دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی

دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی — آنالیز عددی

موضوع:

تحلیل عددی معادلات عملگری به کمک روش‌های تایید شده

نگارش:

فهیمه گودرزی

استاد راهنما:

دکتر فریده قریشی　　　دکتر محمود هادیزاده یزدی

استاد مشاور:

دکتر محمدرضا پیغامی

بهمن ۱۳۹۰

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

اظهار نامه دانشجو

موضوع پایان نامه: تحلیل عددی معادلات عملگری به کمک روش‌های تایید شده

استاد راهنما: دکتر فریده قریشی و دکتر محمود هادیزاده یزدی

نام دانشجو: فهیمه گودرزی

شماره دانشجویی: ۸۸۰۳۸۱۴

اینجانب فهیمه گودرزی دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی دانشکده علوم دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی گواهی می‌نمایم که تحقیقات ارائه شده در این پایان‌نامه توسط شخص اینجانب انجام شده و صحت و اصالت مطالب نگارش شده مورد تأیید می‌باشد و در مورد استفاده از کار دیگر محققان به مرجع مورد استفاده اشاره شده است.

همچنین گواهی می‌نمایم که مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط اینجانب یا فرد دیگری در هیچ جا ارائه نشده است و در تدوین متن پایان‌نامه آئین‌نامه مصوب دانشگاه را به طور کامل رعایت کرده‌ام.

امضاء دانشجو:

تاریخ:

فرم حق طبع و نشر و مالکیت نتایج

۱–حق چاپ و تکثیر این پایان‌نامه متعلق به نویسنده آن می‌باشد. هرگونه کپی برداری به صورت کل پایان نامه یا بخشی از آن تنها با موافقت نویسنده یا کتابخانه دانشکده علوم پایه دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی مجاز می‌باشد.

۲–کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی می‌باشد و بدون اجازه کتبی دانشگاه به شخص ثالث قابل واگذاری نیست.

همچنین استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

تشکر و قدردانی

با سپاس از خداوند متعال و تشکر فراوان از اساتید ارجمندم جناب آقای دکتر هادیزاده و سرکار خانم دکتر قریشی جهت راهنمایی و یاری اینجانب در انجام این رساله، همچنین قدر دانی از پدر و مادر عزیزم که در تمامی سختی‌های این مسیر همراه و یاورم بودند، این پایان نامه را به پدر و مادر عزیزم تقدیم می‌کنم.

چکیده

در این پایان نامه به معرفی آنالیز بازه‌ای و قوانین حاکم بر حساب بازه‌ای پرداخته و روش‌های بازه‌ای را در حل معادلات دیفرانسیل به صورت جداگانه مرور می‌کنیم. به عنوان بخش اصلی کار به معرفی الگوریتم بازه‌ای جدیدی برای حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی n ام می‌پردازیم که بر مبنای الگوریتم نهر[۱] [۸] و انتقال مختصات مور[۲] [۷, ۲] است. پس از بیان الگوریتم جدید به حل مثال‌های عددی متنوعی می‌پردازیم و جواب‌های بدست آمده از روش ارائه شده را با جواب‌هایی که از روش‌های قبلی به دست آمده است مقایسه می‌کنیم.

کلمات کلیدی:روش‌های بازه‌ای ، روش‌های تایید شده، معادلات عملگری، معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی nام.

---

[۱] M. Neher

[۲] R. E. Moore

به نام یگانه‌ی هستی

مقدمه

همان طور که می‌دانیم در محاسبات عددی، در برخی از موارد جوابی که توسط یک کامپیوتر به کمک روش محاسبه‌ی ممیز شناور[۳] تقریب زده می‌شود به علت خطای قطع کردن [۴] و خطای گرد کردن[۵]، دور از جواب واقعی می‌باشد. یک روش محاسبه‌ی تایید شده[۶] روشی است که می‌تواند به کمک روش محاسبه‌ی ممیز شناور بازه‌ای برای جواب محاسبه کند که علاوه براین که شامل جواب واقعی مسئله است، خطای گرد کردن و خطای قطع کردن را نیز می‌پوشاند. یکی از قدرتمندترین ابزارها برای محاسبات تایید شده استفاده از روش محاسبات بازه‌ای[۷] به جای محاسبات معمولی است. فرض کنید a یک عدد غیر ماشینی باشد یا در یک کامپیوتر با حساب ممیز شناور تا n رقم اعشار، دارای $m > n$ رقم اعشار باشد. در این صورت در محاسبات دیجیتالی، عدد a در هر بار تکرار گرد خواهد شد. این گرد کردن در محاسبات، ممکن است الگوریتم را دچار مشکل کند. حتی در صورتی که الگوریتم دچار مشکل نشود، نمی‌توان یقین داشت که جواب دقیق است. $a \in A = [\overline{a}, \underline{a}]$ را طوری در نظر بگیرید که $\overline{a}$ کوچکترین عدد ماشینی بزرگتر از a و $\underline{a}$ بزرگترین عدد ماشینی کوچکتر از a باشد. در حساب بازه‌ای در تمامی محاسبات به جای عدد a از بازه‌ی A استفاده می‌شود. استفاده از بازه‌ی A، باعث می‌شود که خطای گرد کردن در تمامی محاسبات در نظر گرفته شود. [۱۳]

