دانشگاه شهید چمران اهواز

دانشکده مهندسی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد مکانیک

گرایش تبدیل انرژی

مدل نمودن پاسخ حرارتی گذرا در محیط متخلخل با استفاده از مدل ساختاری کاتانئو تعمیم‌یافته

استاد راهنما

دکتر عزیز عظیمی

استاد مشاور

دکتر مرتضی بهبهانی‌نژاد

نگارنده

اشکان چاوشی فروشانی

اسفندماه 91

بسم الله الرحمن الرحیم

بسمه تعالی

دانشگاه شهید چمران اهواز

دانشکده مهندسی

(نتیجه ارزشیابی پایان‌نامه ارشد)

پایان‌نامه آقای **اشکان چاوشی فروشانی** دانشجوی رشته **مکانیک** گرایش **تبدیل انرژی** دانشکده **مهندسی** به شماره دانشجویی 8924807

با عنوان:

مدل نمودن پاسخ حرارتی گذرا در محیط متخلخل

با استفاده از مدل ساختاری کاتانئو تعمیم‌یافته

جهت اخذ مدرک: **کارشناسی ارشد** در تاریخ: توسط هیئت داوران مورد ارزشیابی قرار گرفت و با درجه تصویب گردید.

1. **اعضای هیئت داوران**:	**رتبه علمی**	**امضاء**
استاد راهنما: **دکتر عزیز عظیمی**	**استادیار**	.....
استاد مشاور: **دکتر مرتضی بهبهانی‌نژاد**	**دانشیار**	.....
استاد داور:		.....
استاد داور:		.....
نماینده تحصیلات تکمیلی:		.....
2. مدیر گروه: **دکتر افشین قنبرزاده**	**استادیار**	.....
3. معاون پژوهشی و تحصیلات تکمیلی دانشکده:		.....
4. مدیر تحصیلات تکمیلی دانشگاه: **دکتر رحیم پیغان**	**استاد**	.....

قدردانی

شکر و سپاس ایزد یکتا را که همواره و به‌ویژه در این دوره، مطمئن‌ترین و موثرترین تکیه‌گاه من در رویارویی با طوفان مسائل و مشکلات بود. تنها اوست که تمامی مشکلات را بر من آسان می‌سازد و تنها اوست که مرا از گرداب حوادث رهایی می‌بخشد.

در اینجا فرصت مغتنم است تا از کلیه مساعدت‌ها، راهنمائی‌ها و پشتیبانی‌های ارزنده استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر عزیز عظیمی نهایت تشکر و قدردانی را داشته باشم. تشکر و قدردانی نه‌تنها به‌دلیل مشاوره‌های علمی و پیگیری‌های ایشان در مراحل انجام این پروژه که به‌دلیل کمک‌های ارزنده ایشان در تمامی مسائلی که گریبان‌گیر من بوده‌است. از استاد مشاور خود جناب آقای دکتر مرتضی بهبهانی‌نژاد بدلیل مشاوره‌های ارزنده ایشان نهایت تشکر را دارم.

تشکر و قدردانی ویژه من از پدر و مادر فداکارم است که در تمامی دوران تحصیلی با تامین امنیت و آسایش فکری زمینه را برای پیشرفت و ترقی بنده آماده نمودند. بی‌شک بدون تشویق‌ها و حمایت‌های مادی و معنوی ایشان پیمودن این مسیر بسیار سخت و تقریبا ناممکن می‌شد.

تقدیم به:

پدر و مادر دلسوز

و

خواهر عزیزم

فهرست مطالب

فرم ارزشیابی ..... ب
قدردانی ..... ب
اهدانامه ..... ت
فهرست مطالب ..... ث
فهرست شکل‌ها ..... خ
فهرست جداول ..... د
فهرست علامت‌ها و اختصارها ..... ذ
چکیده پایان‌نامه به زبان فارسی ..... ز

فصل اول

مقدمه و مروری بر پژوهش‌های پیشین 1
1-1 مقدمه 1
2-1 مروری بر پژوهش‌های پیشین 3
1-2-1 مشاهدات تجربی انتقال حرارت غیرفوریه‌ای 3
2-2-1 روش های حل معادلات دیفرانسیل کسری 5
3-2-1 روش‌های معکوس در انتقال حرارت غیرفوریه‌ای 10

