :** دکترناصر عباسی

درجه تحصیلی : کارشناسی ارشد **رشتهٔ :** ریاضی محض گرایش آنالیز

محـل تحصیل : دانشگاه لرستان **دانشکده :** علوم پایه

تاریخ فارغ التحصیلی : بهمن ماه ۱۳۹۰ **تعداد صفحه:۸۰**

کلید واژه ها: برنامه‌ی محدب، مشتق گتو، نامساوی تغییراتی، تابع مرحله ای دوگان، شبه یکنوایی .

چکیده: برای یک مسئله ی محدب در یک فضای برداری نرم دار با یک تابع هدف، مشتق گتو در یک جواب بهینه تعیین می شود.

در این پایان نامه نشان خواهیم داد که مجموعه جواب شامل نقاط شدنی در ابر صفحه ای است که در آن ابر صفحه، بردار نرمال مساوی مشتق گتو است. برای یک مسئله ی محدب پیوسته، یک نقطه ی شدنی، یک جواب بهینه است اگر و فقط اگر آن نقطه ی شدنی در ابر صفحه ای قرار باشد که بردار نرمال به زیر دیفرانسیل تابع هدف در این نقطه متعلق باشد.

در چندین مورد، مجموعه جواب یک مسئله ی نامساوی تغییراتی بوسیله ی مجموعه جواب یک مسئله ی محدب با تابع مرحله ای دوگان به عنوان تابع هدف نشان داده می شود.

فهرست مندرجات

۱ تعاریف و مفاهیم ۳

۱—۱ تعاریف اولیه ۴

۱—۲ معرفی برخی از زیردیفرانسیل‌ها ۱۴

۱—۳ یکنوایی ۲۰

۲ مشخصه سازی مجموعه جواب با داشتن یک نقطه مشتق پذیر گتو ۲۳

۲—۱ مشخصه سازی مجموعه جواب توابعی که لزوماً محدب نیستند. ۲۴

۲—۲ مشخصه سازی مجموعه جواب یک تابع محدب سره ۳۴

۳ مشخصه سازی مجموعه جواب برای توابع پیوسته ۴۰

۳—۱ مشخصه سازی مجموعه جواب توابعی که لزوماً مشتق پذیر گتو نیستند. ۴۱

۳-۲ مشخصه سازی برای جواب های مسئله ی محدب پیوسته ۴۷

۴ مشخصه سازی مجموعه جواب برای مسئله نامساوی تغییراتی ۵۵

۴-۱ مقدمه ۵۶

۴-۲ رابطه ی $G(x)$ و $\Lambda(x)$ با مشتق پذیری گتو ۵۷

۴-۳ رابطه ی C^* و C_* با مشتق پذیری گتو ۶۶

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۷۶

واژه نامه انگلیسی به فارسی ۷۶

کتاب نامه ۷۷

مقدمه

مانگاساریان [1] در [۲۲] ثابت کرده است
برای یک مسئله محدب

$$min\{f(x) : x \in C\}.$$

که C یک مجموعه محدب روی $I\!R^n$ و f نیز تابعی محدب روی $I\!R^n$ باشد، اگر f، دو بار به طور پیوسته روی یک مجموعه محدب باز شامل C مشتق پذیر باشد، مجموعه جواب با یک گرادیان ثابت از f، و اگر f پیوسته و درون نسبی مجموعه جواب نا تهی باشد، با زیر گرادیان f، به طور کامل می تواند مشخصه سازی شود.
مطابق با طبیعت مجموعه جواب یک مسئله محدب، با بررسی چندین مدل مسئله بهینه سازی مهم می توانیم بیشتر به عمق این مطلب پی ببریم. [۴].
اما مطالب بالا را نمی توان برای یک مسئله محدب به طور کلی نتیجه گرفت. در موارد ناهموار، وقتی که جی کومار [2] در [۱۴] نتیجه مانگاساریان را برای تابع محدب نیمه پیوسته پایینی f روی فضای باناخ با شرایط کلی تر بررسی می کرد، بورک [3] و فریز [4] در [۴] مشخصه سازی دیگری از مجموعه جواب را ارائه کردند.
حتی برای یک مسئله نیمه خطی، نتیجه مانگاساریان یک بیان جالب دارد. [۱۵].
در این پایان نامه، مقاله

---

[1] Mangasarian
[2] Jeyakumar
[3] Burke
[4] Ferris

Wu, Z. L., and Wu, S. Y., Characterizations of the Solution Sets of Convex Programs and Variational Inequality Problems, Communicated by Yang, X. Q., Published Online: 6 December 2006.

مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است.

هدف از این پایان نامه، مشخصه سازی مجموعه جواب یک مسئله محدب روی یک فضای برداری نرم دار است. البته اگر f در یک جواب بهینه مشتق پذیر گتو باشد. هم چنین نتیجه مانگاساریان را برای یک مسئله محدب پیوسته روی فضای باناخ بدون در نظر گرفتن نا تهی بودن نقاط درونی مجموعه جواب بیان خواهیم کرد. با استفاده از این نتیجه های کلی و بحث هایی در این مورد، مجموعه جواب یک مسئله نامساوی تغییراتی در مرحله ای از تابع مرحله ای دوگان آن را زمانی که ممکن است مشتق پذیر یا پیوسته نباشد، می توانیم مشخصه سازی کنیم.

در فصل اول این پایان نامه، پس از یاد آوری مفاهیم مورد نیاز، برخی از زیر دیفرانسیل ها و یکنوایی به طور مختصر مورد بررسی قرار می گیرند.

در فصل دوم پس از تعریف مسئله نامساوی تغییراتی و دوگان آن به بیان رابطه آن با مسئله

$$min\{f(x) : x \in C\}.$$

در یک فضای برداری نرم دار می پردازیم.

هدف اصلی در فصل سوم مشخصه سازی مجموعه جواب یک مسئله محدب پیوسته در فضای باناخ X است.

در فصل چهارم به مشخصه سازی مجموعه جواب یک مسئله نامساوی تغییراتی با استفاده از رابطه بین تابع مرحله ای دوگان، $\Lambda(x)$، C^* و C_* با مشتق پذیری گتو می پردازیم.

الهام نیکوراد

بهمن ۱۳۹۰

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم

۱–۱ تعاریف اولیه

۱–۲ معرفی برخی از زیردیفرانسیل‌ها

۱–۳ یکنوایی

در این فصل پس از بیان تعاریف و مفاهیم مقدماتی، به طور اجمالی مروری بر انواع زیردیفرانسیل ها و مفهوم یکنوایی خواهیم داشت. همچنین قضایای مورد نیاز در این پایان نامه نیز ارائه خواهد شد.

۱—۱ تعاریف اولیه

تعریف ۱.۱ ابر صفحه ی H در $\mathbb{R}^n$ مجموعه نقاطی به شکل $\{x : p^T x = \alpha\}$ است به طوری که p برداری غیر صفر در R^n و α یک اسکالر باشد.

یادآوری می شود که فضای برداری حقیقی X را یک فضای خطی نرم‌دار نامیم، اگر به هر $x \in X$، یک عدد حقیقی نامنفی مانند $\| x \|$ که آن را نرم(هنج) x گویند چنان مربوط شده باشد که

۱) به ازای هر x و y در X داشته باشیم

$$\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$$

۲) اگر $x \in X$ و $\alpha \in R$ اسکالر باشد،آنگاه

$$\| \alpha x \| = |\alpha| . \| x \|$$

۳) اگر $x \neq 0$، آنگاه $\| x \| > 0$.

۴) $x = 0$ اگر و فقط اگر $\| x \| = 0$

هم چنین تابع حقیقی $d : X \times X \to R^+$ را یک متر روی مجموعه ی غیر تهی X گوییم، هرگاه برای هر $x, y, z \in X$، در شرایط زیر صدق کند:

۱) $x = y$ اگر و فقط اگر $d(x, y) = 0$.

۲) $d(x,y)=d(y,x)$.

۳) $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$.

مجموعه X را با متر d یک فضای متریک گوییم و آن را با (X,d) نمایش می‌دهیم. در هر فضای متریک گوی باز به مرکز x و شعاع δ عبارت است از مجموعه‌ی زیر

$$B_\delta(x)=\{y:d(x,y)<\delta\}.$$

هرگاه X یک فضای خطی نرم‌دار باشد، مجموعه‌ی

$$B=\{x:\parallel x\parallel\leq ۱\},$$

گوی واحد بسته X می‌باشد.

