بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه بیرجند

دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (آنالیز)

موضوع :

نیم گروه های فشرده و مجموعه‌های مناسب

استاد راهنما:

دکتر محمدرضا میری

نگارنده :

اکرم بنائی

شهریور ۱۳۸۶

به نام خدا

فرم شماره ۵

دانشگاه بیرجند

مدیریت تحصیلات تکمیلی

تاریخ : ....

شماره : ....

پیوست : ....

صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تاییدات خداوند متعال جلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی کارشناسی ارشد **خانم اکرم بنایی** **به شماره**

دانشجویی: ۸۳۱۱۲۰۸۴ رشته: ریاضی گرایش: آنالیز دانشکده: علوم دانشگاه بیرجند

تحت عنوان : نیمگروههای فشرده و مجموعه های مناسب

به ارزش: ٦ واحد درساعت: ۱۲ روز: **یک شنبه** مورخ: **۸٦/٦/۲۵**

با حضور اعضای محترم هیات داوران متشکل از :

سمت	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
استاد راهنما	دکتر محمدرضا میری	استادیار	
داور اول	دکتر حاجی محمد محمدی نژاد	استادیار	
داور دوم	دکتر علیرضا جانفدا	استادیار	
نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر محمد حسین حسینی	استادیار	

تشکیل گردید نتیجه ارزیابی به شرح زیر مورد تایید قرار گرفت:

☑ قبول (با درجه: عالی و امتیاز: (۱۸٫۵) ☐ دفاع مجدد ☐ مردود

۱- عالی (۲۰-۱۸) ۲- بسیار خوب (۱۷/۹۹ – ۱۶) ۳- خوب (۱۵/۹۹ – ۱۴) ۴- قابل قبول (۱۳/۹۹ -۱۲)

۲۳ /۹/ ۱۳۸۷

تقدیم به :

پدر و مادر عزیزم که دعای خیرشان به زندگیم برکت می دهد ،

و به همسر مهربانم
که صمیمانه مرا همراهی می کند ،

و تقدیم به خواهران عزیزم : انیس و فرزانه

چکیده

هدف ما در این پایان نامه بررسی مفهوم مجموعه های مناسب در نیم گروه های فشرده است که برای این منظور نیم گروه های فشرده مورد نظر را در فصل اول معرفی کرده ایم.

مفهوم مجموعه مناسب در نیم گروه های فشرده در واقع توسیع همین مفهوم در گروه های فشرده است. لذا در فصل دوم ابتدا به بیان خواص و ویژگی های گروه های توپولوژیک فشرده می پردازیم و در بخش ۲-۶، به کمک تعدادی از لم ها وقضایا، در قضیه ۲-۶-۱۳ ثابت می کنیم که هر گروه توپولوژیک هاسدورف فشرده، زیرمجموعه مناسب دارد سپس در ۳-۱-۱ به بیان تعریف مجموعه مناسب در نیم گروه های فشرده می پردازیم و در مثال ۳-۱-۳ نشان می دهیم که لزوماً هر نیم گروه توپولوژیک فشرده، مجموعه مناسب ندارد. در بخش ۳-۲ قضایای مقدماتی در مورد مجموعه های مناسب را بیان می کنیم و سپس در فصل چهارم به عنوان نتایج اصلی به بررسی وجود یا عدم وجود مجموعه مناسب در نیم گروه های فشرده تعریف شده در فصل اول می پردازیم.

کلمات کلیدی: مجموعه مناسب، نیم گروه های فشرده، نیم گروه های ساده نشدنی.