فصل دوم

حساب کسری 14
1-2 مقدمه 14
2-2 مشتق گرانوالد-لتنیکف 15
3-2 مشتق ریمن-لیوویل 15
4-2 مشتقات کسری کاپوتو 17
5-2 لاپلاس مشتقات کسری 20
1-5-2 لاپلاس مشتق کسری ریمن-لیوویل 20
2-5-2 لاپلاس مشتق کاپوتو 20

2-5-3 لاپلاس مشتق کسری گرانوالد-لتنیکف 21
2-6 تبدیل فوریه مشتقات کسری: 21

فصل سوم

انتقال حرارت غیرفوریه‌ای 23
3-1 مقدمه 23
3-2 مدل ساختاری کاتانئو 29
3-3 مدل ساختاری بر پایه مفهوم تاخیر زمانی 30
3-3-1 مدل تاخیر زمانی یگانه 31
3-3-2 مدل تاخیر زمانی دوگانه 31
3-3-3 مدل ترکیبی C و F 33
3-4 شرایط تعادل و عدم تعادل حرارت محلی 35

فصل چهارم

معادله انتقال حرارت هدایت از نوع کسری 37
4-1 مقدمه 37
4-2 معادله هدایت حرارت کسری 38
4-3 مدل‌های کاتانئوی کسری 40
4-3-1 معادله کلی کاتانئو نوع اول 42
4-3-2 معادله کلی کاتانئو نوع دوم 43
4-3-3 معادله کلی کاتانئو نوع سوم 44

فصل پنجم

مسئله انتقال حرارت فروپخشی معکوس 46
5-1 مقدمه 46
5-2 اساس تحلیل معکوس 46
5-2-1 معیار توقف 50
5-2-2 الگوریتم حل 51
5-3 معادله هدایت حرارتی کسری با فرض تعادل حرارت محلی 52
5-3-1 مدل انتقال حرارت غیرفوریه‌ای فروپخشی 52
5-3-2 معادله کاتانئو 53
5-4 معادله هدایت حرارتی کسری با فرض عدم تعادل حرارت محلی 55

