بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

گروه آمار

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
آمار ریاضی

توزیع دنباله‌ای و توزیع زمان‌های توقف دومرحله‌ای در آزمایش‌های برنولی

استاد راهنما:

دکتر عیسی محمودی

استاد مشاور:

دکتر علی دولتی

پژوهش و نگارش:

محمد حاتمی کمین

مهرماه ۱۳۸۹

در دگرگونی حالت ها، آگاهی و علم به جوهر ذات انسان ها حاصل می شود.

علی(ع)

تنها شگفتی جهان امکان کشف است، کشف اینکه چه بود و چه شد؟ اینکه تو ندانستی و کوشیدی. جهان استاد من است و من گردآوری شده اویم، از میانش برخاسته ام تا چیزی بر آن بیفزایم و خرسندم از حیاتی خردمندانه در جهانی که او خداوند است. بدون شک تمامی لحظاتی که امروز از برابرمان به آسانی می گذرند بالقوه نمود فرصتی طلایی اند. خدا نور اندیشه من است، بی او نمی اندیشم.

به نام خداوند خردافزای مهرآفرین

قدردانی و تشکر

به نام خداوند خرد افزای مهرآفرین

اکنون همه چیز جاده‌ها، بی‌راهه‌ها، چهاردیواری‌ها، سقف‌ها، خرابه‌ها و در نهایت همه‌ی ردپاهای به‌جا مانده از آنچه وجود داشته است پشت سرم است و احساس می‌کنم در واپسین لحظه‌های سکوت برای پایانی جذاب اندکی حرف بزنم و این یک شروع جدید است...

از جناب آقای دکتر عیسی محمودی استاد راهنمای بزرگوارم که طی طریق این تحقیق، مرهون راهنمایی‌ها و شکیبایی‌های ایشان است کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از استاد بزرگوارم، آقای دکتر علی دولتی که استاد مشاور اینجانب بودند و همچنین از آقایان دکتر حمزه ترابی و دکتر ذاکرزاده تشکر می‌کنم.

چکیده

در این پایان‌نامه به مسئله‌ی برآورد تابعی از احتمال موفقیت در دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی، مستقل و هم‌توزیع برنولی می‌پردازیم. تابع زیان مرتبط با این برآورد را، تابع زیان خطی - نمایی در نظر می‌گیریم. ثابت می‌شود که برآورد دنباله‌ای ارائه شده بعضی از ویژگی‌های بهینه‌ی مجانبی، برای حالتی که احتمال موفقیت به سمت صفر میل می‌کند، را داراست. با در نظر گرفتن شرایطی که تحت آن‌ها متغیر توقف به‌طور مجانبی کارا و نرمال است، ثابت می‌شود که روش دنباله‌ای به‌کار گرفته شده برابری ریسک دنباله‌ای با مقدار ثابت از پیش تعیین شده‌ای را تضمین می‌کند.

همچنین توزیع دقیق متغیر توقف حاصل از یک طرح دنباله‌ای، برای برآورد لگاریتم نسبت بختی در دنباله‌ای از آزمایش‌های برنولی به‌دست می‌آید. با استفاده از توزیع متغیر توقف، برای امید ریاضی و میانگین مربعات خطای برآوردگرنسبت بختی، فرمول‌های صریحی بیان می‌شود. همچنین روش دومرحله‌ای مورد ارزیابی قرار گرفته و بعضی از خصوصیات مهم آن به‌طور دقیق بررسی می‌گردد. نشان داده می‌شود که اگر احتمال موفقیت خیلی کوچک یا خیلی بزرگ نباشد کارآیی روش دومرحله‌ای به کارایی روش دنباله‌ای نزدیک می‌شود.