فهرست مندرجات

۱ پیشنیاز ها و مقدمات ۱

۱-۱ مقدمات ۱

۱-۲ ایده آل های مینیمال ۱۲

۱-۳ نیم گروه خارج قسمتی ۱۸

۱-۴ رشته ها ۱۸

۱-۵ نیم گروه یک پارامتری ۱۹

۱-۶ نیم گروه مارپیچ ۲۰

۱-۷ نیم گروه استوانه ای ۲۰

۱-۸ نیم گروه ساده ۲۰

۱-۹ نیم گروه مثلثی ۲۱

۱-۱۰ O_نیم گروه ها ۲۱

۱-۱۱ نیم گروه های H_مرتب شده کلی ۲۳

۱-۱۲ زیر نیم گروه های آبلی همبند ۳۳

۱-۱۳ نیم گروه های ساده نشدنی ۳۹

۲ گروه های توپولوژیک و زیرمجموعه های مناسب ۴۳

۲-۱ زیرگروه های تابدار ۴۳

۲-۲ گروه های تقسیم پذیر ۴۴

۲-۳ دوگان گروه های توپولوژیک آبلی ۵۱

۲-۴ گروه های لی ۵۶

۲-۵ ساختار گروه های فشرده ۶۱

۲-۶ مجموعه های مناسب در گروه های فشرده ۷۶

۳ نیم گروه های توپولوژیک و مجموعه های مناسب ۸۳

۳-۱ معرفی مجموعه های مناسب ۸۳

۳-۲ خصوصیاتی از مجموعه های مناسب ۸۶

۴ نتایج اصلی ۹۶

پیوست A ۱۰۴
پیوست B ۱۰۶

فصل اول

مقدمات و پیشنیازها

در تهیه مطالب این فصل از [۱]، [۲]، [۳]، [۷]، [۹]، [۱۰]، [۱۱]، [۱۳] و [۱۴] استفاده شده است.

۱-۱ مقدمات:

۱-۱-۱ تعریف: یک نیم گروه ، زوج $(S,\cdot)$ است که S یک مجموعه غیر تهی و $(\cdot)$ عمل دوتایی $S\times S\to S : (s,t)\to st$ شرکت پذیر است. شرکت پذیری یعنی این که:

$$r\cdot(s\cdot t)=(r\cdot s)\cdot t \qquad (r,s,t\in S)$$

عمل دوتایی روی S معمولاً ضرب نامیده می شود و $s\cdot t$ حاصلضرب s و t نامیده می شود.

۱-۱-۲ تعریف: اگر S یک نیم گروه با عنصر همانی باشد، آن گاه S یک تکواره نامیده می شود.

۱-۱-۳ تعریف: اگر S یک نیم گروه باشد، $e \in S$ یک عنصر خودتوان نامیده می شود هر گاه $e^2 = e$. نیم گروه S، نیم گروه خودتوان نامیده می شود هر گاه تمام عناصر آن خودتوان باشد. نیم گروه S نیم شبکه نامیده می شود هر گاه یک نیم گروه خودتوان جابجایی باشد.

۱-۱-۴ تعریف: فرض کنیم S، یک نیم گروه و یک فضای توپولوژیک باشد. S یک نیم گروه توپولوژیک است هر گاه ضرب $S \times S \to S$: $(s,t) \to st$، پیوسته باشد.

۱-۱-۵ قضیه: اگر S یک نیم گروه فشرده باشد، آن گاه $E(S)$ (مجموعه خودتوان های S) بسته است.

اثبات: فرض کنیم a یک نقطه حدی $E(S)$ باشد. پس شبکه $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \subseteq E(S)$ موجود است که $x_\alpha \to a$ در نتیجه $x_\alpha^2 \to a^2$. از طرفی چون x_αها خودتوان هستند پس $x_\alpha^2 = x_\alpha$ به ازای هر $\alpha \in A$. پس $x_\alpha^2 = x_\alpha \to a$. حال از یکتایی حد نتیجه می گیریم: $a^2 = a$ در نتیجه $a \in E(S)$ و $E(S)$ بسته است.□

۱-۱-۶ تعریف: فرض کنیم S یک نیم گروه باشد. خودتوان $e \in S$ یک خودتوان اولیه نامیده می شود هرگاه یکه دوطرفه برای خودتوان های دیگر S نباشد.

