إنه من سليمان وإنه

بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه زنجان

دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

بررسی مسأله رگولاتور خطی در کنترل بهینه

نگارش:

زهره کریمی

اساتید راهنما:

دکتر محمد تقی دستجردی

دکتر سعید مقصودی

تیر ۱۳۸۷

دانشگاه زنجان

شماره: ۰۳۹/۷/۱۰د ع

تاریخ: ۸۷/۴/۲۵

صورتجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی‌عصر (عج) جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

خانم **زهره کریمی** رشته **ریاضی** گرایش **کاربردی**

تحت عنوان : **بررسی مسئله رگولاتور خطی در کنترل بهینه**

در تاریخ ۸۷/۴/۲۵ با حضور هیأت محترم دوران در دانشگاه زنجان برگزارگردید و نظر هیأت داوران بشرح زیر می‌باشد:

قبول(با درجه : عالی امتیاز: ۱۹/۰) دفاع مجدد ☐ مردود ☐

۱- عالی(۲۰-۱۸)

۲- بسیارخوب(۱۷/۹۹- ۱۶)

۳- خوب(۱۵/۹۹- ۱۴)

۴- قابل قبول(۱۳/۹۹- ۱۲)

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
- استاد راهنمای اول	دکتر محمدتقی دستجردی	استادیار	
- استاد راهنمای دوم	دکتر سعید مقصودی	استادیار	
- استاد ممتحن داخلی	دکتر فرض اله میرزاپور	استادیار	
- استاد ممتحن خارجی	دکتر مرتضی رحمانی	استادیار	
- نماینده تحصیلات تکمیلی	آقای ابراهیم ولی‌پور	مربی	

۱۳۸۷ /۷/ ۲۲

دکتر محمدعلی اسم‌خانی

معاون آموزشی و تحصیلات تکمیلی

دانشکده علوم

۸۷/۴/۲۵

دانشگاه زنجان

دکتر نعمت‌اله ارشدی

مدیر تحصیلات تکمیلی دانشگاه

و

استعدادهای درخشان

۱۵۲۶۸۳

تشکر فراوان نثار استاد عزیزم جناب آقـای دکتـر دسـتجردی کـه در طـول ایـن مـدت از راهنمایی‌های ارزنده علمی و اخلاقی ایشان کمال استفاده را بردم و وجودشان باعث به‌ثمر رسیدن این پایان‌نامه بود.

از استاد عزیزم جناب آقای دکتر مقصودی به خاطر راهنمایی‌هایشان بسیار سپاسگزارم.

از جناب آقای دکتر رهمانی و جناب آقای دکتر میرزاپور که زحمـت مطالعـه و داوری ایـن پایان‌نامه را به عهده گرفتند کمال تشکر را دارم.

و با تشکر از همه دوستان خوبم که در این مدت صمیمانه با من همکاری کردند.

زهره کریمی

تیرماه ۱۳۸۷

تقدیم به

پدرم

که از کودکی جان مرا از عطر علم دوستی لبریز کرد

و مادرم

تکیه گاه و پناه زندگی.

چکیده

برای بهینه کردن تابع هزینه روش های مختلفی ارائه شده است که در این رساله سیستم حلقه بسته مورد نظر است یعنی بردار کنترل به صورت تابعی از بردار حالت همراه رگولاتور خطی با استفاده از جواب معادلات ریکاتی است. در مرحله اول معادلات ریکاتی را برای سیستم خطی (معادله مسیر خطی) بدست می آید .در مرحله بعد یک جمله تصادفی به معادله مسیر اضافه شده است که به عنوان یک مسأله کنترل بهینه تصادفی با استفاده از جواب معادله ریکاتی،جواب بهینه برای امید ریاضی تابع هزینه هدف محاسبه شده است. در این پایان نامه با استفاده از معادلات اویلر—لاگرانژ نقاط بحرانی مسأله داده شده بدست آمده و به جای مینیمم سازی امید ریاضی تابع هزینه، خود تابع هزینه مینیمم می‌گردد.

