بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تربیت معلم سبزوار
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان نامه جهت اخذ کارشناسی ارشد در رشته ریاضی کاربردی

موضوع:

مساله کنترل بهینه کمینه سازی هزینه سوخت در حمل ونقل قطار وحل آن به روشهای عددی

استاد راهنما:
دکتر سهراب عفتی

استاد مشاور:
دکتر سید ابوالفضل علوی

پژوهش ونگارش:
حمید روح پرور

شهریور ۸٤

باسمه تعالی

دانشکده علوم پایه

شماره : ۳۱/۲۸۶
تاریخ : ۸۴/۶/۲۸
پیوست :

جلسه دفاع از پایان نامه **حمید روح پرور** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی در ساعت ۱۰ تاریخ ۸۴/۶/۲۷ روز **یکشنبه** در اتاق شماره ۲۴۳ تشکیل گردید. پس از بررسی و نظر هیأت داوران ، پایان نامه نامبرده با نمره ۱۹/۷۵ و درجه عالی مورد تأیید قرار گرفت.

نوزده و هفتاد و پنج صدم

عنوان رساله : مسأله کنترل بهینه کمینه سازی هزینه سوخت در حمل و نقل قطار و حل آن با روش های عددی

تعداد واحد : ۶ واحد

داور رساله : دکترعلی وحیدیان کامیاد
استاد دانشگاه فردوسی مشهد

داور رساله : دکتر عبداله قلی زاده
استادیار دانشگاه تربیت معلم سبزوار

استاد راهنما : دکتر سهراب عفتی
استادیار دانشگاه تربیت معلم سبزوار

استاد مشاور : دکتر سیدابوالفضل علوی
استادیار دانشگاه تربیت معلم سبزوار

نماینده تحصیلات تکمیلی : دکتر علی اصغر علوی
استادیار دانشگاه تربیت معلم سبزوار

۱۳۸۲/۱۰/۰ - ۵

مدیر گروه ریاضی : دکتر سهراب عفتی
استادیار دانشگاه تربیت معلم سبزوار

۱۰۴۲۷۶

قدردانی

در این‌جا لازم است از کلیه‌ی افرادی که مرا در انجام این پروژه کمک نموده‌اند، خصوصاً استاد راهنما آقای **دکتر سهراب عفتی**، استاد مشاور آقای **دکتر سید ابوالفضل علوی** که در تمام مراحل انجام این پروژه با مساعدت‌ها و راهنمایی‌های بی‌دریغ خود مرا یاری کردند، تشکر کنم. از دوستانم بویژه آقایان **مهدی اسماعیلی** و **داریوش قاسمی** و خانم **معصومه عباسی** صمیمانه سپاسگزارم.

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

و خانواده مهربانم

فهرست مندرجات

مسأله کنترل بهینه کمینه‌سازی هزینه سوخت در حمل‌ونقل قطار و حل آن به روش‌های عددی

چکیده

راه آهن از جمله سیستم‌های حمل‌ونقل مدرن عصر ما محسوب می‌گردد و در حمل‌ونقل کلی، راه آهن ارزانترین وسیله حمل‌ونقل در هر کشور است. در حال حاضر و عصری که دنیا با بحران انرژی روبرو است تأکید زیادی می‌شود که با انرژی کم حمل‌ونقل بیشتری انجام یابد و اینکار را در رأس برنامه‌ها جا داده‌اند.

کوتسکی و نیکولز در سال ۱۹۸۳ یک مدل ریاضی کنترل بهینه برای کمینه‌سازی هزینه سوخت قطار ارائه دادند که این مدل برای یک مسیر مسطح همراه با فراز و نشیب می‌باشد. برای حل این مسأله‌ی کنترل بهینه از دو روش نظریه اندازه و برنامه‌ریزی پویای تکراری استفاده خواهیم کرد.

در روش نظریه اندازه، ابتدا مسأله‌ی کنترل بهینه را به فضای جدید به نام فضای اندازه انتقال می‌دهیم. بعد از آن مسأله‌ی ذکر شده را به یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی با بعد متناهی تقریب می‌زنیم و با استفاده از جواب‌های بهینه مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی کنترل‌های بهینه مسأله را به صورت قطعه‌ای ثابت بدست می آوریم.