۱-۱-۷ تعریف: فرض کنیم A، زیرمجموعه غیر تهی از نیم گروه S باشد. اشتراک همه زیرگروه های S شامل A، زیرنیم گروه تولید شده به وسیله A نامیده می شود و به وسیله $\langle A \rangle$ نمایش داده می شود. اگر $S = \langle A \rangle$، می گوییم S به وسیله A تولید شده است. زیر نیم گروه تولید شده به وسیله A، مجموعه همه حاصلضرب ها به صورت $s_1 s_2 \ldots s_n$ است که $s_i \in A, 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}$ واضح است که $\langle A \rangle$، کوچکترین زیر نیم گروه S شامل A است.

۱-۱-۸ گزاره: هر زیر نیم گروه از یک گروه، حذف پذیر است.

اثبات: فرض کنیم $s,r,t\in S$ زیر نیم گروه ی از گروه G باشد و داشته باشیم: $rs=ts$. چون $s\in S$ پس $s\in G$ و s^{-1} موجود است. لذا: $rss^{-1}=tss^{-1}$ پس $r=t$.

اگر $sr=st$ آنگاه باز هم نتیجه می شود $r=t$ پس S، حذف پذیر است.□

۱-۱-۹ تعریف: تکواره توپولوژیک S، تک مولد نامیده می شود، هر گاه $S=\overline{\{1,x,x^2,...\}}$، یا به عبارتی اگر $\Gamma(x)=\overline{\{x,x^2,...\}}$ برای $x\in S$، آنگاه $S=\{1\}\bigcup\Gamma(x)$. عنصر x، مولد S نامیده می شود.

۱-۱-۱۰ تعریف: اگر S یک تکواره و $X\subseteq S$ باشد. مرکز ساز X در S را با $Z(X,S)$ نمایش می دهیم و به صورت $Z(X,S)=\{s\in S\mid xs=sx \quad \forall x\in X\}$ تعریف می شود.

$Z(X,S)_0$، مولفه همانی $Z(X,S)$ را نمایش می دهد.

۱-۱-۱۱ تعریف: نیم گروه S، نرمال نامیده می شود هر گاه برای هر $x\in S$، $Sx=xS$.

۱-۱-۱۲ تعریف: اگر S یک نیم گروه و A زیرمجموعه ای از S باشد، آنگاه نرمال ساز A را با $N(A)$ نمایش می دهیم و به صورت $N(A)=\{x\in S\mid xA=Ax\}$ تعریف می کنیم.

۱-۱-۱۳ تعریف: فرض کنیم S یک نیم گروه یکدار فشرده با خودتوان e باشد. گروه یکه های S را با H نمایش می دهیم و به صورت $H=\{h\in S\mid \exists h'\in S \ st \ hh'=h'h=1\}$ تعریف می کنیم.

$H(e)$ گروه یکه های eSe است. به آسانی ثابت می شود که $H(e)=\{t\in eSe : e\in St\bigcap tS\}$.

۱-۱-۱۴ قضیه: فرض کنیم S یک نیم گروه باشد و $e\in E(S)$. آنگاه $H(e)$، زیرگروه S با همانی e است.

اثبات: فرض کنیم T زیر نیم گروه تولید شده بوسیله $H(e)$ باشد. چون $se=es=s$ برای هر $s\in H(e)$ پس e عنصر همانی T است. فرض کنیم $s\in T$. آنگاه $s=s_1s_2...s_n$ که

$s_i \in H(e), i=1,2,\dots,n,\ n\in \mathrm{N}$. برای هر i، $t_i \in H(e)$ را طوری انتخاب می کنیم که $s_i t_i = t_i s_i e$ و $t = t_n \dots t_2 t_1$. آنگاه $st = ts = s$. در نتیجه T یک گروه است. بنابراین $H(e)=T$.□

۱-۱-۱۵ یادآوری: رابطه $(\leq)$ روی S را رابطه ترتیبی جزئی می نامیم هر گاه منعکس، متعدی و پادمتقارن باشد و آن را یک رابطه (شبه ترتیب) می نامیم هر گاه منعکس و متعدی باشد.