تعریف ۲.۱ (الف) دنباله $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ در فضای متریک X را کوشی می‌نامیم، هرگاه برای هر $\epsilon>۰$، $n_۰\in N$ به قسمی وجود داشته باشد، که برای هر $m,n\geq n_۰$ داشته باشیم:

$$d(x_m,x_n)<\epsilon.$$

(ب) فضای متریک (X,d) را کامل (تام) گوییم، هر گاه هر دنباله‌ی کوشی در X همگرا باشد. اگر X یک فضای نرم‌دار باشد و برای هر $x,y\in X$ قرار دهیم

$$d(x,y)=\parallel x-y\parallel,$$

آنگاه به سادگی دیده می‌شود که d یک متر روی X است و لذا هر فضای خطی نرم‌دار، یک فضای متریک است.

فضای خطی نرم‌دار X را یک فضای باناخ گوییم، هرگاه X نسبت به متر تولید شده به وسیله‌ی نرم، یک فضای کامل باشد.

تعریف ۳.۱ فرض کنید X یک فضای خطی نرم‌دار باشد و X^* گردایه‌ی تمام تابعک‌های خطی کراندار بر X باشد. هرگاه برای هر $\Lambda, \Lambda_1, \Lambda_2 \in X^*$ و $\alpha \in R$ تعریف کنیم:

$$(\Lambda_1 + \Lambda_2)x = \Lambda_1 x + \Lambda_2 x, \qquad ,(\alpha\Lambda)x = \alpha.\Lambda x.$$

آنگاه X^* یک فضای خطی خواهد بود. به علاوه اگر برای هر $x^* \in X^*$ تعریف کنیم:

$$\| x^* \| = \sup\{|\langle x, x^*\rangle| : x \in B\},$$

آنگاه این نرم، X^* را به یک فضای باناخ تبدیل می‌کند. X^* را فضای دوگان X گوییم ، اعضای آن را با x^* نشان داده و به جای $x^*(x)$ می‌نویسیم

$$\langle x, x^*\rangle.$$

همچنین گوی واحد بسته ی X^* را با

$$B^* = \{x^* : \| x^* \| \leq 1\},$$

نشان می دهیم.

فرض کنید X یک فضای باناخ باشد و $f : X \to R \cup \{+\infty\}$، به عبارتی f یک تابع حقیقی مقدار توسعه یافته باشد. دامنه ، نمودار و برون نمودار f به ترتیب به صورت زیر تعریف می شود:

$$dom(f) := \{x \in X : f(x) < +\infty\},$$

$$graph(f) := \{(x, f(x)) : x \in dom f\},$$

$$epi(f) := \{(x, r) \in dom f \times R : f(x) \leq r\}.$$

هر گاه دامنه ی f ناتهی باشد ، تابع f سره نامیده می شود. فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. گوییم حد زبرین تابع $f : X \to R \cup \{-\infty\}$ که آن را با $\limsup_{x \to x_0} f(x)$ نمایش می‌دهیم، برابر با l است،

هرگاه به ازای هر $\epsilon > 0$ ، $\delta > 0$ به قسمی وجود داشته باشد، که برای هر $x \in B_\delta(x_\circ)$ داشته باشیم:

$$f(x) \leq l + \epsilon.$$

هم چنین گوییم حد زیرین تابع $f : X \to R \cup \{-\infty\}$ که آن را با $\liminf\limits_{x \to x_\circ} f(x)$ نمایش می‌دهیم، برابر با l است، هرگاه به ازای هر $\epsilon > 0$ ، $\delta > 0$ به قسمی وجود داشته باشد، که برای هر $x \in B_\delta(x_\circ)$ داشته باشیم:

$$f(x) \geq l - \epsilon.$$

f در $x_\circ$ دارای حد l است $\Longleftrightarrow \liminf\limits_{x \to x_\circ} f(x) = \limsup\limits_{x \to x_\circ} f(x) = l$.

برخی از خواص مهم $\limsup\limits_{x \to x_\circ} f(x)$ و $\liminf\limits_{x \to x_\circ} f(x)$:

فرض کنید $\limsup\limits_{x \to x_\circ} f(x) = \beta$، آنگاه اگر $\beta < \alpha$، $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که

$$x \in P_S^\delta(x_\circ) \Rightarrow f(x) < \alpha.$$

لازم به ذکر است که

$$P_S^\delta(x_\circ) = P^\delta(x_\circ) \cap S = ((x_\circ - \delta, x_\circ + \delta) - \{x_\circ\}) \cap S.$$

و اگر $\alpha < \beta$، آنگاه می‌توان برای $\delta > 0$ به قدر کافی کوچک نقطه‌ی $x \in S$ را طوری یافت که $f(x) > \alpha$.