نتایج این پایان‌نامه برای طراحی زمان توقف مناسب در قابلیت اعتماد و همچنین برآورد نسبت میانگین زمان بین شکست‌ها (خرابی‌ها) در دو سیستم مستقل با طول عمر نمایی می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

فهرست مطالب

پیشگفتار ۱

۱ مفاهیم و تعاریف مقدماتی ۳

۱.۱ چند تعریف مقدماتی در آمار ریاضی ۴

۱.۱.۱ تابع زیان و تابع ریسک ۵

۲.۱ فرایندهای تصادفی ۸

۱.۲.۱ فرایندهای پواسن ۹

۳.۱ انواع همگرایی‌ها ۱۰

۱.۳.۱ انتگرال‌پذیری یکنواخت ۱۱

۴.۱ نامساوی‌ها ۱۳

۵.۱ بعضی از قضایای مهم احتمال ۱۵

۲ مقدمه‌ای بر تحلیل دنباله‌ای ۱۹

۱.۲ تحلیل دنباله‌ای در برآورد فاصله‌ای ۲۰

۱.۱.۲ مقدمه ۲۰

۲.۱.۲ روش دنباله‌ای کلی ۲۰

۳.۱.۲ روش دنباله‌ای تسریع شده کلی ۲۲

۲.۲ فاصله اطمینان با طول ثابت برای میانگین ۲۵
۱.۲.۲ روش دنباله‌ای محض ۲۵
۲.۲.۲ روش دومرحله‌ای ۳۰
۳.۲ مروری بر کارهای انجام گرفته در زمینه‌ی تحلیل دنباله‌ای ۳۲

۳ برآورد تابعی از احتمال موفقیت توزیع برنولی تحت تابع زیان خطی - نمایی ۳۹
۱.۳ مقدمه ۴۰
۲.۳ روش دنباله‌ای در برآورد تابع $g(p)$ ۴۳
۳.۳ ویژگی‌های روش دنباله‌ای ۴۷
۱.۳.۳ سازگاری روش دنباله‌ای ۵۷
۴.۳ شبیه سازی ۶۴

۴ روش دومرحله‌ای در برآورد نسبت بختی به عنوان تابعی از احتمال موفقیت در توزیع برنولی ۶۹
۱.۴ نسبت بختی ۷۰
۲.۴ روش دنباله‌ای ۷۰
۳.۴ توزیع متغیر توقف تعدیل یافته‌ی $N(\delta)$ ۷۴
۴.۴ ویژگی‌های $\hat{\rho}_{N(\delta)}$ ۸۰
۵.۴ روش دومرحله‌ای و بررسی خواص آن ۸۱
۱.۵.۴ توزیع $N_{Ts}(\delta)$ ۸۳
۶.۴ آزمون قابلیت اعتماد ۸۶
۷.۴ تشریح مطالب ۸۸

الف برنامه‌های کامپیوتری با نرم‌افزار R ۹۳

ب واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی ۱۰۷

پ واژه نامه‌ی انگلیسی به فارسی ۱۱۱

کتاب‌نامه ۱۱۵

فهرست شکل‌ها

۱.۳ منحنی C و خطوط L، L_1 و L_2 . . . . . ۵۳

۲.۳ تابع چگالی متغیر توقف N برای مقادیر مختلف p در روش دنباله‌ای تحت تابع زیان خطی-نمایی ۶۸

۱.۴ تابع توزیع متغیر توقف N_{TS} برای مقادیر جدول ۴.۴، به ازای $p = ۰/۴$ و $p = ۰/۵$ ۸۵

فهرست جداول

۱.۳ مقادیر $E(N)$، $\hat{p}^s = \frac{۱}{\hat{p}}$ و $R_N - c$ به ازای $a = ۲$، $r = ۲$، $b = ۲$ و $l = ۰$. ۶۵

۲.۳ مقادیر $E(N)$، $\hat{p}^s = \frac{۱}{\hat{p}}$ و $R_N - c$ به ازای $a = ۱$، $r = ۱$، $b = ۱$ و $l = ۰$. ۶۶