5-5 محاسبه ماتریس ضرایب حساسیت 57

فصل ششم

نتایج عددی 62

1-6 مقدمه 62

2-6 شرایط آزمایش 62

6-2-1 فرآیند آزمایش 64

6-2-2 نتایج آزمایش 65

6-2-3 شرایط تعادل حرارت محلی 66

6-2-4 شرایط عدم تعادل حرارت محلی 68

3-6 حل معکوس مسئله انتقال حرارت فروپخشی 70

6-3-1 شرایط تعادل حرارت محلی 71

6-3-2 شرایط عدم تعادل حرارت محلی 79

فصل هفتم

نتیجه‌گیری و پیشنهادها 85

1-7 جمع‌بندی و نتیجه‌گیری 85

2-7 پیشنهادات 86

مراجع 88

پیوست الف 96

چکیده پایان‌نامه به زبان انگلیسی 111

فهرست شکل‌ها

شکل 3-1: پخش ذرات در جهت گرادیان کمتر 23
شکل 3-2: مثالی برای پخش ذرات جوهر در آب 24
شکل 3-3: مثالی از پخش حرارت در راستای افقی در یک استوانه باریک [71] 25
شکل 6-1: تصویر شماتیک از وضعیت آزمایش 63
شکل 6-2: مقایسه نتایج بدست آمده از نتایج تجربی و نتایج بدست آمده از مدل فوریه در مکان‌های مختلف ... 67
شکل 6-3: مقایسه نتایج تجربی و نتایج مدل‌سازی انتقال حرارت غیرفوریه‌ای فروپخشی 72
شکل 6-4: تغییرات مرتبه کسری (a) نسب به مکان 73
شکل 6-5: نمودار ضرایب ژاکوبین برای مدل انتقال حرارت غیرفوریه‌ای فروپخشی نسبت به زمان 74
شکل 6-6: نمودار ضرایب ژاکوبین نسبت به زمان بی‌بعد (Fo) برای مکان سنسور $x=13.2mm$ 74
شکل 6-7: نمودار ضرایب ژاکوبین نسبت به زمان بی‌بعد (Fo) برای مکان سنسور $x=19.2mm$ 75
شکل 6-8: نمودار ضرایب ژاکوبین نسبت به زمان بی‌بعد (Fo) برای مکان سنسور $x=27.2mm$ 75
شکل 6-9: مقایسه نتایج تجربی و نتایج بدست آمده از مدل کاتانئو تعمیم یافته 77
شکل 6-10: تغییرات مرتبه کسری (a) نسب به مکان 77
شکل 6-11: نمودار ضرایب ژاکوبین نسبت به زمان بی‌بعد (Fo) برای مکان سنسور $x=9.6mm$ 78
شکل 6-12: نمودار ضرایب ژاکوبین نسبت به زمان بی‌بعد (Fo) برای مکان سنسور $x=13.2mm$ 78
شکل 6-13: نمودار ضرایب ژاکوبین نسبت به زمان بی‌بعد (Fo) برای مکان سنسور $x=19.2mm$ 79
شکل 6-14: نمودار ضرایب ژاکوبین نسبت به زمان بی‌بعد (Fo) برای مکان سنسور $x=27.2mm$ 79
شکل 6-15: مقایسه نتایج تجربی و نتایج بدست آمده از مدل انتقال حرارت غیرفوریه‌ای فروپخشی 80
شکل 6-16: مقایسه بین ضرایب ژاکوبین مرتبه کسری برای فاز سیال و جامد 83
شکل 6-17: مقایسه بین سایر ضرایب ژاکوبین در مکان $x=9.6$ 84
شکل 6-18: مقایسه بین نتایج تجربی و نتایج بدست آمده از مدل انتقال حرارت غیرفوریه‌ای فروپخشی 84

فهرست جداول

جدول 6-1: عوامل مورد نیاز در آزمایش که بصورت تجربی محاسبه شده‌اند 65
جدول 6-2: مقادیر نهایی مرتبه کسری a و ضریب گرادیان دما برای مدل انتقال حرارت فروپخشی 72
جدول 6-3: مقادیر نهایی مرتبه کسری a و ضریب گرادیان دما برای مدل کاتانئو تعمیم یافته 76
جدول 6-4: مقادیر بهینه پارامترهای تخمین‌زده شده در مسئله هدایت حرارتی معکوس 81
جدول 6-5: نرم اختلاف دمای بین فاز سیال و جامد و نرم خطای دمای محاسباتی و تجربی 82

فهرست علامت‌ها و اختصارها

علائم	مفهوم
D^{a}_{RL}	عملگر مشتق کسری ریمن-لیوویل
w	ضریب وزنی در مشتق گرانوالد-لتنیکف
a	مرتبه کسری
E	تابع میتاژ لفلر
${}^{C}_{a}D$	عملگر مشتق کسری کاپوتو
Γ	تابع گاما
L	لاپلاس
Q	شار حرارتی
Q_t	نرخ انتقال حرارت
g	ظرفیت حرارتی ویژه
u	دما
m	جرم المان
r	چگالی المان
A	سطح المان
D	دانسیته ضریب پخش
t	تاخیر زمانی
K	ضریب هدایت حرارتی
q_{gen}	میزان حرارت تولیدی
c_T	سرعت انتشار امواج حرارتی
t_q	تاخیر زمانی در شار حرارتی
t_t	تاخیر زمانی در گرادیان دما

z	تاخیر زمانی
J	شار
c	غلظت
∂_t^q	عملگر مشتق کسری
f	ضریب تخلخل
k_e	ضریب هدایت حرارتی معادل
r_h	شعاع هیدرولیکی
L	ضخامت محیط متخلخل
d	قطر گوی‌ها در محیط متخلخل
Fo	عدد فوریه
q	دمای بی‌بعد
t_x	تاخیر زمانی در گرادیان دما برای حالت عدم تعادل حرارت محلی
T^m	دمای سنسورها
$S(P)$	نرم خطا در مسئله معکوس
P	پارامتر مجهول در مسئله معکوس
$J(P)$	ماتریس ژاکوبین
Ω	ماتریس قطری مستهلک‌کننده نوسانات در حل مسئله معکوس
m	ضریب مستهلک‌کننده نوسانات در حل مسئله معکوس
e	تلرانس خطا