۱-۱-۱۶ تعریف: نیم گروه مرتب شده خطی (کلی)، سه تایی $(S,\cdot,\leq)$ است به طوری که $(S,\cdot)$ نیم گروه باشد و $(S,\leq)$ یک مجموعه مرتب شده خطی (کلی) باشد و نگاشت های انتقال چپ و راست، حافظ ترتیب باشند یعنی:

$$a,x,y\in S,\ \ x\leq y \Rightarrow ax\leq ay,\ \ xa\leq ya$$

۱-۱-۱۷ تعریف: یک O-همریختی بین نیم گروه های مرتب شده کلی، یک همریختی نیم گروه ی است که حافظ ترتیب باشد.

۱-۱-۱۸ تعریف: S یک گروه توپولوژیک است، هر گاه S یک گروه باشد و یک نیم گروه توپولوژیک باشد و همچنین نگاشت معکوس $s\mapsto s^{-1} : S\to S$ پیوسته باشد.

۱-۱-۱۹ قضیه: فرض کنیم G یک گروه همبند فشرده و A یک زیرگروه همبند آبلی فشرده باشد. آنگاه مرکز ساز A در G همبند است.

اثبات: $(2.15)\ App.\ I\ [1]$.□

۱-۱-۲۰ تعریف: اگر G یک گروه و B, A زیرمجموعه هایش باشند، آنگاه $Comm(A,B)$، زیرگروه تولید شده به وسیله همه $Comm(a,b)=aba^{-1}b^{-1}$ را نمایش می دهد. به ویژه $Comm(G,G)$ یک زیرگروه نرمال است، که گروه جابجاگر G نامیده می شود و با G' نمایش داده می شود.

۱-۱-۲۱ تعریف:

(آ) اگر H,G دو گروه توپولوژیک آبلی باشند، $Hom(G,H)$، گروه آبلی همه همریختی های پیوسته از G به H را نمایش می دهد. $Hom(G,H)$ را با توپولوژی همگرایی یکنواخت روی مجموعه های فشرده G مجهز می کنیم.

(ب) برای هر گروه آبلی فشرده G و هر مورفیسم $f:S\to T$ از گروه های توپولوژیک آبلی تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned} &Hom(G,f):Hom(G,S)\to Hom(G,T) && Hom(G,f)\varphi=f\circ\varphi \\ &Hom(f,G):Hom(T,G)\to Hom(S,G) && Hom(f,G)\varphi=\varphi\circ f \end{aligned}$$

۱-۱-۲۲ تعریف:

(آ) فرض کنیم J یک مجموعه مستقیم باشد، یعنی یک مجموعه با رابطه $\le$ با خواص انعکاسی، تعدی و پاد متقارنی، به طوری که هر زیرمجموعه ناتهی، کران بالا داشته باشد. یک سیستم تصویری از گروه های توپولوژیک روی J، یک خانواده از مورفیسم های $\{f_{jk}:G_k\to G_j \mid (j,k)\in J\times J,\ j\le k\}$ روی گروه های توپولوژیک G_j است، که در شرایط زیر صدق می کنند:

$$(i)\ f_{jj}=id_{G_j} \qquad \forall j\in J$$
$$(ii)\ f_{jk}\circ f_{kl}=f_{jl} \qquad \forall j,k,l\in J \qquad j\le k\le l$$

(ب) برای یک سیستم تصویری از گروه های توپولوژیک، گروه توپولوژیک P را به صورت $P=\prod_{j\in J}G_j$ تعریف می کنیم. $G=\{(g_j)_{j\in J}\in P \mid (\forall j,k\in J)\quad j\le k\Rightarrow f_{jk}(g_k)=g_j\}$ یک زیرگروه بسته از P است.