فهرست مندرجات

مقدمه

تلاش اولیه بشر برای مدیریت زمان و رفتارهای خود در شبانه روز از اولین گام‌ها در طراحی سیستم‌های کنترل است. در طول تاریخ روش‌های متفاوتی برای کنترل سیستم‌های مختلف مکانیکی طراحی گردیده است که با توسعه تکنولوژی و صنعت سیتم‌های کنترل نیز متحول گردیدند. بیشترین نوع طراحی با الگوی سیستم‌های کنترل فیزیک (پس خورد) به‌کار گرفته شد. با پیشرفت ریاضیات روش‌های نظری نیز پایه‌گذاری گردیدند. مهمترین تحول ظهور نظریه کنترل بهینه در قرن هفدهم می‌باشد. که با استفاده از معادلات دیفرانسیل یا معادلات انتگرال اراَه گردیده است. در قرن بیستم تحلیل‌های ریاضی بر اساس معادلات در حوزه زمان و حوزه فرکانس بنا گردید پس از جنگ جهانی دوم به‌دلیل فراگیرتر شدن جواب‌ها زمینه تحقیقاتی در کنترل بهینه سیستم‌های تصادفی بیشتر گردید که دراین پایان نامه روش جدیدی مورد مطالعه قرار گرفته است. در فصل اول به بررسی تعاریف و قضایا پرداخته شده است. در این قسمت خاصیت و ویژگی های مهم فضاهای هیلبرت مورد مطالعه قرار می‌گیرد و به طور مختصر اطلاعاتی را درباره آشنایی مقدماتی با فضاهای خطی، نگاشت تصویر، تابعک خطی پیوسته و فضاهای هیلبرت می‌دهد. در فصل دوم بررسی توابع، عملگرها و تبدیل‌ها صورت گرفته است، در این قسمت عملگرهای الحاقی هیلبرت اشمیت، هسته‌ای و ولترا مورد بحث قرار می‌گیرند و از نظریه طیفی عملگرها، عملگرهای فشرده مورد توجه قرار گرفته‌اند. در فصل سوم نظریه نیم گروه‌های عملگرهای خطی در فضای هیلبرت مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در این قسمت مسئله کشی همگن و ناهمگن مورد بحث قرار می‌گیرد.کنترل پذیری، مشاهده پذیری، پایداری و پایدارپذیری موضوعات بررسی شده می‌باشند و در نهایت با معادلات تکمیلی این فصل به پایان می‌رسد. در فصل چهارم نظریه کنترل بهینه را مطالعه گردیده است که نقش مهمی را در ریاضیات کاربردی به عهده دارد. در این قسمت مسأله رگولاتور کوادراتیک خطی مورد بررسی قرار می‌گیرد و جواب سیستم را به صورت حلقه باز و حلقه بسته ارائه می‌دهد. در فصل پنجم کنترل تصادفی بررسی می گردد. در این قسمت به معادله حالت یک جمله تصادفی اضافی شد و جواب بهینه‌ی تابع هزینه جدید مورد بررسی قرار

گرفته و محاسبه می گردد، هم چنین حساب تغییرات و نظریه کنترل بهینه در زمینه تصادفی بحث می‌گردد و روش جدیدی را برای کنترل تصادفی براونی که مسائل اختلال‌دار را می‌سازند، ارائه شده است. در این قسمت که هدف بهینه کردن تابع هزینه است ابتدا قیدهای قطعی را داریم که ارتباط جبری بین متغیرهای حالت و کنترل بیان می‌شود و سپس روشی بیان می‌شود که در آن قیدهای اختلال دار به قیدهای قطعی تبدیل شوند.

فصل ۱

پیش نیازها

۱.۱ تعاریف و قضایا

تعریف ۱.۱.۱ مجموعه غیرتهی Ω با دو عملگر جمع $(+)$ و ضرب اسکالر $(\times)$ همراه با میدان F را فضای خطی می‌نامند، هرگاه

۱) $(\Omega,+)$ گروه جابجایی باشد.

۲) $\forall v \in \Omega, \alpha_۱, \alpha_۲ \in F$

$(\alpha_۱\alpha_۲)v = \alpha_۱(\alpha_۲ v)$

$(\alpha_۱ + \alpha_۲)v = \alpha_۱ v + \alpha_۲ v$

$\alpha(v_۱ + v_۲) = \alpha v_۱ + \alpha v_۲$ باشد.