چکیده

نام خانوادگی: **چاووشی فروشانی**	نام: **اشکان**	شماره دانشجویی: 8924807
عنوان پایان‌نامه: **مدل نمودن پاسخ حرارتی گذرا در محیط متخلخل با استفاده از مدل ساختاری کاتانئو تعمیم‌یافته**		
استاد راهنما: **دکتر عزیز عظیمی**		
استاد مشاور: **دکتر مرتضی بهبهانی‌نژاد**		
درجه تحصیلی: **کارشناسی ارشد**	رشته: **مهندسی مکانیک**	گرایش: **تبدیل انرژی**
دانشگاه: **شهید چمران اهواز**	دانشکده: **مهندسی**	گروه: **مکانیک**
تاریخ فارغ‌التحصیلی:		تعداد صفحه: 111

کلید واژه‌ها: **هدایت غیرفوریه‌ای، تئوری حساب کسری، نگرش تاخیر زمانی کسری، مدل کاتانئو تعمیم‌یافته، انتقال حرارت معکوس، تخمین پارامتر، محیط متخلخل، انتقال حرارت فروپخشی.**

در دو دهه اخیر تلاش‌های بسیاری برای مطالعه پخش غیرعادی صورت گرفته‌است. علت این امر مشاهده رفتارهای غیرعادی در طبیعت انتقال حرارت در بسیاری از سیستم‌ها و کاربردهای مهندسی می‌باشد. از سوی دیگر، حساب کسری نیز قابلیت‌های بالای خود را در مدل نمودن رفتارهای غیرعادی و میانی در بسیاری از پدیده‌های انتقال نشان داده‌است. در این پایان‌نامه از قابلیت‌های حساب کسری در مدل نمودن رفتارهای میانی در پدیده انتقال حرارت استفاده گردیده‌است .برای این منظور، ابتدا نگرش کلاسیک تاخیر زمانی در بیان غیرفوریه‌ای انتقال حرارت به نگرش تاخیر زمانی کسری تعمیم داده می‌شود. این کار از طریق اعمال بسط سری تیلور کسری بجای بسط سری تیلور کلاسیک روی مدل ساختاری تاخیر زمانی منفرد انجام می‌شود که منجر به معرفی مدل کاتانئو(تاخیر زمانی منفرد) کسری می‌گردد. برای حل معادلات حاصل از یک روش عددی بصورت تفاضل محدود استفاده شده است. گسسته‌سازی مشتقات کسری به روش گرانوالد لتنیکف انجام شده‌است. در این پایان‌نامه برای اولین بار پارامترهای اساسی در مدل کاتانئو کسری برای یک محیط متخلخل از طریق تکنیک معکوس استخراج می‌گردد. این کار با استفاده از روش غیرخطی تخمین پارامتر لونبرگ- مارکوارت صورت پذیرفته است. نتایج بدست آمده نشان دهنده موفقیت مدل تاخیر زمانی کسری معرفی شده در این تحقیق در مدل نمودن رفتارهای غیرفوریه‌ای انتقال حرارت می‌باشد.

فصل اول

مقدمه و مروری بر پژوهش‌های پیشین

1-1 مقدمه

پدیده انتقال حرارت از دیرباز مورد توجه بسیاری از دانشمندان بوده است. اولین مسئله انتقال حرارت که مورد توجه دانشمندان قرار گرفته است، انتقال حرارت در جامدات می‌باشد. بزرگترین چالشی که دانشمندان آن زمان با آن روبه‌رو بودند، روند هدایت حرارت در جامدات بوده است. نیاز به یک مدل که بتواند این توزیع دما در جسم را پیش‌بینی کند کاملا احساس می‌شد. سرانجام فوریه توانست به صورت کاملا تجربی یک مدل ریاضی را که در واقع یک معادله ساختاری بین شار حرارتی و گرادیان دما بود، ارائه نماید. این مدل به همان روشی که اهم رابطه بین آمپر، ولتاژ و مقاومت را تعیین نمود، بدست آمد. به هر حال مدلی که فوریه ارائه نمود مدلی بود که سرعت انتشار حرارت را بینهایت در نظر می‌گرفت که این مسئله توجیه فیزیکی نداشت، اما در بسیاری از مسائل کاربردی جواب‌های دقیقی را ارائه می‌نمود. انتقال حرارت فوریه‌ای بر این فرض استوار است که با اعمال تحریک حرارتی در یک نقطه از ماده جامد، این تحریک در تمام ماده جامد بصورت آنی حس می‌شود. امروزه مشخص شده علّت درستی رابطه فوریه این بوده است که سرعت انتشار حرارت در بسیاری از مواد بسیار زیاد است اما به هر حال بینهایت نمی‌تواند باشد.