روش برنامه‌ریزی پویا برای حل مسائل بهینه‌سازی ارائه گردید که قابل تجزیه به مراحل می‌باشند. وقتی این روش را برای حل مسائل کنترل بهینه در سال ۱۹۸۹ به صورت تکراری به کار بردند روش برنامه‌ریزی پویای تکراری نام گرفت. برای حل مسأله‌ی کنترل بهینه کمینه‌سازی هزینه سوخت قطار از دو الگوریتم این روش استفاده خواهیم کرد که الگوریتم اولی کنترل‌های بهینه را به صورت قطعه‌ای ثابت و الگوریتم دومی کنترل‌های بهینه را به صورت قطعه‌ای خطی ارائه می‌دهند.

واژه‌های کلیدی: کنترل بهینه، نظریه اندازه، برنامه‌ریزی پویای تکراری

فصل ۱

مقدمات و تعاریف

۱—۱ مقدمه

در دهه ۶۰ بحث کنترل بهینه[۱] بیشتر روی اصل پونتریاگین [۲] و برنامه‌ریزی پویا[۳] انجام می‌گرفت. به مرور زمان نظریه‌ی شرایط لازم، به صورت بسیار موفقیت‌آمیزی پیشرفت کرد. اما بعد از گذشت سالها هیچ روش جامعی برای تخمین عددی کنترل‌های بهینه بوجود نیامد. با توجه به اینکه شرایط لازم خیلی پیچیده هستند و مخصوصاً در مسائل کنترل بهینه غیرخطی مشکلات آن بیشتر می‌شود لذا باید به دنبال روشهایی باشیم که این محدودیت‌ها را از پیش رو بردارد. در این پایان نامه به بررسی دو روش و استفاده آن در کنترل بهینه هزینه سوخت قطار می‌پردازیم که با مطالعه آنها به قابلیتهای این دو روش پی می‌بریم.

۱—۲ مقدمه‌ای بر کنترل بهینه

در بیشتر شاخه‌های ریاضیات کاربردی، هدف تجزیه و تحلیل یک وضعیت است. در دویست سال اخیر شاخه‌های مختلف ریاضی کاربردی (کلاسیک) نظیر مکانیک، ترمودینامیک و... پیشرفت بسیار نموده است. در مسائل کنترل هدف آن است که یک سیستم را طوری کنترل کنیم که به طریق مورد نظر رفتار نماید. سیستم[۴] در این جا عبارت است از مجموعه‌ی اشیایی که بوسیله روابط علت و معلولی به هم مربوط می‌شوند و در ازای ورودی‌های متفاوت خروجی‌های گوناگون تولید می‌کنند.

[۱] Optimal control
[۲] Pontryagin's principle
[۳] Dynamic programming
[۴] System

سیستم‌هایی که دارای چند ورودی و چند خروجی هستند از اهمیت بسزایی برخوردار هستند در مورد سیستم‌های کنترلی گاهی باید معیارهای گوناگونی صادق باشد به عنوان مثال، در طرح سیستم کنترل هواپیما یا کنترل حرکت قطار هدف آن است که مصرف سوخت را نیز حداقل کنند طرح چنین سیستم‌هایی کنترل بهینه نامیده می‌شود. هدف سیستم کنترل بهینه تعیین سیگنال‌های کنترل است به قسمی که در محدویت‌ها یا قیود فیزیکی صدق کرده و معیار معین (تابعی‌ارزشی) را مینیمم یا ماکزیمم نماید.

معمولاً در بحث کنترل دو نوع سیستم فشرده و توزیعی مورد بررسی قرار می‌گیرد که سیستم کنترلی هزینه سوخت قطار از نوع سیستم‌های فشرده می‌باشد.

توجه: برای توضیحات بیشتر در مورد تعاریف زیر به [۲] و [۲۵]مراجعه شود.

۱.۲.۱ تعریف

سیستم‌های پارامتر توزیعی[۵] به سیستم‌هایی که رفتار آنها توسط معادلات با مشتقات جزیی توصیف می‌گردد اطلاق می‌شود. سیستمهای تحت معادله حرارت [۶] و یا سیستم‌های تحت معادله موج [۷] از این نوع می‌باشند. .

۲.۲.۱ تعریف

سیستم‌های فشرده[۸] به سیستم‌هایی که معادلات دیفرانسیل معمولی بر رفتار آنها حاکم است اطلاق می‌شود.