همچنین روش‌های مبتنی بر محاسبات بازه‌ای (روش‌های بازه‌ای) می توانند برای حل آن دسته از معادلات دیفرانسیل معمولی که دارای مقادیر اولیه به صورت بازه هستند نیز جواب‌های مناسبی داشته باشند.

---

[۳] Floating point

[۴] Local errors

[۵] Round off errors

[۶] Verified method

[۷] Interval arithmetic

در سال ۱۹۳۱ یانگ[۸] از دانشگاه کمبریج، برای اولین بار بحث محاسبات با مقادیر بیش از یک نقطه را در رساله‌ی دکترای خود مطرح کرد. در سال ۱۹۵۱ دویر[۹]، کار با بازه‌ها را با تمرکز بر نقش آن‌ها در دستگاه‌های دیجیتالی آغاز کرد. بعدها وارموس[۱۰]، سوناگا[۱۱] و مور به صورت جدی حساب بازه‌ها را بنیانگذاری کردند. کتاب مشهور آنالیز بازه‌ای نتیجه‌ی تلاش‌های مور در این راستا می‌باشد.

امروزه آنالیز بازه‌ای در حیطه‌های مختلف آنالیز عددی از جمله جبر خطی عددی، حل عددی معادلات دیفرانسیل و انتگرال مورد استفاده قرار می‌گیرد. آنچه روش‌های بازه‌ای را از روش‌های دیگر حوزه‌ی آنالیز عددی متمایز می‌سازد، پوشش قطعی کلیه‌ی خطاهای پیش آمده در الگوریتم‌های عددی است. به دلیل وجود خاصیت وابستگی[۱۲] در محاسبات بازه‌ای معمولاً جواب دارای نوعی تخمین بیش از حد[۱۳] می‌باشد. این تخمین بیش از حد در الگوریتم‌هایی با تعداد گام‌های زیاد، باعث بزرگ تر شدن عرض بازه‌های جواب در هر گام گردیده، که این امر با تکرار روند منجر به توقف الگوریتم می‌شود. مطالعات ندیالکوو[۱۴]، نهر، لهنر[۱۵]، برز[۱۶] و ماکینو[۱۷]، کورلیس[۱۸] و ... نتایج را تا حد زیادی بهبود بخشیده است. روش‌های بازه‌ای را روش‌های شمول یا روش‌های محصور سازی نیز می‌نامند. حساب بازه‌ای در حوزه‌ی حل معادلات اپراتوری نیز پیشرفت‌های قابل ملاحظه‌ای داشته است و نرم‌افزارهای حل بازه‌ای معادلات دیفرانسیل نیز طراحی شده است.

فصل اول این پایان نامه به معرفی آنالیز بازه‌ای، تعاریف اولیه و قضایای مقدماتی اختصاص

---

[۸] R.C.Young
[۹] Dwyer
[۱۰] Warmus
[۱۱] Sunaga
[۱۲] Dependency problem
[۱۳] Over estimation
[۱۴] N. S. Nedialkov
[۱۵] Lohner
[۱۶] M. Berz
[۱۷] K. Makino
[۱۸] G. F Corliss

دارد. در فصل دوم به معرفی و تحلیل روش‌های بازه‌ای برای حل معادلات دیفرانسیل می‌پردازیم. در فصل سوم روش مدل تیلور مورد بررسی قرار گرفته و در فصل چهار روشی جدید برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی nام ارائه می‌دهیم.

فهرست مندرجات

فصل ۱

معرفی و مفاهیم بنیادی

۱.۱ نماد گذاری و مفاهیم اولیه

در این فصل به معرفی آنالیز بازه‌ای یا حساب بازه‌ها می‌پردازیم. خاطر نشان می‌کنیم که تمامی قضایا و تعاریف این فصل از کتاب آنالیز بازه‌ای که توسط مور[۷] به رشته‌ی تحریر در آمده است، آورده شده‌اند.

