دانشگاه ارومیه

دانشکده علوم

گروه ریاضی

ارومیه – ایران

عنوان:

انتگرالپذیری مشتق حاصلضربهای بلاشکه

استاد راهنما:

دکتر رسول آقالاری

دانشجو:

لیلا شریعتی‌فر

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

آذر ماه ۱۳۸۹

فهرست مندرجات

چکیده

فرض کنید $B(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{a_n}\frac{a_n-z}{1-\bar{a}_n z}$ نمایش حاصلضرب بلاشکه باشد. در این پایان‌نامه عضویت مشتق حاصلضرب‌های بلاشکه در فضاهای هاردی و برگمن، بخصوص برای حاصلضرب‌های بلاشکه درونیاب و برای حاصلضرب‌های بلاشکه که صفرهایش در زاویه استولز واقع است مورد مطالعه قرار می‌گیرد و برهان‌های جدید و ساده‌تری نسبت به قبل بدست می‌آید که این قضایای جدید تعمیم‌دهنده‌ی نتایج بدست آمده توسط آهرن، کلارک، کهن، کیم، نیومن، پروتاس، رودین، وینوگراد و سایر محققین می‌باشد.

پیشگفتار

این پایان‌نامه بر اساس مرجع[۱۴] در چهار فصل نوشته شده است. که بطور مختصر قسمتهای مختلف آن را در اینجا شرح می‌دهیم:

فصل اول در چهار بخش تنظیم شده است. در بخش اول تعاریف و قضایایی مقدماتی از آنالیز مختلط و حقیقی یادآوری شده‌است و در بخش دوم تعریف اندازه کارلسون و در بخش سوم معرفی فضاهای $L^p(D, dA)$، فضاهای هاردی (H^p) و برگمن (A^p) و در بخش آخر تعاریفی از تابع حاصلضرب بلاشکه، توابع توافقی و زیر توافقی آورده شده‌است.

فصل دوم در دو بخش آورده شده‌است. در بخش اول به تعریف زاویه استولز پرداخته و نشان داده شده که اگر صفرهای حاصلضرب بلاشکه در زاویه استولز واقع شود، آنگاه $B' \in \bigcap_{\circ<p<\frac{1}{\text{۲}}} H^p$ است. و در بخش دوم نشان داده شده که اگر صفرهای حاصلضرب بلاشکه در زاویه استولز قرار گیرد، آنگاه $B' \in \bigcap_{\circ<p<\frac{\text{۳}}{\text{۲}}} A^p$ است.

فصل سوم سه بخش مورد بررسی قرار گرفته است. بخش اول قضایای پروتاس، کیم و تعمیم قضیه کیم بررسی شده‌است. بخش دوم دنباله‌های درونیابی، دنباله‌های بطور یکنواخت مجزا و ارتباط بین دنباله‌ها بررسی شده و عکس قضیه پروتاس برای دنباله‌های درونیاب ثابت شده‌است. در بخش سوم دنباله‌های نمایی تعریف شده و ارتباط آن با دنباله‌های بخش دوم مورد بررسی قرار گرفته است. و همچنین دنباله صفرهای حاصلضرب بلاشکه را یک دنباله درونیاب که در زاویه استولز واقع

است در نظر گرفته و عضویت مشتق حاصلضرب‌های بلاشکه در فضاهای هاردی و برگمن بررسی شده است.

در نهایت فصل چهارم به دو بخش تقسیم گردیده است. بخش اول به معرفی فضاهای Q_p اختصاص داده شده است. بخش دوم اندازه‌های $p-$کارلسون در صفحه مختلط و دنباله‌های متمرکز جانبی تعریف شده‌است و با استفاده از این تعاریف شرایطی را روی صفرهای حاصلضرب بلاشکه بررسی می‌کنیم که تحت آن شرایط $B \in \bigcap Q_p$ است.

فصل ۱

مروری بر آنالیز مختلط

فصل اول در چهار بخش تنظیم شده است که در بخش اول تعاریف و قضایایی مقدماتی از آنالیز مختلط و حقیقی و در بخش دوم تعریف اندازه کارلسون و در بخش سوم معرفی فضاهای هاردی و در بخش آخر تعاریفی از تابع حاصلضرب بلاشکه، توابع توافقی و زیر توافقی آورده شده است.