از مطالب بالا نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
\limsup_{x \to x_\circ} f(x) &= inf\{\alpha \in [-\infty, +\infty), \exists(\delta > 0)\forall(x \in P_S^\delta(x_\circ) f(x) < \alpha\} \\
&= sup\{\alpha \in [-\infty, +\infty), \forall(\delta > 0)\exists(x \in P_S^\delta(x_\circ) f(x) > \alpha\}.
\end{aligned}$$

همچنین:

$$\begin{aligned}
\liminf_{x \to x_\circ} f(x) &= sup\{\alpha \in [-\infty, +\infty), \exists(\delta > 0)\forall(x \in P_S^\delta(x_\circ) f(x) < \alpha\} \\
&= inf\{\alpha \in [-\infty, +\infty), \forall(\delta > 0)\exists(x \in P_S^\delta(x_\circ) f(x) > \alpha\}.
\end{aligned}$$

قضیه ۱.۱ فرض کنید $f : S \to (-\infty, +\infty]$ و $x_\circ$ نقطه‌ای حدی از S باشد، آنگاه:

$$\limsup_{x\to x_\circ} f(x) = sup\left\{\alpha = \lim_{n\to\infty} f(a_n); \lim_{n\to\infty} f(a_n) = x_\circ, a_n \neq x_\circ, \{a_n\} \subset S\right\}.$$

تذکر ۱.۱ اگر f, g توابعی تعریف شده روی دامنه‌ی تعریف یکسان S باشند، داریم:

$$\limsup_{x\to x_\circ}(f+g)(x) \leq \limsup_{x\to x_\circ} f(x) + \limsup_{x\to x_\circ} g(x).$$

و

$$\liminf_{x\to x_\circ}(f+g)(x) \geq \liminf_{x\to x_\circ} f(x) + \liminf_{x\to x_\circ} g(x).$$

فرض کنید f, g توابعی تعریف شده روی دامنه‌ی تعریف یکسان S باشند و $x_\circ$ نقطه‌ای حدی از S باشد. آنگاه اگر $\lim_{x\to x_\circ} g(x) = L \in (-\infty, +\infty]$، خواهیم داشت:

$$\limsup_{x\to x_\circ}(f+g)(x) = \limsup_{x\to x_\circ} f(x) + \lim_{x\to x_\circ} g(x).$$

تعریف ۴.۱ فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. تابع $f : X \to R \cup \{-\infty\}$ را در $x_\circ \in X$ نیم پیوسته بالایی گوییم، هرگاه به ازای هر $\epsilon > \circ$ ، $\delta > \circ$ به قسمی وجود داشته باشد که برای هر $y \in B_\delta(x_\circ)$ داشته باشیم،

$$f(y) \leq f(x_\circ) + \epsilon.$$

f روی X نیم پیوسته بالایی است هرگاه f در هر نقطه X نیم پیوسته بالایی باشد.

تعریف ۵.۱ فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. تابع $f : X \to R \cup \{+\infty\}$ را در $x_\circ \in X$ نیم پیوسته پایینی گوییم، هرگاه به ازای هر $\epsilon > \circ$ ، $\delta > \circ$ به قسمی وجود داشته باشد که برای هر $y \in B_\delta(x_\circ)$ داشته باشیم،

$$f(y) \geq f(x_\circ) - \epsilon.$$

f روی X نیم پیوسته پایینی است هرگاه f در هر نقطه X نیم پیوسته پایینی باشد.

به عنوان یک نتیجه می توان گفت: $f : X \to R \cup \{-\infty\}$ در $x_\circ$ پیوسته است اگر و فقط اگر f در $x_\circ$ نیم پیوسته پایینی و نیم پیوسته بالایی باشد.

برای زیرمجموعه‌ی S از فضای باناخ X تابع مشخصه[۱] S، با نماد $I(.;S) : X \to R \cup \{+\infty\}$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I(x;S) := \begin{cases} \circ, & x \in S, \\ +\infty, & o.w. \end{cases}$$

تابع $f : X \to R$ را لیپ شیتز از مرتبه $K > \circ$ گوییم هر گاه برای هر عدد حقیقی $K > \circ$ و $x, y \in X$ ،

$$| f(x) - f(y) | \leq K \| x - y \| . \qquad (۱-۱)$$

هم چنین تابع f را موضعاً لیپ شیتز گویند هر گاه برای هر $x \in X$ یک همسایگی $B(x;\delta)$ موجود باشد به قسمی که رابطه ی (۱-۱) در آن همسایگی برقرار باشد.