(پ) اگر $P=\{f_{jk}:G_k\to G_j \mid (j,k)\in J\times J,\ j\le k\}$، یک سیستم تصویری از گروه های توپولوژیک باشد، آنگاه گروه G در قسمت (ب)، حد تصویری P نامیده می شود و می نویسیم:

$G = \lim P$. نماد $G = \varprojlim_j G_j$ نیز مرسوم است. مورفیسم های $f_j : G \to G_j$، نگاشت های حدی نامیده می شوند و مورفیسم های $f_{kj} : G_k \to G_j$ نگاشت های پیوندی نامیده می شوند.

(ت) یک سیستم تصویری از گروه های توپولوژیک، که همه نگاشت های پیوندی و نگاشت های حدی اش، پوشا باشند، سیستم تصویری اکید نامیده می شود و حد این سیستم، حد تصویری اکید نامیده می شود.

۱-۱-۲۳ گزاره:

آ) فرض کنیم $G = \varprojlim_j G_j$ حد تصویری گروه های فشرده باشد و $Nr = \{\ker f_j \mid j \in J\}$. آنگاه Nr یک پایه از زیرگروه های نرمال فشرده همگرا به 1 است (یعنی برای هر همسایگی U از 1، $N_0 = \ker f_{j_0} \in Nr$ موجود است به طوری که برای هر $j \geq j_0$ داریم $\ker f_j \subseteq U$).

ب) فرض کنیم G یک گروه فشرده باشد با پایه Nr از زیرگروه های نرمال فشرده که $\bigcap Nr = \{1\}$. برای $M \subseteq N$ در Nr فرض کنیم $f_{NM} : G/M \to G/N : gM \to gN$ نمایش مورفیسم طبیعی باشد. آنگاه f_{NM} یک سیستم تصویری اکید تشکیل می دهد که حدش با G یکریخت است تحت نگاشت $g \mapsto (gN)_{N\in Nr} : G \to \varprojlim_N G/N$. با این یکریختی، نگاشت های حدی با نگاشت خارج قسمتی $G \to G/N$ معادل است.

اثبات: آ) به ازای هر j، $\ker f_j$ زیرگروه نرمال فشرده است. چون $i, j \leq k$ نتیجه می دهد $\ker f_k \subseteq \ker f_i \bigcap \ker f_j$ و J مستقیم است پس Nr یک پایه است. برای هر $j \in J$ و همسایگی U از 1 داریم $f_j = f_j^{-1}(1) \subseteq f_j^{-1}(U)$. لذا حکم برقرار است.

ب) به آسانی ثابت می شود که خانواده همه $f_{NM} : G/M \to G/N$ برای $M \subseteq N$ در Nr، یک سیستم تصویری اکید از گروه های فشرده تشکیل می دهد. عنصر $(g_N N)_{N\in Nr} \in \prod_N G/N$ با

$g_N \in G$ در L $(\lim G/N)$ قرار دارد اگر و فقط اگر برای هر $M \supseteq N$ در Nr داشته باشیم $f_{MN}(g_N N) = g_M M$. در نتیجه $g_M{}^{-1} g_N \in M$. بنابراین برای هر $g \in G$ به ویژه $(gN)_{N\in Nr} \in L$. هسته مورفیسم $\varphi = (g \to (gN)_{N\in Nr}) : G \to L$ ، $\bigcap Nr = \{1\}$ است بنابراین φ یک به یک است. حال فرض کنیم $\gamma = (g_N N)_{N\in Nr} \in L$، آنگاه $\{g_N N | N \in Nr\}$ یک پایه از مجموعه های فشرده در G است، که اگر $M \supseteq N$ آنگاه $g_M{}^{-1} g_N \in M$ و بنابراین $g_N \in g_M M \bigcap g_N N$. لذا اشتراکش شامل g است و $gN \in g_N N$. پس $\varphi(g) = \gamma$. در نتیجه φ پوشاست. لذا φ یک یکریختی از گروه های فشرده است.