تعریف ۲.۱.۱ تابعک خطی روی Ω، یک تابع تعریف شده روی Ω با مجموعه مقادیر روی میدان اسکالر است به طوری که اگر آن را با $f(.)$ نشان دهیم، آنگاه

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

باشد که x, y در Ω و α, β اسکالرند.

تعریف ۳.۱.۱ حاصل ضرب دکارتی $\Omega_1 \times \Omega_2$ از دو فضای خطی Ω_1, Ω_2، مجموعه همه زوج‌های مرتب (x,y) است به طوری که $x \in \Omega_1, y \in \Omega_2$ باشد.

تعریف ۴.۱.۱ تابعک دو خطی در Ω یک تابعک تعریف شده روی فضای حاصل ضرب دکارتی $\Omega \times \Omega$ با مجموعه مقادیر در میدان اسکالر است به طوری که اگر تابعک را با $f(x,y)$ نشان دهیم، داریم

۱) $f(x,y)$ برای y های ثابت در Ω یک تابعک خطی باشد.

۲) $f(x,y) = \overline{f(y,x)}$ که علامت بستار، مختلط مزدوج را نشان می‌دهد.

تعریف ۵.۱.۱ حاصل ضرب داخلی روی یک فضای خطی یک تابعک دو خطی $f(x,y)$ است که در شرط ۳) $f(x,x) \geq 0$ صدق می‌کند و حالت تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $x = 0$ باشد. حاصل ضرب داخلی را با $[x,y]$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۶.۱.۱ فرض کنید $C[a,b]$ فضای توابع پیوسته تعریف شده روی بازه بسته متناهی $[a,b]$ را نشان دهد و فرض کنید که $C^k[a,b]$ فضای توابع دیفرانسیل پذیری که مشتق Kام آن پیوسته است را نشان دهد. یک حاصل ضرب داخلی روی $C^k[a,b]$ به صورت زیر است

$$[f,g] = \sum_{j=0}^{k} \int_a^b f^j(t)\overline{g^j(t)}\,dt$$

که $f^j(.)$ مشتق jام را نشان می‌دهد.

یک خاصیت اساسی از حاصلضرب داخلی، نامساوی کشی شوارتز است که به صورت زیر است

$$|[x,y]|^2 \leq [x,x][y,y]$$

تعریف ۷.۱.۱ نرم دریک فضای خطی، یک تابع نامنفی $f(.)$ است به طوری که داشته باشیم

۱) $f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

$f(\alpha x) = |\alpha| f(x)$ (۲

$f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ (۳

نرم را با $\|.\|$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۸.۱.۱ فضای حاصل ضرب داخلی [1]، یک فضای خطی نرم دار با نرم تعریف شده با $\|x\| = \sqrt{[x,y]}$ است.

تعریف ۹.۱.۱ در یک فضای خطی نرم دار دنباله x_n همگراست، اگر یک عنصر x در فضا باشد به طوری که داشته باشیم

$$\|x_n - x\| \longrightarrow 0$$

در یک فضای خطی نرم دار اگر x یک نقطه حدی از یک مجموعه باشد، می‌توانیم یک دنباله $\{x_n\}$ در مجموعه پیدا کنیم که x_n به x همگرا باشد و برعکس.

تعریف ۱۰.۱.۱ دنباله x_n در یک فضای خطی نرم دار یک دنباله کشی گفته می‌شود، هرگاه

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N(\epsilon) \; s.t \; \forall m,n > N(\epsilon) \Longrightarrow \|x_n - x_m\| < \epsilon$$

باشد. هر دنباله همگرا یک دنباله کشی است ولی عکس آن در یک فضای خطی نرم دار همواره برقرار نیست.

تعریف ۱۱.۱.۱ فضای خطی نرم دار که هر دنباله کشی یک دنباله همگرا باشد را، **فضای باناخ** می‌نامند.

تعریف ۱۲.۱.۱ فضای خطی نرم دار که در آن هر دنباله کشی یک دنباله همگرا باشد را، **فضای کامل** می‌نامند.

تعریف ۱۳.۱.۱ فضای حاصل ضرب داخلی کامل، **فضای هیلبرت** نامیده می‌شود.

مثالی از فضای هیلبرت

فضای توابع با مقدار حقیقی (مختلط)، $f(.)$ اندازه پذیر لبگ و انتگرال پذیر روی بازه $[a,b]$ است که حاصل

[1] preHilbert

ضرب داخلی آن به صورت $[f,g]=\int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt$ می‌باشد.