[۱] Indicator

فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از فضای باناخ X باشد. تابع فاصله $d_S : X \to R$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d_S(x) := \inf_{s \in S} \parallel x - s \parallel .$$

توجه شود که تابع فاصله$d_S : X \to R$ روی X لیپ شیتز از مرتبه ی $k = ۱$ می باشد.
یاد آوری می شود که مجموعه‌ی S در فضای باناخ X را محدب می‌نامیم، هرگاه برای هر دو نقطه‌ی واقع در S، پاره خط واصل این نقاط متعلق به S باشد. به عبارت دیگر، برای هر $x, y \in S$ و $۰ \leq t \leq ۱$ ، داشته باشیم

$$(۱ - t)x + ty \in S.$$

تعریف ۶.۱ فرض کنید X یک فضای باناخ و $S \subset X$ یک مجموعه محدب و باز باشد. تابع $f : X \to R \cup \{+\infty\}$ را روی S محدب گوییم، هرگاه به ازای هر $x, y \in S$ و هر $t \in (۰, ۱)$ داشته باشیم

$$f(tx + (۱ - t)y) \leq tf(x) + (۱ - t)f(y).$$

اگر نامساوی فوق به صورت اکید باشد، آنگاه تابع f را به طور اکید محدب گوییم.

به عنوان مثال تابع $f : [۰, ۱] \to R$ که $f(x) = x^۲$ تابعی محدب است.
f را محدب میانی گویند هر گاه برای هر $x, y \in S$

$$f(\frac{x + y}{۲}) \leq \frac{f(x) + f(y)}{۲}.$$

با توجه به [۲]، f محدب است اگر و فقط اگر f محدب میانی و پیوسته باشد.
فرض کنید X یک فضای باناخ و $S \subset X$ یک مجموعه محدب و باز باشد. با توجه به [۲]، اگر

$f : S \to R \cup \{+\infty\}$ دیفرانسیل پذیر باشد آنگاه f محدب است اگر و فقط اگر برای هر $x, y \in S$ داشته باشیم

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle.$$

وبه طور معادل f محدب است اگر و فقط اگربرای هر $x, y \in S$

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0.$$

یادآوری می شود برای یک فضای باناخ X، تابع $f : X \to R$ را همگن مثبت گویند، هرگاه برای $\lambda \geq 0$ ، $f(\lambda v) = \lambda f(v)$. هم چنین f را زیر جمعی گویند هر گاه برای هر $x, y \in S$

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y).$$

به عنوان یک نتیجه، اگر X فضایی باناخ و $f : X \to R \cup \{+\infty\}$ تابعی پیوسته و همگن مثبت باشد، آنگاه

f محدب است اگر و فقط اگر f زیر جمعی باشد.

اثبات.

$$\frac{1}{2} f(x + y) = f\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y).$$

□

تعریف ۷.۱ فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. منظور از مشتق جهت دار تابع $f : X \to R \cup \{+\infty\}$ در $x \in dom f$ و در راستای بردار $v \in X$ عبارت است از

$$f'(x; v) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}, \tag{۱−۲}$$

به شرط آن که این حد وجود داشته باشد.

تابع f را در $x \in domf$ گتو دیفرانسیل پذیر [۲] گوییم، هرگاه مشتق جهتی f در x و در راستای هربردار $v \in X$ موجود بوده و عنصر منحصر به فردی مانند $f'_G(x) \in X^*$ (به نام مشتق گتو) به گونه‌ای وجود داشته باشد که برای هر $v \in X$

$$f'(x;v) = \langle f'_G(x), v\rangle. \qquad (۱-۳)$$

به عبارت دیگر تابع $v \to f(x;v)$ برای هر $v \in X$ تابعی محدب باشد.

هم چنین تابع f را در $x \in domf$ فِرشه دیفرانسیل پذیر [۳] گوییم، هرگاه رابطه‌ی (۱−۳) در x برقرار باشد و $f'(x;v)$ نسبت به v روی زیر مجموعه‌های کراندار X به طور یکنواخت همگرا باشد. در این حالت به جای $f'_G(x)$، از نماد $f'(x)$ (مشتق فرشه) استفاده می کنیم.