اگر $q_N : G \to G/N$ نگاشت خارج قسمتی باشد و $f_N : L \to G/N$ نگاشت حدی $f_N((g_N N)_{N\in Nr}) = g_N N$ باشد، آنگاه $q_N = f_N \circ \varphi$ و این اثبات گزاره را کامل می کند.□

۱-۱-۲۴ تعریف: گروه همه ماتریس های معکوس پذیر $n\times n$ روی میدان K را با $Gl(n,K)$ نمایش می دهیم و آن را گروه خطی کلی (عمومی) از مرتبه n می نامیم.

اگر R^n را به عنوان یک فضای هیلبرت با ضرب اسکالر $(x|y) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ برای هر $x, y \in R^n$ در نظر بگیریم، آنگاه مجموعه همه $g \in Gl(n,K)$ که برای هر $x \in R^n$ در شرط $(gx|gx) = (x|x)$ صدق می کند را زیرگروه متعامد R^n می نامیم و با $o(n)$ نمایش می دهیم.

۱-۱-۲۵ نتیجه: هر گروه فشرده، حد تصویری اکید از سیستم تصویری گروه هایی است که هر کدام با یک زیرگروه بسته از یک گروه متعامد یکریخت هستند.

اثبات: فرض کنیم G یک گروه فشرده باشد و فرض کنیم Nr مجموعه همه هسته های مورفیسم های $f : G \to o(n)$ برای $n \in \mathbb{N}$ باشد. همه این گروه ها، زیرگروه های نرمال فشرده هستند و $\bigcap Nr = \{1\}$. حال فرض کنیم $N_1, N_2 \in Nr$. آنگاه مورفیسم های $f_j : G \to o(n_j)$ ، $j = 1,2$ و $N_j = \ker f_j$. فرض کنیم $i : o(n_1)o(n_2) \to o(n_1 + n_2)$ مورفیسمی باشد که در فرم ماتریسی به

صورت $(T_1,T_2)\mapsto\begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix}$ داده می شود. تابع $f:G\to o(n_1+n_2)$ را به صورت $f(g)=i(f_1(g),f_2(g))$ تعریف می کنیم. آنگاه $\ker f=\ker f_1\bigcap\ker f_2$. در نتیجه $N_1\bigcap N_2\in Nr$. بنابراین Nr یک پایه است و G بنا به گزاره ۱-۱-۲۳، حد تصویری اکید G/Nها می باشد و واضح است که برای هر $n\in Nr$، $G/N\cong o(n)$.□

۱-۱-۲۶ تعریف: فرض کنیم G یک گروه توپولوژیک باشد. می گوییم G زیرگروه نرمال کوچک ندارد، هرگاه همسایگی U از عنصر همانی وجود داشته باشد به طوری که برای هر زیرگروه نرمال H از G که $H\subseteq U$ نتیجه شود $H=\{1\}$.

۱-۱-۲۷ لم: فرض کنیم $G=\lim\limits_{j}G_j$، حد تصویری اکید گروه های فشرده باشد به طوری که G زیرگروه نرمال کوچک نداشته باشد. آنگاه وجود دارد $j\in J$ به طوری که $G\cong G_j$.