به‌هرحال قانون فوریه در بسیاری از کاربردهای فیزیکی و عملی جواب‌های مناسبی را ارائه می‌نمود، اما با پیشرفت علم و به وجود آمدن کاربردهای جدید مشخص شده که این مدل

نمی‌تواند بسیاری از فرایندها را مدل کند. در ابتدا آزمایش‌هایی که روی مواد ناهمگن انجام شد ناکارآمدی این مدل را مشخص نمود. علّت اصلی ناکارآمدی مدل فوریه همانطور که اشاره گردید، در این است که این مدل سرعت پخش را بینهایت در نظر می‌گیرد که مشخصا این نگرش صحیح نمی‌باشد، چرا که نمی‌توان در مکان و زمان محدود، سرعت نامحدود داشت. اما در بسیاری از کاربردها این فرض نامحدود بودن سرعت درست به نظر می‌آمد و این در واقع همان چیزی بود که دانشمندان را با چالشی بزرگ مواجه کرد. سوأل اصلی این بود که برای برطرف کردن این مشکل چه مدلی قابل ارائه می‌باشد. امروزه این نوع انتقال حرارت جدید کاربردهای بسیاری در صنعت دارد که از جمله آن‌ها می‌توان به انتقال حرارت مایکرو و لیزر اشاره نمود.

پاسخ سوال بالا منجر به معرفی مدل‌های ساختاری غیرفوریه‌ای می‌گردد. انتقال حرارت غیرفوریه‌ای به دلیل کاربردهای بسیار فراوانی که دارد مورد توجه بسیاری از دانشمندان قرار گرفته و در نتیجه مدل‌های متفاوتی برای بررسی این نوع خاص از انتقال حرارت ارائه شده است، که در فصل سوم این پایان‌نامه به معرفی این مدل‌ها پرداخته شده است.

از جمله شرایطی که در سال‌های اخیر پدیده انتقال حرارت غیرفوریه‌ای در آن‌ها بیشتر مورد بررسی قرار گرفته است، می‌توان به فرایند انتقال حرارت در حضور منابع حرارتی با شدت بالا و بسیار گذرا از قبیل لیزر و میکروویو، انتقال حرارت در شرایط دمایی بسیار پایین، انتقال حرارت روی لایه‌های نازک فلزات، نیمه‌هادی‌ها و ابرهادی‌ها و همچنین انتقال حرارت در مواد با ساختار داخلی غیرهمگن و متخلخل اشاره کرد. از موارد دیگر نیز می‌توان به کاربرد لیزر در پزشکی اشاره نمود. لحاظ نمودن اثرهای غیرفوریه‌ای انتقال حرارت در جراحی توسط لیزر و همچنین هایپرترمی دارای اهمیّت بسیاری می‌باشد و پیشرفت در پیش‌بینی وضعیت انتقال حرارت در این کاربرردها می‌تواند اثرات درمانی فوق‌العاده‌ای داشته باشد.

2-1 مروری بر پژوهش‌های پیشین

در ارتباط با مطالعات قبلی صورت گرفته، ابتدا به ارائه مروری بر مطالعات تجربی صورت گرفته در زمینه انتقال حرارت غیرفوریه‌ای در مقیاس ماکرو پرداخته شده است. سپس، از آنجا که مدل غیرفوریه‌ای مورد استفاده در این پایان‌نامه و معادله دیفرانسیل حاکم از نوع کسری می‌باشند و با توجه به جدید بودن مبحث روش‌های حل اینگونه معادلات، معرفی خواهند گردید.