۱—۳ مفاهیم توپولوژی

۱.۳.۱ تعریف

Distributed parameter systems[۵]

Heat equation[۶]

Wave equation[۷]

Compact systems[۸]

فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد گردایه τ از زیر مجموعه‌های X را یک توپولوژی[۹] روی X می‌نامیم هرگاه در شرایط زیرصدق کند:

الف) $X, \emptyset \in \tau$،

ب) اگر $V_i \in \tau$ برای $i = ۱, \ldots, n$، آنگاه $\cap_{i=۱}^{n} V_i \in \tau$،

ج) اگر $\{V_i : i \in I\}$ خانواده‌ای از اعضا τ باشند آنگاه، $\cup_{i\in I} V_i \in \tau$.

در این صورت (X, τ) را یک فضای توپولوژیک می‌نامیم و در مواردی که بیم ابهام نرود این فضای توپولوژیک را با X نشان می‌دهیم.

۲.۳.۱ تعریف

اگر (X, τ) یک فضای توپولوژیک باشد آنگاه هر عضو از τ را یک مجموعه‌ی باز[۱۰] گویند و مجموعه‌ی U را بسته[۱۱] می‌گوئیم هرگاه $U^c)U^c = X - U$ متمم U است) باز باشد.

۳.۳.۱ تعریف

فرض کنید $A \subseteq X$ باشد، نقطه $x \in X$ یک نقطه مرزی[۱۲] مجموعه‌ی A نامیده می‌شود اگر هر همسایگی از x مانند V شامل نقاطی از A و A^c باشد، یعنی:

$$V \cap A \neq \emptyset \ , \ V \cap A^c \neq \emptyset.$$

۴.۳.۱ تعریف

فضای توپولوژیکی (X, τ) یک فضای هاسدورف[۱۳] نامیده می‌شود اگر برای هر $x, y \in X$ که $x \neq y$، یک همسایگی $B_۱$ از x و $B_۲$ از y موجود باشد به طوری که $B_۱ \cap B_۲ = \emptyset$.

۵.۳.۱ تعریف

---

[۹] Topology

[۱۰] Open set

[۱۱] Closed

[۱۲] Boundary point

[۱۳] Housdorff space

یک پوشش باز برای مجموعه‌ی E گردایه‌ای از مجموعه‌های باز مانند $\{G_\alpha\}$ است به طوری که $E \subset \cup_\alpha G_\alpha$.

٦.۳.۱ تعریف

فرض کنید (X,τ) یک فضای توپولوژیک باشد و $A \subseteq X$ در این صورت A را فشرده[۱۴] گویند هرگاه هر پوشش باز مجموعه‌ی A، دارای یک زیرپوشش متناهی [۱۵] باشد. اگر X یک مجموعه‌ی فشرده باشد آنگاه فضای (X,τ) را فضای توپولوژیکی فشرده نامیده می‌شود.

۷.۳.۱ تعریف

فضای توپولوژیکی (X,τ) را فضای توپولوژیکی فشرده موضعی [۱٦] گویند اگر هر نقطه x از X دارای یک همسایگی، که بستار آن فشرده باشد.

۸.۳.۱ تعریف پایه یک توپولوژی

مشخص نمودن یک توپولوژی مانند τ با ارائه تمام اعضای آن معمولاً مشکل است، اغلب گردایه‌ای کوچکتر از زیرمجموعه‌های X را مشخص می‌نمایند که در ادامه به معرفی آنها می‌پردازیم و توپولوژی مورد نظر را برحسب اعضای این گردایه تعریف می‌کنیم که آن را پایه[۱۷] توپولوژی مورد نظر می‌نامند. پایه به صورت‌های زیر تعریف می‌شود:

۱ـ فرض کنید B یک دسته از مجموعه‌های باز در یک فضای توپولوژیکی (X,τ) باشد $(B \subset \tau)$ به طوری که هر مجموعه در τ، به صورت اجتماعی از اعضای B نوشته شود در این صورت B یک پایه برای τ نامیده می‌شود.

۲ـ یک دسته B از زیرمجموعه‌های غیرتهی X، یک پایه برای توپولوژی τ نامیده می‌شود هرگاه:

الف) $\cup_{B_\alpha \in B} B_\alpha = X$.