این فضا را که با $L_2(a,b)$ نشان می‌دهند، یک فضای هیلبرت است.

ساختن فضای هیلبرت جدید از فضاهای هیلبرت دیگر

حاصل ضرب دکارتی از دو فضای هیلبرت H_1, H_2 فضای خطی، از همه زوج‌های (x_1, x_2) است که $x_1 \in H_1, x_2 \in H_2$ است و عملگرهای $(+)$ و $(\times)$ آن به صورت زیر می‌باشد

$$(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)$$

$$\alpha(x_1,x_2)=(\alpha x_1,\alpha x_2)$$

و حاصل ضرب داخلی آن به صورت زیر تعریف می‌شود

$$[(x_1,x_2),(y_1,y_2)]=[x_1,y_1]+[x_2,y_2]$$

فضای حاصل ضرب دکارتی را با $H_1 \times H_2$ نشان می‌دهیم و فضای هیلبرت است.

تعریف ۱۴.۱.۱ مجموعه Ω همبند است، اگر قطعه خط واصل هر دو نقطه در مجموعه در آن باشد، یعنی برای هر x, y در Ω داشته باشیم

$$(1-\theta)x+\theta y\in\Omega,\qquad 0\le\theta\le 1$$

قضیه ۱۵.۱.۱ [۱]: هر مجموعه محدب بسته در یک فضای هیلبرت یک عنصر یکتا از نرم مینیمال دارد.

نتیجه ۱۶.۱.۱ فرض کنید C یک مجموعه محدب بسته در H باشد. برای هر x در H یک عنصر یکتا در C که به x نزدیکترین است وجود دارد. یعنی یک عنصر یکتای z در C وجود دارد به طوری که برای هر y در C داشته باشیم

$$||x-z||=\inf_{y\in C}||x-y||$$

اثبات: فقط باید نشان دهیم که $x-C$ یک مجموعه محدب بسته است. فرض کنید $x-y, x-z$ در $x-C$ باشد، آنگاه داریم

$$\theta(x-y)+(\text{۱}-\theta)(x-z)=x-(\theta y+(\text{۱}-\theta)z)\in x-C$$

تعریف ۱۷.۱.۱ برای هر مجموعه محدب بسته C در H می‌توانیم یک نگاشت از H به توی H تعریف کنیم که به هر x در H نزدیکترین عنصر به x در C را نظیر کند، که تصویری از x در C نامیده می‌شود و آن را با $P_C(x)$ نشان می‌دهیم.

نگاشت $P_C(.)$ لزوماً خطی نیست، اما پیوسته است.

نتیجه ۱۸.۱.۱ فرض کنید M یک زیر فضای خطی بسته باشد، آنگاه برای هر x در H یک عنصر یکتا در M وجود دارد که تصویری از x در M است و آن را با Px نشان می‌دهیم، یعنی برای هر m در M داریم

$$[x-Px, m]=\circ$$

که P دربالا تعریف شده‌است.

تعریف ۱۹.۱.۱ متمم متعامد مجموعه Γ در یک فضای هیلبرت که با $\Gamma^{\perp}$ نشان می‌دهیم به صورت زیر است

$$\Gamma^{\perp}=\{x| \ \ \forall y\in\Gamma, \ \ [x,y]=\circ\}$$

اگر Γ یک فضای خطی نا تهی باشد، $\Gamma^{\perp}$ نیز چنین است. همواره داریم $\Gamma\subseteq(\Gamma^{\perp})^{\perp}$ است. اگر M یک زیر فضای خطی بسته باشد، آنگاه $M=(M^{\perp})^{\perp}$ می‌باشد.

فرض کنید P عملگر تصویر متناظر با M را نشان دهد. بنابراین $Px\in M$ است. طبق نتیجه (۱۷.۱.۱) $[x-Px, Px]=\circ$ است و برای هر m در M داریم

$$[x-Px, m]=\circ$$

پس $x-Px\in M^{\perp}$ می‌باشد. از این رو هر عضو را می‌توان به دو عضو در مجموعه‌های متعامد تجزیه کرد.