این تعریف هم ارز است با این که برای هر $r > ۰$ و $\epsilon > ۰$ ، $\delta > ۰$ به گونه‌ای موجود باشد که رابطه‌ی

$$\left|\frac{f(x+tv)-f(x)}{t} - \langle f'(x), v\rangle\right| < \epsilon. \qquad (۱-۴)$$

برای هر $|t| < \delta$ و $\| v \| \leq r$ برقرار باشد. به عبارت دیگر تابع f در x فرشه مشتق پذیر است هرگاه $x^* \in X$ به گونه‌ای موجود باشد که

$$\lim_{d\to ۰} \frac{f(x+d)-f(x)-\langle x^*, d\rangle}{\| d \|} = ۰. \qquad (۱-۵)$$

از دید هندسی گتودیفرانسیل پذیری f در x بدین معنی می‌باشد، که تمامی خطوط مماس به گراف f در نقطه‌ی $(x, f(x))$ و در جهات مختلف به یک صفحه تعلق دارند. حال اگر تابع f در این نقطه فرشه دیفرانسیل پذیر نیز باشد آنگاه این صفحه در نقطه‌ی $(x, f(x))$ بر گراف مماس خواهد بود. هرگاه تابع f در x فرشه دیفرانسیل پذیر باشد، آنگاه x^* موجود در تعریف (۱−۵) یکتا بوده و همچنین f در x پیوسته خواهد بود. زیرا با استفاده از نامساوی مثلثی و نامساوی کشی شوارتز در (۱−۴) داریم

---

[۲] Gateaux Differentiable

[۳] Frechet Differentiable

$$\begin{aligned} \mid f(x+tv)-f(x)\mid &\leq \epsilon \mid t\mid + \mid t\mid \left|\langle f'(x),v\rangle\right| \\ &\leq \epsilon \mid t\mid + \mid t\mid (\parallel f'(x)\parallel . \parallel v\parallel) \\ &= \mid t\mid (\epsilon + \parallel f'(x)\parallel . \parallel v\parallel) . \end{aligned}$$

کافی است گیریم $t \to ۰$.

بدیهی است که هر تابع فرشه دیفرانسیل پذیر تابعی گتودیفرانسیل پذیر خواهد بود، ولی عکس این مطلب با توجه به مثال زیر برقرار نخواهد بود.

مثال ۱.۱ : توابع زیر در نقطه‌ی صفر گتودیفرانسیل پذیر بوده ولی فرشه دیفرانسیل پذیر نمی‌باشند.

۱) تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x,y)=\begin{cases} ۱, & y\geq x^{۲} \ \ or \ \ y=۰, \\ ۰, & o.w. \end{cases}$$

مشتق جهتی f در نقطه‌ی $(۰,۰)$ و در تمام جهات برابر صفر می‌باشد، اما این تابع در $(۰,۰)$ پیوسته و در نتیجه فرشه دیفرانسیل پذیر نمی‌باشد.

۲) تابع $f: R\times R\to R$ را با ضابطه‌ی زیر در نظر بگیرید:

$$f(x,y):=\begin{cases} \frac{xy^{۲}}{x^{۲}+y^{۴}}, & x\neq ۰, \\ ۰, & x=۰. \end{cases}$$

این تابع در نقطه‌ی صفر حد نداشته و پیوسته نخواهد بود، بنابراین فرشه مشتق پذیر نیست.

حال مشتق جهتی f درنقطه‌ی صفر و درجهت بردار دلخواه $(a_۱,a_۲)\neq ۰$ برابر است با

$$\begin{aligned} f'((۰,۰),(a_۱,a_۲)) &= \lim_{h\to ۰}\frac{f((۰,۰)+h(a_۱,a_۲))-f(۰,۰)}{h} \\ &= \lim_{h\to ۰}\frac{f(ha_۱,ha_۲)}{h} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0} \frac{a_1 a_2^2}{a_1^2 + h^2 a_2^4} \\
&= \frac{a_2^2}{a_1},
\end{aligned}
$$

بنابراین f در نقطه‌ی صفر گتو دیفرانسیل پذیر خواهد بود.