۳.۳ مقادیر $E(N)$، $\hat{p}^s = \frac{۱}{\hat{p}}$ و $R_N - c$ به ازای $a = -۱$، $r = ۱$، $b = ۱$ و $l = ۰$ ۶۷

۱.۴ مقادیر$n^*(\delta, p)$ و $E_p(N^*(\delta))$ و$Eff(\delta, p)$ به ازای $\delta = (۰/۰۱)^{\frac{۱}{۲}}, (۰/۱)^{\frac{۱}{۲}}$ و $\alpha = ۰/۰۲۵, ۰/۰۵$ ۷۴

۲.۴ امید ریاضی و انحراف معیار$N(\delta)$ به ازای $\delta = (۰/۰۱)^{\frac{۱}{۲}}, (۰/۱)^{\frac{۱}{۲}}$ و $\alpha = ۰/۰۲۵, ۰/۰۵$ ۷۹

۳.۴ مقادیر$n^*(\delta, p)$ و $E_p(N(\delta))$ و$Eff(\delta, p)$ به ازای $\delta = (۰/۰۱)^{\frac{۱}{۲}}, (۰/۱)^{\frac{۱}{۲}}$ و $\alpha = ۰/۰۲۵, ۰/۰۵$ ۷۹

۴.۴ مقادیر تابع توزیع N_{TS} به ازای $\delta = (۰/۰۱)^{\frac{۱}{۲}}, (۰/۱)^{\frac{۱}{۲}}$ و $\alpha = ۰/۰۲۵, ۰/۰۵$ در روش دومرحله‌ای ۸۴

۵.۴ مقادیر$n^*(\delta, p)$ و $E_p(N_{ts}(\delta))$ و$Eff(\delta, p)$ برای $\delta = (۰/۰۱)^{\frac{۱}{۲}}, (۰/۱)^{\frac{۱}{۲}}$ و $\alpha = ۰/۰۲۵, ۰/۰۵$ ۸۶

۶.۴ مقادیر $E_p\{\hat{\rho}_{N_{ts}(\delta)}\}$، $MSE_p\{\hat{\rho}_{N_{ts}(\delta)}\}$ و $CP_p\{\hat{\rho}_{N_{ts}(\delta)}\}$ برای $\alpha = ۰/۰۵$ و $\delta^۲ = ۰/۰۱, ۰/۱$ ۸۷

۷.۴ مقایسه امید ریاضی حجم کل نمونه برای سه روش دنباله‌ای کلی، تعدیل یافته و دومرحله‌ای، به ازای مقادیر $\delta = (۰/۰۱)^{\frac{۱}{۲}}, (۰/۱)^{\frac{۱}{۲}}$، $\alpha = ۰/۰۲۵, ۰/۰۵$ و $k = ۱۵۴$ ۹۰

پیشگفتار

در بعضی از مسائل آماری لزومی به تعیین اندازه‌ی نمونه قبل از انجام آزمایش نیست بلکه در عمل نتایج آزمایش تعیین کننده‌ی اندازه‌ی نمونه است. یکی از روش‌های تحلیل چنین مسائل آماری، روش تحلیل دنباله‌ای است. در چنین مسائلی نمی‌توان با یک اندازه‌ی نمونه‌ی ثابت به استنباط در مورد پارامتر مورد نظر پرداخت، اما استفاده از تحلیل دنباله‌ای می‌تواند راه‌گشا باشد. برای مثال در برآورد $\frac{۱}{p}$ در دنباله‌ای از آزمایشات برنولی نمی‌توان با اندازه نمونه ثابت به یک برآوردگر نااریب دست یافت در صورتی که روش تحلیل دنباله‌ای این امکان را میسر می‌سازد. همچنین در بعضی از مسائل دیگر ممکن است روش‌های با اندازه‌ی نمونه‌ی ثابت برای استنباط مورد نظر موجود باشد اما به‌کار بردن روش تحلیل دنباله‌ای ما را به جواب‌های بهتری هدایت کند.