تعریف ۱.۱.۱ منظور از بازه‌ی حقیقی $[\underline{X},\overline{X}]$، مجموعه‌ای کراندار و بسته از اعداد حقیقی به صورت زیر است:

$$[\underline{X},\overline{X}] = \{x : \underline{X} \leq x \leq \overline{X}\},$$

که در آن $\underline{X}$ نقطه‌ی ابتدا و $\overline{X}$ نقطه‌ی انتهای بازه X نامیده می‌شوند. مجموعه‌ی بازه‌ها روی محور اعداد حقیقی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbb{IR} = \{X = [\underline{X},\overline{X}] \mid \underline{X},\overline{X} \in \mathbb{R}\}.$$

اگر $\underline{X} = \overline{X}$، آنگاه بازه‌ی X به صورت یک عدد حقیقی در می آید. بنابراین $\mathbb{R} \subset \mathbb{IR}$. یک بازه را با نقاط ابتدا و انتهایش نمایش می‌دهند. در این رساله بازه‌ها را با حروف بزرگ انگلیسی به صورت $X = [\underline{X}, \overline{X}]$ نمایش می‌دهیم.

منظور از یک بردار بازه‌ای n بعدی، یک n تایی از بازه‌ها به شکل زیر است:

$$(X_۱, X_۲, ..., X_n),$$

که در آن برای $i = ۱, ۲, ..., n$، X_i ها بازه‌هایی به شکل $X_i = [\underline{X_i}, \overline{X_i}]$ هستند. دو بازه‌ی X و Y را برابر می‌گوییم هرگاه $\overline{X} = \overline{Y}$, $\underline{X} = \underline{Y}$.

تعریف ۲.۱.۱ طول بازه‌ی $X = [\underline{X}, \overline{X}]$ را با $w(X)$ نمایش می‌دهیم که به صورت $w(X) = \underline{X} - \overline{X}$ تعریف می‌شود.

به طور مشابه برای بردار بازه‌ای $X = (X_۱, X_۲, ..., X_n)$، $w(X) = Max(w(X_۱), ..., w(X_n))$.

تعریف ۳.۱.۱ قدر مطلق بازه‌ی X را به صورت $|X| = max(|\underline{X}|, |\overline{X}|)$ تعریف می‌کنیم. بنابراین به ازای هر $x \in X$ داریم $|x| \leq |X|$.

همچنین برای یک بردار بازه‌ای به شکل $X = (X_۱, X_۲, ..., X_n)$، داریم:

$$||X|| = max(|X_۱|, ..., |X_n|),$$

تعریف ۴.۱.۱ مرکز یک بازه را به صورت $m(X) = (\underline{X} + \overline{X})$ تعریف می‌کنیم. به طور مشابه برای بردار بازه‌ای $X = (X_۱, X_۲, ..., X_n)$ داریم:

$$m(X) = (m(X_۱), ..., m(X_n)).$$

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنید $X=[\underline{X},\overline{X}]$ و $Y=[\underline{Y},\overline{Y}]$، اعمال اصلی در این حوزه به این صورت تعریف می شوند که:

$$\begin{aligned}
X+Y &= [\underline{X},\overline{X}]+[\underline{Y},\overline{Y}]=[\underline{X}+\underline{Y},\overline{X}+\overline{Y}],\\
-X &= -[\underline{X},\overline{X}]=[-\overline{X},-\underline{X}],\\
X-Y &= X+(-Y)=[\underline{X}-\overline{Y},\overline{X}-\underline{Y}],\\
1/X &= \{1/x : x\in X\},\\
X.Y &= \{xy : x\in X,\ y\in Y\}=\{\underline{XY},\overline{XY}\},\\
X/Y &= X(1/Y).
\end{aligned}$$

بطوریکه $\underline{XY}=min(\underline{X}\underline{Y},\underline{X}\overline{Y},\overline{X}\underline{Y},\overline{X}\overline{Y})$ و $\overline{XY}=max(\underline{X}\underline{Y},\underline{X}\overline{Y},\overline{X}\underline{Y},\overline{X}\overline{Y})$.

فرض کنید X و Y و Z بازه‌هایی حقیقی باشند. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned}
X+(Y+Z) &= (X+Y)+Z,\\
X.(Y.Z) &= (X.Y).Z,\\
X+Y &= Y+X,\\
X.Y &= Y.X\ .
\end{aligned}$$

این به این معناست که مجموعه‌ی بازه‌های حقیقی نسبت به جمع و ضرب بازه‌ای، تعویض پذیر و شرکت پذیر می‌باشد. در این مجموعه خاصیت توزیع پذیری برقرار نیست ولی خاصیت زیر که آن‌را خاصیت زیر توزیع پذیری می‌نامند، همواره برقراراست.

$$X(Y+Z)\subseteq XY+XZ.$$

اما در مواقع خاص، خاصیت توزیع پذیری نیز برقرار می‌باشد مانند:

گزاره ۱.۱.۱ اگر x یک عدد حقیقی و Y, Z بازه‌هایی حقیقی باشند، آنگاه داریم:

$$x(Y+Z) = xY + xZ,$$

و همچنین اگر $YZ > 0$ و یا X و Y بازه‌هایی متقارن باشند، آنگاه:

$$X(Y+Z) = XY + XZ.$$

گزاره ۲.۱.۱

$$\begin{aligned} w(aX+bY) &= |a|w(X) + |b|w(Y), \\ w(XY) &\leq |X|w(Y) + |Y|w(X), \\ w(aX) &= |a|w(X). \end{aligned}$$

اگر بازه‌ی X متقارن باشد:

$$\begin{aligned} w(XY) &= |Y|w(X), \\ w(XY) &= w(X'Y), \quad \forall X', \; w(X') = w(X). \end{aligned}$$

تعریف ٦.۱.۱ اگر $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد، برد[۱] تابع f روی X به این صورت تعریف می‌شود:

$$R(f;X) = \{f(x) | x \in X\}.$$

---

[۱] range

لازم به ذکر است که در $\mathbb{IR}$، $[۱,۱] = ۱$ عضو خنثی نسبت به ضرب و $[۰,۰] = ۰$ عضو خنثی نسبت به جمع است ولی $\frac{X}{X} = ۱$ و $X - X = ۰$ همواره برقرار نیست. به عنوان مثال:

$$[۱,۲] - [۱,۲] = [-۱,۱],$$
$$\frac{[۱,۲]}{[۱,۲]} = [۱/۲,۲] \ .$$

۲.۱ توابع بازه‌ای و خواص مهم آنها

تعریف ۱.۲.۱ به طور کلی یک تابع بازه‌ای که به آن تعمیم بازه‌ای[۲] تابع نیز گفته می‌شود، به صورت $f(X)$ تعریف می‌شود که در آن X یک بازه است. یعنی تمام متغیرها را با بازه‌ی X جایگزین می‌کنیم.

مثال ۱.۲.۱ فرض کنید، $x \neq ۱$,$f(x) = \frac{x}{۱-x}$ و با فرض $X = [۲,۳]$ داریم:

$$f(X) = \frac{X}{۱-X} = \frac{[۲,۳]}{۱-[۲,۳]} = \frac{[۲,۳]}{[-۱,-۲]} = [-۳,-۱],$$

برای محاسبه‌ی برد تابع روی بازه‌ی X می‌توان نوشت:

$$R(f,[۲,۳]) = \{f(x) | x \in [۲,۳]\} = [-۲, \frac{-۳}{۲}],$$

به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که همیشه $R(f,X) = f([X])$ برقرار نمی‌باشد. نکته‌ای که در اینجا مطرح می‌شود این است که ممکن است دو تابع گویای حقیقی که در حساب معمولی اعداد حقیقی با

---
[۲] interval extension

هم معادل هستند دارای تعمیم بازه‌ای معادل نباشند. به عنوان مثال تابع $x(1-x)$، در حساب معمولی اعداد حقیقی با $x-x^2$ معادل است. اما اگر به جای x بازه‌ی $[0,1]$ را جایگزین کنیم خواهیم داشت:

$$X(1-X) = [0,1]([1,1]-[0,1]) = [0,1], \quad (1)$$

$$X-X^2 = [0,1]-[0,1]^2 = [-1,1]. \quad (2)$$

لذا تعمیم بازه‌ای یک تابع منحصر به فرد نیست.

قضیه ۱.۲.۱ فرض کنیم f تابعی صعودی باشد، در این صورت داریم:

$$f(X) = f([\underline{X}, \overline{X}]) = [f(\underline{X}), f(\overline{X})],$$

و اگر f تابعی نزولی باشد، داریم:

$$f(X) = f([\underline{X}, \overline{X}]) = [f(\overline{X}), f(\underline{X})].$$

یعنی تعمیم بازه‌ای توابع یکنوا منحصر به فرد است.

تعریف ۲.۲.۱ یک تابع بازه‌ای گویا تابعی بازه‌ای است که مقادیر آن توسط تعداد متناهی عملگر حساب بازه‌ای بدست آمده باشد. به عنوان مثال $f(X_1,X_2) = ([1,2]X_1+[0,1])X_2$ یک تابع بازه‌ای گویاست اما تابع $f(X) = m(X)+\frac{1}{2}(X-m(X))$ یک تابع بازه‌ای گویا نیست. (منظور از عملگر بازه‌ای جمع، ضرب، منهاو تقسیم بازه‌ای می‌باشد).

حساب بازه‌ها دارای خاصیت شمول یکنوایی[3] است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

اگر $\phi(X)$ یک تابع بازه‌ای گویا باشد، آنگاه داریم:

$$Y \subseteq X \Rightarrow \phi(Y) \subseteq \phi(X)$$

[3] Inclusion monotonicity