تعریف ۸.۱ فرض کنید $U \subseteq X$ مجموعه‌ای باز و $f : U \to R$ روی U فرشه دیفرانسیل پذیر باشد. اگر $f'(.) : U \to X$ روی U پیوسته باشد، آنگاه f را به طور پیوسته فرشه دیفرانسیل پذیر گوییم و می‌نویسیم $f \in C^1(U)$.

نتیجه زیر در [۲۰] اثبات شده است.

نتیجه ۱.۱ : فرض کنید $f : R^n \to R$ تابعی محدب باشد.

۱) گتو دیفرانسیل پذیری و فرشه دیفرانسیل پذیری f در هر نقطه معادل خواهند بود.

۲) اگر f روی مجموعه ی محدب و باز S فرشه دیفرانسیل پذیر باشد، آنگاه $f \in C^1(S)$.

۳) اگر f تابعی گتو دیفرانسیل پذیر باشد ، آنگاه $f \in C^1(R^n)$.

۱—۲ معرفی برخی از زیردیفرانسیل‌ها

مطالب این بخش از منابع [۱]، [۵] و [۲۰] گرد آوری شده اند.

تعریف ۹.۱ فرض کنید X فضایی باناخ و $f : X \to R \cup \{+\infty\}$ و $x \in dom f$ باشد. زیردیفرانسیل f در x به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\partial f(x) := \{x^* \in X^* : \langle x^*, y - x\rangle \leq f(y) - f(x), \forall y \in X\}. \qquad (۱—۶)$$

مثال ۲.۱ : اکنون چند مثال از زیردیفرانسیل توابع را ارائه می دهیم :

۱) تابع $f : R \to R$ با ضابطه ی $f(x) = |x|$ را در نظر بگیرید. چون در اینجا $\langle x^*, x\rangle = x^*x$ پس

$$\partial f(0) = \{x^* \in R : x^*y \leq |y|, \forall y \in X\}.$$

که معادل است با

$$\begin{aligned} \partial f(0) = &\ \{x^* \in R : x^*y \leq y : y \geq 0\} \cap \{x^* \in R : x^*y \leq -y : y < 0\} \\ = &\ \{x^* \in R : x^* \leq 1\} \cap \{x^* \in R : x^* \geq -1\} \\ = &\ (-\infty, 1] \cap [-1, +\infty) = [-1, 1]. \end{aligned}$$

بنابراین $\partial f(0) = [-1, 1]$.

از آنجا که تابع قدرمطلق برای $x \neq 0$ فرشه مشتق پذیر است $\partial f(x) = \{f'(x)\} = \{\frac{x}{|x|}\}$.

بنابراین

$$\partial f(x) = \begin{cases} [-1, 1], & x = 0, \\ \{\frac{x}{|x|}\}, & x \neq 0. \end{cases}$$

۲) تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x}, & x \geq 0, \\ \infty, & o.w. \end{cases}$$

در این صورت زیر دیفرانسیل f برابر است با

$$\partial f(x) = \begin{cases} \emptyset, & x = 0, \\ \{-\frac{1}{2\sqrt{x}}\}, & x > 0. \end{cases}$$

۳) فرض کنید $I : R \to R \cup \{+\infty\}$ تابع مشخصه ی مجموعه ی $S = \{0\}$ باشد. آنگاه $\partial I(0) = (-\infty, +\infty)$.

۴) فرض کنید C مجموعه‌ای محدب و بسته و $x \in C$ باشد. در این صورت

$$x^* \in \partial I(x; C) \Longleftrightarrow \langle x^*, c\rangle \leq \langle x^*, x\rangle.$$

$\partial I(x; C)$ را مخروط نرمال [۴] C در x گفته و با $N(C; x)$ نمایش می دهیم. به عبارتی

$$N_C(x) = N(C; x) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, c - x\rangle \leq 0, c \in C\}. \qquad (۱-۷)$$

گزاره و قضیه زیر در [۲۰] اثبات شده اند.

گزاره ۱.۱ فرض کنید $f : X \to R \cup \{+\infty\}$ تابعی محدب بوده و $x \in domf$ باشد. در این صورت

$$\partial f(x) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, d\rangle \leq f'(x; d), d \in X\}.$$

قضیه ۲.۱ فرض کنید $f : X \to R \cup \{+\infty\}$ تابعی محدب باشد. در این صورت برای هر x عضو درون دامنه f، $\partial f(x) \neq \emptyset$.

[۴] Normal cone