اثبات: از قضیه ۱-۱-۲۳(آ) می دانیم که پایه‌ی Nr از همه هسته های $\ker f_j$ از نگاشت های حدی $f_j:G\to G_j$، همگرا به 1 است. حال فرض کنیم U همسایگی همانی باشد که $\{1\}$ تنها زیرگروه نرمال است. آنگاه $j\in J$ وجود دارد به طوری که $\ker f_j\subseteq U$. در نتیجه $\ker f_j=\{1\}$. پس f_j یک به یک است. چون حد تصویری اکید داریم پس f_j پوشاست. بنابراین $f_j:G\to G_j$ یک یکریختی است.□

۱-۱-۲۸ تعریف:

(آ) تابع $f:X\to Y$ بین فضاهای توپولوژیک، نگاشت پوشش دهنده یا به طور خلاصه پوشش دهنده نامیده می شود هر گاه Y پوشش باز $\{U_j|j\in J\}$ را داشته باشد، به طوری که برای هر $j\in J$ فضای گسسته غیر تهی F_j و همیومورفیسم $h_j:F_j\times U_j\to f^{-1}(U_j)$ وجود داشته باشد که دیاگرام زیر جابجایی است:

$$
\begin{array}{ccc}
F_j \times U_j & \xrightarrow{h_j} & f^{-1}(U_j) \\
pr_2 \downarrow & & \downarrow f|_{f^{-1}(U_j)} \\
U_j & \xrightarrow[id_{U_j}]{} & U_j
\end{array}
$$

می گوییم $f^{-1}(U_j)$ به طور سازگار با $F_j \times U_j$ همیومورفیک است و Y را فضای پایه پوشش دهنده می نامیم.

(ب) تابع $f: G \to H$ بین گروه های توپولوژیک، مورفیسم پوشش دهنده نامیده می شود هرگاه به طور جبری، همریختی باشد و یک پوشش دهنده از فضای توپولوژیک باشد.

چون به وضوح پوشش دهنده ها پیوسته، پوشا و باز هستند، پس هر مورفیسم پوشش دهنده همیشه یک مورفیسم باز از گروه های توپولوژیک است.

۱-۱-۲۹ تعریف:

(آ) یک فضای نوکدار، زوج (X,x) از یک فضای توپولوژیک و یک نقطه پایه ای $x \in X$ است و یک مورفیسم از فضاهای نوکدار $f:(X,x) \to (Y,y)$، یک تابع پیوسته $f: X \to Y$ است به طوری که $f(x) = y$. این مورفیسم، همچنین نگاشت پیوسته حافظ نقطه پایه ای نامیده می شود.

(ب) یک پوشش دهنده از فضاهای نوکدار، یک پوشش دهنده بین فضاهای نوکدار است که حافظ نقطه پایه ای باشد.

(پ) اگر $p:(E,e) \to (B,b)$ یک پوشش دهنده از فضاهای نوکدار باشد و $f:(X,x_0) \to (B,b)$ یک مورفیسم فضاهای نوکدار باشد، آنگاه تابع $F: X \to E$، بالابرنده f از روی p است هرگاه یک مورفیسم از فضاهای نوکدار باشد و $f = p \circ F$.

$$\begin{array}{ccc}(X,x_0) & \xrightarrow{F} & (E,e)\\ id_X \downarrow & & \downarrow p\\ (X,x_0) & \xrightarrow[f]{} & (B,b)\end{array}$$

۱-۱-۳۰ تعریف: فضای توپولوژیک X، به طور ساده همبند است هر گاه همبند باشد و خاصیت عمومی زیر را داشته باشد:

برای هر نگاشت پوشش دهنده $p:E\to B$ بین فضاهای توپولوژیک و هر نقطه $e_0\in E$ و هر تابع پیوسته $f:X\to B$ که $p(e_0)=f(x_0)$، نگاشت $\tilde{f}:X\to E$ وجود داشته باشد به طوری که $\tilde{f}(x_0)=e_0,\ p\circ\tilde{f}=f$.