1-2-1 مشاهدات تجربی انتقال حرارت غیرفوریه‌ای

اولین عامل محرک برای تشویق دانشمندان مبنی بر بررسی انتقال حرارت غیرفوریه‌ای، خود معادله ساختاری فوریه بود، چرا که این مدل سرعت پخش را بینهایت در نظر می‌گرفت که این فرض، صحیح به نظر نمی‌آمد، اما مسئله اینجا بود که مشاهدات تجربی مدل ساختاری انتقال حرارت غیرفوریه‌ای را تایید می‌کرد، تا این که نتایج آزمایشی که پشکوف [1] برروی هلیوم مایع انجام داده بود منتشر شد. او در آزمایش خود نشان داده بود که سرعت انتشار حرارت در هلیوم مایع که در دمای بسیار پایین قرار دارد خیلی محدود است و همین آزمایش صراحتا مشخص می‌کرد که فرض بینهایت گرفتن سرعت پخش حرارت فرضی اشتباه می‌باشد. بعدها کاتانئو[1] و ورنوت[2] [2] مدل ساختاری دیگری را معرفی کردند که این مدل سرعت را محدود در نظر می‌گرفت و بدین ترتیب دری به سوی علم مدرن هدایت حرارت غیرفوریه‌ای باز شد. در ادامه آزمایشات تجربی مشخص کرد که شرایط دیگری علاوه بر آزمایش پشکوف وجود دارد که سرعت انتشار حرارت در آن‌ها محدود است [3].

برای مواد با ساختار داخلی غیرهمگن، مطالعات پیشگام لیوکف نشان داد که انتشار تحریک‌های حرارتی در دمای اتاق در اینگونه مواد، به‌دلیل اثر تجمعی مکانیزم‌های انتقال حرارت

[1] Carlo Cattaneo

[2] Vernotte

در ماده، از نوع موجی می‌باشد. او در مطالعات خود مقدار تاخیر زمانی در این گونه مواد را در حدود 30 ثانیه مشخص کرد، در حالی که برای مواد همگن این مقدار بسیار محدود و قابل صرفنظر حساب شده است. لازم به ذکر است که ثابت زمانی در مواد همگن به زمان آسایش بین حامل‌های انرژی از قبیل الکترون ها و فوتون‌ها آنها گفته می‌شود. کامینسکی تعبیر فیزیکی تاخیر زمانی را به این شکل تعریف کرد که: تاخیر زمانی بیانگر اندرکنش اجزا مختلف تشکیل دهنده ساختار داخلی ماده در طی انتقال حرارت است [4]. بعد از پشکوف، میترا و همکاران [5] آزمایش‌هایی را بر روی بافت‌های زنده انجام دادند و از آنجا که بافت‌های جانوری را می‌توان محیط ناهمگن در نظر گرفت انتظار می‌رفت که انتقال حرارت از نوع غیرفوریه ای باشد که البته تاخیر زمانی که در این آزمایش بدست آمد توافق خوبی با مقادیر محاسبه شده توسط کامینسکی داشت. بالا بودن مقادیر ثابت زمانی را برخی از دانشمندان از جمله گرامبن و پیترز [6] و هرویگ و بکرت [7] زیر سوأل بردند و در مطالعات خود روی مواد غیرهمگن و متخلخل وجود هر گونه هدایت غیرفوریه‌ای را رد کردند. در مطالعه صورت گرفته توسط راتزل و همکاران [8] گام بسیار مهمی در حل تناقض‌های موجود در نتایج تجربی این دانشمندان برداشته شد. نتایج بدست آمده از آزمایشهای راتزل و همکاران [8] وجود اثرهای غیرفوریه‌ای را تأیید کردند. اخیرا مطالعات دیگری نیز در خصوص شرایطی که مکانیزم انتقال حرارت در آن‌ها از نوع غیرفوریه‌ای می‌باشد، انجام شده است [9 و 10]. در سال 2005 آنتاکی [11] با استفاده از نتایج تجربی میترا و همکاران و به کارگیری مدل غیرفوریه‌ای تأخیر فازی دوگانه[1] به‌جای مدل کاتانئو نشان داد که این مدل قابلیت بیشتری از مدل کاتانئو دارد. استفاده از مدل غیرفوریه‌ای تاخیر فاز دوگانه در شرایط عدم تعادل حرارت محلی در محیط متخلخل اوّلین بار توسط ژو در سال 1997 مطرح گردید [12]. رژیم انتقال حرارت در ریز مقیاس‌ها با توجه به طول هندسی‌شان توسط فلیک [13] مورد بررسی قرار گرفته است. پورمحمدیان و همکاران [14] نیز آزمایشی دیگر را ترتیب دادند که در آن منبع حرارتی با زمان تغییر می‌کرد و در این حالت هم انتقال حرارت غیرفوریه‌ای بر مسئله حاکم بود.