---

[۱۴] Compact

[۱۵] Finite

[۱٦] Local

[۱۷] Base

ب) برای هر دو مجموعه‌ی $B_1, B_2 \in B$ و هر $x \in B_1 \cap B_2$، مجموعه‌ی $B_3 \in B$ موجود باشد به طوری که: $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

۹.۳.۱ تعریف

فرض کنید $\mathbf{x} \in R^n$، نرم برداری $\mathbf{x}$ که با $\|\mathbf{x}\|$ نشان داده می‌شود تابعی از R^n به R است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

الف) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$، $\|\mathbf{x}\| = 0$ اگر و فقط اگر $\mathbf{x} = 0$.

ب) برای هر $r \in R$، $\|r\mathbf{x}\| = |r|\|\mathbf{x}\|$.

ج) برای هر $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$، $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

۱—۴ تابعی‌ها

۱.۴.۱ تعریف

فرض کنید $\mathcal{A}$ فضایی از توابع باشد. تابعی (تابعک) p یک قانون تناظری است که به هر تابع $f \in \mathcal{A}$، یک عدد حقیقی منحصربفرد را نسبت می‌دهد یعنی، $p : \mathcal{A} \to R$.

۲.۴.۱ تعریف

تابعی p را خطی[18] می‌گویند هرگاه داشته باشیم:

$$1)\ \forall f \in \mathcal{A}\ ,\ \forall \alpha \in R :\ p(\alpha f) = \alpha p(f)$$

$$2)\ \forall f_1, f_2 \in \mathcal{A} :\ p(f_1 + f_2) = p(f_1) + p(f_2)$$

شرط (۱) را شرط همگنی و شرط (۲) را شرط جمع‌پذیری می‌نامند.

۳.۴.۱ تعریف

[18] Linear

فرض کنید Ω یک فضای فشرده و هاسدورف باشد و p یک تابعی خطی روی فضای توابع پیوسته[۱۹] روی Ω ($C(\Omega)$) باشد. در این صورت p را پیوسته گوییم هرگاه:

$$\exists \alpha \in R\ ,\ \forall f \in C(\Omega):\quad |p(f)| \leq \alpha ||f||$$

که در رابطه‌ی فوق $||f||$ را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$||f|| = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

۴.۴.۱ تعریف

فرض کنید $C(\Omega)^*$ فضای تمام تابعیهایی خطی پیوسته روی $C(\Omega)$ باشد. هر تابعی در $C(\Omega)^*$ را یک اندازه‌ی رادن می‌نامیم. اگر این تابعی مثبت باشد، یعنی:

$$f(z) \geq 0 \quad (f(z) \in C(\Omega)) \quad \Rightarrow \quad p(f) \geq 0$$

آنگاه آن را یک اندازه‌ی رادن مثبت[۲۰] می‌نامیم.

۱—۵ اندازه‌ها

۱.۵.۱ تعریف

فرض کنید X یک مجموعه‌ی غیرتهی دلخواه باشد. در این صورت، S یک دسته غیرتهی از زیرمجموعه‌های X را یک جبر از مجموعه‌های X می‌نامند اگر:

الف) $\forall A, B \in S:\ \ A \cup B \in S$،

ب) $\forall A \in S:\ \ A^c \in S$.

---

[۱۹] Continuous

[۲۰] Positive Radon measure

۲.۵.۱ تعریف

جبر S از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی غیرتهی X را یک σ—جبر گوییم هرگاه خواص زیر را داشته باشد:

الف) $X \in S$،

ب) اگر $A \in S$، پس، $A^c \in S$،

ج) اگر $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ و $A_n \in S$ برای $n = 1, 2, \ldots$ آنگاه $A \in S$.

۳.۵.۱ تعریف

اگر A یک σ—جبر روی X باشد (A, X) را یک فضای اندازه‌پذیر[۲۱] می‌گویند.

۴.۵.۱ تعریف

مجموعه‌های بورل [۲۲] از یک فضای توپولوژیکی (X, τ)، اعضای σ—جبر تولید شده بوسیله مجموعه‌های باز است.