تعریف ۲۰.۱.۱ مجموعه Γ رامتعامد یکه می‌نامیم، هرگاه داشته باشیم

$$\forall x, y \in \Gamma \Longrightarrow [x, y] = ۰, \quad \|x\| = ۱$$

تعریف ۲۱.۱.۱ زیرفضای خطی بسته تولید شده توسط عناصر Γ را که با $\Phi(\Gamma)$ نشان می‌دهیم، کوچکترین زیر فضای خطی بسته شامل Γ است.

قضیه ۲۲.۱.۱ [۱]: هر فضای هیلبرت غیر بدیهی یک پایه متعامد یکه دارد.

تعریف ۲۳.۱.۱ مجموعه A در H **چگال** گفته می‌شود، اگر $\bar{A} = H$ باشد.

تعریف ۲۴.۱.۱ H را تفکیک پذیر گوییم، هرگاه یک مجموعه چگال شمارش پذیر داشته باشد.

قضیه ۲۵.۱.۱ [۱]: اگر H تفکیک پذیر باشد یک پایه متعامد یکه شمارش پذیر دارد.

اثبات: چون H فضای هیلبرت است یک پایه متعامد یکه دارد که آن را با $\Phi(\Theta)$ نشان می‌دهیم. چون H تفکیک پذیراست یک پایه شمارش پذیر D دارد که $\Phi(\Theta) = \Phi(D)$ است، اما $\Phi(D) = H$ می‌باشد. بنابراین داریم $\Phi(\Theta) = H$.

مثال ۲۶.۱.۱ فضای هیلبرت تفکیک ناپذیر:

در فضای خطی از توابع اندازه پذیر با مقدار مختلط فرض کنید

$$F =< f_\lambda(t) >=< \exp(i\lambda t) >, \quad -\infty \leq t \leq +\infty, \quad \lambda \in R$$

باشد. بنابراین هر عنصر از F نمایشی به صورت زیر دارد

$$g(t) = \sum_{k=۱}^{n} a_k \exp(i\lambda_k t)$$

حال تابعکی را در $F \times F$ به صورت زیر در نظر می گیریم

$$[g, f] = \lim_{T \to \infty} \frac{۱}{۲T} \int_{-T}^{T} g(t)\overline{f(t)}\, dt$$

این فضای هیلبرت است که تفکیک پذیر نیست، زیرا مجموعه $f_\lambda(t)$ متعامد یکه ناشماراست.

تعریف ۲۷.۱.۱ تابعک خطی پیوسته یک تابعک تعریف شده روی H است که مقدار آن در میدان اسکالر مختلط است و خطی و پیوسته است.

مثال ۲۸.۱.۱ اگر برای هر x در H داشته باشیم $L(x) = [x, h]$، آنگاه $L(.)$ یک تابعک خطی پیوسته است، زیرا داریم

$$|L(x) - L(y)| \leq |[x, h] - [y, h]| \leq ||h|| \, ||x - y||$$

شرط لازم و کافی برای اینکه تابعک خطی پیوسته باشد این است که

$$\exists M, \ M < \infty \ \ s.t. \ \ |L(x)| \leq M \, ||x||$$

برای هر تابعک خطی پیوسته $L(.)$، فضای پوچی آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$L(.)^{\perp} = \{x | L(x) = \circ\}$$

۲.۱ قضیه نمایشی ریس

اگر تابعک صفر نباشد یک عنصر y وجود دارد به طوری که $L(y) \neq \circ$ است. فرض کنید z تصویر y روی فضای پوچی $L(.)$ و $q = y - z$ باشد، آنگاه q به $L(.)^{\perp}$ عمود است. به ازای هر $x \in L(.)^{\perp}$ داریم

$$[y - z, x] = \circ$$

و چون $L(q) = L(y)$، از این رو $L(q) \neq \circ$ است، پس $q \notin L(.)^{\perp}$. حالا برای هر x در H ، $x - \frac{L(x)}{L(q)}q$ در فضای پوچی است، زیرا داریم

$$L[x - \frac{L(x)}{L(q)}q] = \circ$$

از این رو این عنصر باید بر q عمود باشد، یعنی باید داشته باشیم

$$[x - \frac{L(x)}{L(q)}q, q] = \circ$$

بنابراین رابطه زیر را داریم

$$[x,q] = \frac{L(x)}{L(q)}[q,q] \Longrightarrow L(x) = \frac{[x,q]}{[q,q]}L(q)$$

پس می‌توانیم بنویسیم $L(x) = [x,\tilde{q}]$ که $\tilde{q} = q\overline{\frac{L(q)}{[q,q]}}$ است.