[1] Dual Phase Lag

مطالعات صورت گرفته توسط مینکویچ و همکاران [15] نشان داد که در مسایلی که در آن‌ها اعمال سریع و ناگهانی تحریک حرارتی یا تغییر سریع منبع حرارتی وجود دارد و یا در شرایطی که ذوب یا انجماد مواد تغییر فازدهنده در محیط متخلخل انجام می‌شود، شرط تعادل حرارتی محلی بین ماده جامد و سیال اطراف آن برقرار نمی‌باشد. دو مطالعه تجربی اخیر صورت گرفته توسط آگوا نانا و همکاران [16 و 17] نشان داد که استفاده از این مدل در شرایط عدم تعادل حرارتی به‌واسطه وجود تحریک حرارتی ناگهانی و کوتاه و تغییر فاز در محیط متخلخل منجر به پیش‌بینی دقیق‌تر توزیع دما می‌گردد. استفاده از نگرش غیرفوریه‌ای انتقال حرارت در محیط متخلخل از جمله حوزه‌های کاربردی و فعال می‌باشد، تا آنجا که در کتابی به‌عنوان مباحث در حال ظهور در انتقال حرارت و جرم در محیط متخلخل که در سال 2008 به چاپ رسیده است دو فصل اوّل خود را به این موضوع اختصاص داده است [18].

1-2-2 روش های حل معادلات دیفرانسیل کسری

منظور از مشتق کسری این است که در آن مرتبه مشتق می‌تواند هر عدد دلخواهی باشد و ما در این گونه مشتقات مقید به استفاده از مرتبه صحیح نیستیم.

مشتق مرتبه کسری شاخه‌ای از علم ریاضی است که از جهتی می‌توان آن را علمی قدیمی و دارای سابقه چند صد ساله دانست و از جهتی دیگر آن را علمی بدیع و جدید به حساب آورد. مشتقات کسری از این جهت قدیمی هستند که مطالعات اولیه در این زمینه به اواخر قرن هفدهم باز می‌گردد. در آن زمان پس از آنکه لایبنیز[1] مفهوم و کاربرد مشتق مرتبه صحیح $d^n y / dx^n$ که در آن n یک عدد صحیح می‌باشد را ارائه کرد، هوپیتال[2] در سال 1695 با نوشتن نامه‌ای خطاب به لایبنیز از وی پرسید، اگر $n = 1/2$ آنگاه تفسیر و معنای $d^{\frac{1}{2}} y / dx^{\frac{1}{2}}$ چیست؟ لیبنیز هم در

[1] Leibniz

[2] Hopital

نامه‌ای به او پاسخ داد که این رابطه هیچ معنایی ندارد. مشتقات کسری را از این جهت می‌توان علمی تازه دانست که تنها در سال‌های اخیر از این نوع مشتقات در کاربردهای علمی و مهندسی استفاده شده است.