یک مسئله‌ی تحلیل دنباله‌ای دارای دو عنصر اصلی است. یکی از این عناصر قاعده‌ی توقف است که مشخص می‌کند که یک آزمایش با $(X_۱, X_۲, \cdots, X_n)$ نمونه‌ی تصادفی باید متوقف شود یا باید $X_{n+۱}$ برای هر $n \geq ۱$ به آن اضافه شود. عنصر دیگر قاعده‌ی تصمیم است که پس از تعیین قاعده‌ی توقف (N)، تابعی از یافته‌های $(X_۱, X_۲, \cdots, X_N)$ را برای تصمیم‌گیری در مورد پارامتر مورد نظر تعیین می‌کند. به‌طور کلی هدف تحلیل دنباله‌ای ارائه‌ی یک قاعده‌ی توقف و قاعده‌ی تصمیم مناسب است به‌طوری‌که بتواند در شرایطی که با توجه به طبیعت داده‌های مورد بررسی و مسئله استنباط مورد نظر تعیین می‌شود، صدق کند.

مسئله‌ی تحلیل دنباله‌ای در ابتدا در دهه‌ی ۱۹۴۰ به‌وسیله برنارد[۱] [۱۰] در سال ۱۹۴۴ و والد[۲] [۳۹] در سال ۱۹۴۵ با معرفی آزمون نسبت احتمال دنباله‌ای شروع شد و سپس والد و ولفویتس[۳] [۴۰]

[۱] Barnard

[۲] Wald

[۳] Wolfowitz

در سال ۱۹۴۸ بهینه بودن این آزمون را ثابت کردند. هالدان[۴][۱۵] و اشتاین[۵][۳۵] در سال ۱۹۴۵ نشان دادند که به کمک روش دنباله‌ای می‌توان بعضی از مسائل براورد نقطه‌ای و فاصله‌ای حل نشده را حل نمود. در خصوص تحلیل دنباله‌ای مقالات زیادی تاکنون توسط پژوهشگران منتشر شده است که برای مشاهده‌ی یک خلاصه و فهرستی از مراجع می‌توان به لای[۶][۱۹] در سال ۲۰۰۱ مراجعه کرد.

هدف از این پایان‌نامه برآورد بعضی توابع احتمال موفقیت p به کمک روش‌های مختلف دنباله‌ای و دومرحله‌ای در توزیع برنولی است. همچنین خواص مجانبی متغیرهای توقف حاصل از برآورد توابعی از احتمال موفقیت بررسی می‌شود.

این پایان‌نامه شامل چهار فصل است. در فصل اول چندین تعریف و قضیه‌ی مهم از آمار ریاضی و احتمال، که در این پایان‌نامه از آن‌ها استفاده شده یادآوری می‌شود. در فصل دوم، فاصله اطمینان دنباله‌ای و روش‌های مختلف قاعده‌ی توقف بیان می‌شود. در آخر نیز مقدمه‌ای از تحلیل‌های دنباله‌ای که تاکنون انجام شده، آورده می‌شود. فصل سوم به برآورد بعضی از توابع احتمال موفقیت تحت زیان خطی - نمایی و بررسی ویژگی‌های مجانبی مانند کارایی، سازگاری و نرمال بودن مجانبی متغیر توقف N، در توزیع برنولی می‌پردازد. در فصل چهارم برآورد لگاریتم نسبت بختی به‌وسیله‌ی روش دنباله‌ای محض، روش دنباله‌ای تعدیل یافته و روش دومرحله‌ای انجام بررسی می‌گردد. همچنین در پایان نیز سه روش با هم مقایسه شده و کاربرد نسبت بختی در قابلیت اعتماد شرح داده می‌شود.

---

[۴] Haldane

[۵] Stein

[۶] Lai