۱-۱-۳۱ تعریف:

دو تابع پیوسته $f,g:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ از فضاهای نوکدار، هم عنوان نامیده می شوند هر گاه تابع پیوسته $H:[0,1]\times X\to Y$ موجود باشد به طوری که:

$$H(0,x)=f(x)\quad ,H(t,x_0)=y_0\quad ,H(1,x)=g(x)\qquad \forall t\in[0,1],x\in X$$

۱-۱-۳۲ تعریف: فرض کنیم I بازه یکه نوکدار $([0,1],0)$ و $S^1=\{z\in C \mid |z|=1\}$ باشد و (Y,y_0) یک فضای نوکدار باشد.

تابع پیوسته $f:(S^1,1)\to(Y,y_0)$ یک حلقه در y_0 نامیده می شود هرگاه قابل انقباض باشد یعنی هم عنوان با مورفیسم ثابت فضاهای نوکدار باشد.

۱-۱-۳۳ تعریف: فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد و $a,b\in X$. تابع پیوسته $f:[a,b]\to X$ را یک مسیر در X می نامیم.

X را همبند مسیری می نامیم، هرگاه بین هر دو نقطه $x_1,x_2\in X$ بتوان مسیری را که تماماً در X باشد پیدا کرد.

۱-۱-۳۴ تبصره: توجه داریم که رابطه‌ی هم عنوان بودن بین مسیرهای با ابتدا و انتهای یکسان، یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. برای هر نقطه x در فضای نوکدار همبند مسیری (X,x_0) مجموعه $F(x)$ را وابسته می سازیم، یعنی مجموعه کلاس های $[\alpha]$ از مسیر های هم عنوان $\alpha:[0,1]\to X$ از $x_0=\alpha(0)$ تا $x=\alpha(1)$. می نویسیم: $\widetilde{X}=\bigcup_{x\in X}F(x)$ و قرار می دهیم: $p:\widetilde{X}\to X:P([\alpha])=\alpha(1)=x$.

حال فرض کنیم X پوشش باز $\{U_j \mid j\in J\}$ داشته باشد به طوری که هر U_j همبند مسیری است و هر جلقه در هر U_j قابل انقباض باشد؛ به این چنین فضاهایی، به طور ساده همبند مسیری موضعی گفته می شود. برای هر $j\in J$، انتخاب می کنیم $u_j\in U_j$. برای هر $f=[\alpha]\in F_j\overset{def}{=}F(u_j)$ و $u\in U_j$، u_j و u را به وسیله مسیر ε در U_j به هم وصل می کنیم. هر مسیر دیگر از u_j به u بنا به فرض در U_j، با مسیر ε هم عنوان است. فرض کنیم β مسیر نتیجه شده با حرکت از x_0 به u_j به وسیله α و از u_j به u به وسیله ε را نمایش دهد. می نویسیم $h_j(f,u)=[\beta]\in F(u)$. آنگاه $p(h_j(f,u))=u$. بنابراین $h_j:F_j\times U_j\to p^{-1}(U_j)$ یک تابع خوش تعریف است. . اگر $[\gamma]\in p^{-1}(u_j)$، آنگاه $u=p([\gamma])=\gamma(1)$ و مسیر η در U_j از u به u_j موجود است که تا حد هم عنوانی یکتاست. مسیر δ با حرکت از x_0 به u به وسیله γ و از u به u_j به وسیله η نتیجه می شود. آنگاه $f\overset{def}{=}[\delta]$ یک عنصر از $F(u_j)=f_j$ است و $(f,u)=h^{-1}(u)$. بنابراین h_j دو سویی است. در نتیجه $p:\widetilde{X}\to X$ یک نگاشت پوشش دهنده است.

۱-۱-۳۵ تعریف: پوشش دهنده $(\widetilde{X},\widetilde{P})$ که $\widetilde{P}:\widetilde{X}\to X$، پوشش دهنده عمومی نامیده می شود هرگاه $\widetilde{X}$ به طور ساده همبند باشد.

۱-۱-۳۶ قضیه: (قضیه اساسی گروه های آبلی متناهیاً تولید شده)