۵.۵.۱ تعریف

فرض کنید (A, X) یک فضای اندازه‌پذیر باشد و μ نگاشتی باشد که اعضای σ—جبر A را به $[0, \infty) \cup \{\infty\}$ بنگارد یعنی $\mu : A \to [0, \infty) \cup \{\infty\}$، μ را یک اندازه‌ی مثبت [۲۳] می‌نامند اگر:

۱) $\mu(\emptyset) = 0$

۲) $\forall n \ A_n \in A$, A_n ها متمایز $\Rightarrow \mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

در واقع μ به هر مجموعه $E \in A$ یک عدد نامنفی توسعه یافته نسبت می‌دهد که این عدد را اندازه‌ی مجموعه‌ی E می‌نامند. برای هر بازه‌ی به طول l، اندازه‌ی بازه l می‌باشد.

۶.۵.۱ تعریف

---

[۲۱] Measurable space

[۲۲] Borel sets

[۲۳] Positive meseare

سه‌تایی (A, X, μ) را فضای اندازه[۲۴] می‌نامند.

۷.۵.۱ تعریف

فرض کنید A یک جبر تولید شده به وسیله زیرمجموعه‌های باز باشد، آنگاه اگر A یک مجموعه بورل باشد، اندازه‌ی اتمی [۲۵] به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\delta_A(z) = \begin{cases} 1 & z \in A \\ 0 & z \notin A. \end{cases}$$

۸.۵.۱ تعریف

یک اندازه μ روی σ—جبر از همه مجموعه‌های بورل در فضای فشرده موضعی هاسدورف X را یک اندازه بورل نامیده می‌شود. اگر μ مثبت است، یک مجموعه‌ی بورل $E \subset X$ منظم بیرونی [۲۶] است هرگاه برای هر $E \in S$ (S یک σ—جبر است) داشته باشیم:

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V, \text{مجموعه باز باشد} \quad V\}$$

و منظم درونی [۲۷] است هرگاه

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, \text{مجموعه فشرده باشد} \quad K\}.$$

اگر هر مجموعه بورل در X هم منظم بیرونی و هم منظم درونی باشد، μ اندازه بورل منظم [۲۸] نامیده می‌شود.

۹.۵.۱ تعریف

فرض کنید (X, A) یک فضای اندازه‌پذیر باشد و f یک تابع تعمیم یافته به صورت $f : X \to R^*$

---

[۲۴] Measure space

[۲۵] Atomic measure

[۲۶] Outer regular

[۲۷] Interior regular

[۲۸] Regular borel measure

باشد در این صورت f را یک تابع اندازه‌پذیر گویند هرگاه یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$$i)\ \forall\alpha \in R;\ \{x \in X :\ f(x) < \alpha\} \in A$$

$$ii)\ \forall\alpha \in R;\ \{x \in X :\ f(x) \leq \alpha\} \in A$$

$$iii)\ \forall\alpha \in R;\ \{x \in X :\ f(x) > \alpha\} \in A$$

$$iv)\ \forall\alpha \in R;\ \{x \in X :\ f(x) \geq \alpha\} \in A$$

$$v)\ \forall\alpha \in R;\ \{x \in X :\ f(x) = \alpha\} \in A$$

البته ثابت می‌شود که اگر یکی از شرایط بالا برقرار باشد آنگاه شرایط دیگر نیز برقرار است.

۱۰.۵.۱ تعریف

یکی از مفاهیم مهم در مباحث آنالیز حقیقی، مفهوم تقریباً همه‌جا [۲۹] می‌باشد. x دارای خاصیت p تقریباً همه‌جا است هرگاه:

$$\mu(\{x : \text{برقرار نیست}\quad p(x)\}) = 0.$$

۱۱.۵.۱ تعریف (توپولوژی ضعیف [۳۰] در فضای اندازه‌های رادن مثبت)

به عنوان مثال می‌توان نشان داد که در فضای نرمدار $C(\Omega)$ هرگاه $F_j \in C(\Omega)$ که در آن $j = 1, 2, \ldots, r$ آنگاه همسایگی U_ϵ از صفر را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$U_\epsilon = \{\mu \in M(\Omega) : |\mu(F_j)| < \epsilon,\ j = 1, 2, \ldots, r\}$$

که $M(\Omega)$ مجموعه تمام اندازه‌های رادن روی Ω است. هرگاه برای ϵهای مختلف همسایگی‌های بدست آمده فوق را بعنوان پایه یک توپولوژی در نظر بگیریم این توپولوژی را توپولوژی ضعیف می‌نامند.

۱۲.۵.۱ تعریف

[۲۹] Almost every where

[۳۰] Weak topology