در سال‌های اخیر، با توجه به افزایش گسترده کاربرد حساب کسری در مدل نمودن بسیاری از فرایندهای مهندسی، مطالعه برروی روش‌های حل معادلات دیفرانسیل کسری نیز مورد توجه بسیاری قرار گرفته است. یکی از دسته‌بندی‌های ممکن معادلات دیفرانسیل کسری، دسته‌بندی بر اساس اعمال عملگرهای مشتق کسری روی متغیر مکان و زمان می‌باشد. بدین صورت که اگر عملگر بر روی زمان اعمال گردد، معادله دیفرانسیل کسری بدست آمده کسری زمانی[1] و اگر روی مکان اعمال گردد آنرا کسری مکانی[2] می‌نامند. تفاوت بین این دو دسته از این جهت حائز اهمیت است که در معادلات دیفرانسیل کسری زمانی، به‌دلیل وابستگی سراسری[3] عملگرهای مشتق کسری، در حل عددی این گونه معادلات، نیازمند به داشتن مقدار تابع در تمام زمان‌های حل می‌باشیم. به‌بیان دیگر، خصوصیت غیرمحلی[4] مشتق کسری بیان می‌دارد که حالت آتی هر سیستم نه تنها به حالت فعلی آن وابسته است، بلکه به تاریخچه حالت‌های سیستم از زمان اوّلیه تا پایان فرایند نیز بستگی دارد. اگرچه این ویژگی بدلیل نزدیکی بیشتر با شرایط واقعی سیستم‌ها، سبب افزایش محبوبیت و کاربرد مدل‌های کسری گردیده است، ولی از سوی دیگر سبب افزایش پیچیدگی فرایند محاسباتی معادلات دیفرانسیل کسری گردیده است. این ویژگی سبب افزایش بسیار بالای حجم حافظه مورد استفاده در حل معادلات دیفرانسیل کسری زمان گردیده است. در صورتی که در معادلات کسری مکانی چنین مشکلی وجود ندارد. بنابراین حل کسری معادلات دیفرانسیل کسری زمانی از اهمیت بیشتری برخوردار است. از آنجا که معادله کاتانئو مورد استفاده در این پایان‌نامه از نوع کسری زمانی می‌باشد، بنابراین تنها مطالعات صورت گرفته در خصوص

[1] Time fractional

[2] Space fractional

[3] Global dependency

[4] Non-local property

روش‌های تحلیلی و عددی معادلات دیفرانسیل کسری زمانی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

از جمله روشهای بسیار مرسوم در حل تحلیلی معادلات کسری مورد استفاده در مدل کردن فرآیند پخش غیرعادی می‌توان به استفاده از تکنیک‌های تبدیل لاپلاس و فوریه اشاره نمود. از مطالعات تحلیلی صورت گرفته در حل معادلات دیفرانسیل کسری توصیف کننده فرآیند پخش غیرعادی با استفاده از تکنیک تبدیل لاپلاس و فوریه، می‌توان به کارهای آگراوال [19] و پووستنکو [20 و 21] اشاره نمود. اولدهام و اسپانیر [22] معادله با مشتقات جزئی را که مشتق مکان در آن از مرتبه یک و مشتق زمان در آن از مرتبه کسری بود درنظر گرفتند و با استفاده از تعریف لاپلاس و فوریه به صورت تحلیلی آن را حل کردند. از اولین مطالعات عددی صورت گرفته در خصوص حل معادلات دیفرانسیل کسری می‌توان به کار دایتلم و همکاران [23] اشاره نمود. از آنجا که معادلات با مشتقات کسری کاربردهای بسیاری در صنعت و مسایل کاربردی پیدا کرده است، کارهای بسیاری برای بررسی روش‌های تحلیلی حل این دسته از معادلات انجام شده است [28-24]. فوجیتا [29] حالت کسری معادله کوشی را در نظر گرفته و یکتایی و وجود جواب برای این مسئله را به اثبات رسانید. حل تحلیلی برای معادله پخشی- موجی که مرتبه مشتق زمان این معادله از نوع کسری بود توسط میناردی [30] ارائه شد. الخالد و مومنی [31] از روش جداسازی[1] برای بدست آوردن حل تقریبی از معادله پخشی- موجی کسری استفاده نمودند و حل تحلیلی را برای این معادله معرفی کرد. کارهای دیگری که در زمینه حل تحلیلی معادله دیفرانسیل پخشی- موجی از نوع کسری می‌باشد را می‌توان در [32 و 33] یافت.

از اولین روش‌های حل معادله پخش غیرعادی می‌توان به الگوریتم ارائه شده توسط لانگلند و هنری اشاره نمود [34]. آنها الگوریتم ضمنی بدون قید و شرط پایدار را از طریق گسسته‌سازی عملگر مشتق کسری بر اساس روش L1 که توسط الدهام و اسپاینر [35] معرفی شده بود، ارائه نمودند. یوست و آسدو [36] با استفاده از تعریف گرانوالد-لتنیکف[2] برای گسسته‌سازی مشتق کسری، روش صریحی توسعه داده و با استفاده از معیار پایداری فوریه، شرط پایداری الگوریتم

[1] Decomposition method

[11] Grunwald-Letnikov