قضیه نمایشی ریس می‌گوید، هر تابعک خطی پیوسته را می‌توان به صورت $L(x) = [x,\tilde{q}]$ نمایش داد.

واضح است که $\|L\| = \|\tilde{q}\|$.

تعریف ۱.۲.۱ یک دنباله $\{x_k\}$ از عناصر متعلق به H به طور ضعیف همگرا به x در H گفته می‌شود، هرگاه برای هر g در H داشته باشیم

$$\lim_{k\longrightarrow\infty}[x_k,g] = [x,g]$$

تعریف ۲.۲.۱ عنصر y در M حد ضعیف گفته می‌شود، هرگاه $[x,y]$ یک نقطه حدی از $[x,M]$ برای هر x در M باشد.

تعریف ۳.۲.۱ M به طور ضعیف بسته است، اگر همه نقاط حدی ضعیف خود را در برگیرد.

مثال ۴.۲.۱ فرض کنید $H = L_۲[\circ,T]$ و $\mu_n(.)$ یک دنباله از توابع از نرم یکتا است که به طور ضعیف به صفر همگراست، یعنی برای هر g در H داریم

$$\lim_{n\to\infty}[\mu_n,g] = [\circ,g]$$

و فرض کنید $\Psi_n(f)$ تبدیلات فوریه را به صورت زیر نشان دهد

$$\Psi_n(f) = \int_\circ^T \mu_n(t)\exp(۲\pi ift)\,dt$$

به ازای هر f در H، $\Psi_n(f)$ به صفر همگراست، اما با استفاده از نامساوی شوارتز خواهیم داشت

$$|\Psi_n(f)| \leq \sqrt{T}\,\|\mu_n\|$$

برای هر $B > 0$ متناهی داریم

$$\int_{-B}^{B} |\Psi_n(f)|^2 \, df \longrightarrow 0$$

با استفاده از قضیه همگرایی — کراندار لبگ می‌توانیم بنویسیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_n(f)|^2 \, df = \int_0^T ||\mu_n(t)||^2 \, dt = T$$

همچنین عکس آن درست است. اگر $\mu_n(.)$ در H با تبدیل فوریه $\Psi_n(f)$ با نرم یکتا این ویژگی را داشته باشد که انرژی در یک باند متناهی به صفر رود، آنگاه $\mu_n(.)$ به طور ضعیف به صفر همگراست، یعنی برای هر $g(.)$ در H داریم

$$\int_0^T \mu_n(t)\overline{g(t)} \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n(f)\overline{\Psi_g(f)} \, df = \int_{-B}^{B} \Psi_n(f)\overline{\Psi_g(f)} \, df + \int_{|f|>B} \Psi_n(f)\overline{\Psi_g(f)} \, df$$

می‌توانیم B را به قدر کافی بزرگ انتخاب کنیم به طوری که جمله دوم همان جمله اول شود و n را به قدر کافی بزرگ انتخاب کنیم که جمله اول هم به صفر میل کند.

قضیه ۵.۲.۱ [۱۳]: هر دنباله کراندار از عناصر در فضای هیلبرت یک زیر دنباله‌ی به طور ضعیف همگرا دارد.

قضیه ۶.۲.۱ [۱۳]: فرض کنید $\{f_n(.)\}_n$ یک دنباله از تابعک‌های خطی پیوسته روی H باشد به طوری که برای هر x در H داشته باشیم $\sup_n |f_n(x)| < \infty$، آنگاه داریم

$$||f_n(.)|| \leq M < \infty$$

قضیه ۷.۲.۱ [۱۳]: فرض کنید $\{x_n\}_n$ به طور ضعیف به x همگرا باشد و به علاوه $||x_n||$ به $||x||$ میل کند، آنگاه x_n به طور قوی به x همگراست.

اثبات:

$$||x_n - x||^2 = [x_n - x, x_n - x] = ||x_n||^2 + ||x||^2 - [x_n, x] - [x, x_n] \longrightarrow 0$$