۱.۱ مفاهیمی مقدّماتی از آنالیز مختلط و حقیقی

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید a یک عدد مختلط و $r > 0$ باشد، دیسک باز به مرکز a و شعاع r را به صورت

$$D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$$

تعریف می کنیم، منظور از $\mathbb{C}$ مجموعه تمام اعداد مختلط است. از این پس $D(0,1)$ را با نماد D نشان داده و آن را دیسک واحد می گوییم. مرز D را نیز با T نشان می‌دهیم

$$T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنید Ω مجموعه ای باز در صفحه مختلط بوده و تابع مختلط f در Ω تعریف شده باشد. اگر $z \in \Omega$ و

$$\lim_{z\to z_\circ} \frac{f(z)-f(z_\circ)}{z-z_\circ}$$

موجود باشد، این حد را با $f'(z_\circ)$ نشان داده و آن را مشتق f در $z_\circ$ می‌نامیم. هرگاه $f'(z_\circ)$ به ازای هر $z_\circ \in \Omega$ موجود باشد، گویند f در Ω **تحلیلی (هلوریخت)**[1] است.

تذکر ۳.۱.۱ مجموعه‌ی تمام توابع هلوریخت در Ω را با $H(\Omega)$ نشان می‌دهیم.

تذکر ۴.۱.۱ مجموع، حاصلضرب و ترکیب دو تابع تحلیلی، تحلیلی است.

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنید Ω مجموعه‌ای باز در صفحه مختلط بوده و تابع f در Ω تعریف شده باشد، گوییم f در Ω به وسیله یک سری توانی قابل نمایش است هرگاه برای هر دیسک $D(a,r) \subseteq \Omega$ سری توانی

$$\sum_{n=\circ}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

نظیر باشد، که به ازای هر $z \in D(a,r)$ همگرا به $f(z)$ باشد.

قضیه ۶.۱.۱ فرض کنید Ω مجموعه باز دلخواهی در صفحه مختلط باشد. f در Ω به وسیله سری توانی قابل نمایش است اگر و تنها اگر $f \in H(\Omega)$ باشد.

اثبات : به مرجع [۲٦] فصل [۱۰] قضیه(۱۰—۱٦) مراجعه شود. ■

قضیه ۷.۱.۱ (**اصل مدول ماکزیمم**) فرض کنید Ω یک ناحیه بوده و $f \in H(\Omega)$ و $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$ باشد، دراین صورت

$$|f(a)| \leq \max_{\theta} |f(a+re^{i\theta})|$$

[1] analytic

تساوی در رابطه بالا برقرار است اگروتنهااگر f در Ω ثابت باشد.

درنتیجه $|f|$ در هیچ نقطه از Ω ماکزیمم موضعی ندارد مگر f ثابت باشد.

اثبات : به مرجع [۲۶] فصل [۱۰] قضیه(۱۰–۲۴) مراجعه شود. ■

قضیه ۸.۱.۱ فرض کنیم برای $n = 1, 2, ...$، $f_n \in H(\Omega)$ و f_n بطور یکنواخت روی زیر مجموعه‌های فشرده Ω به f همگرا باشد. دراین صورت $f \in H(\Omega)$ و $f'_n \to f'$ بطور یکنواخت روی زیر مجموعه‌های فشرده Ω

اثبات : به مرجع [۲۶] فصل [۱۰] قضیه(۱۰–۲۸) مراجعه شود. ■

قضیه ۹.۱.۱ (**قضیه‌ی نگاشت باز**) هرگاه Ω یک ناحیه بوده و $f \in H(\Omega)$، آنگاه $f(\Omega)$ یا یک ناحیه است یا یک نقطه.

اثبات : به مرجع [۲۶] فصل [۱۰] مراجعه شود. ■

نتیجه ۱۰.۱.۱ هرگاه Ω یک ناحیه بوده و $f \in H(\Omega)$، علاوه بر این f تابع غیر ثابت باشد، در این صورت f یک نگاشت باز است یعنی مجموعه‌های باز را به مجموعه‌های باز می نگارد.

اثبات : به مرجع [۲۶] فصل [۱۰] قضیه(۱۰–۱٦) مراجعه شود. ■

قضیه ۱۱.۱.۱ (**لم شوارتز**)[۲] فرض کنیم $f \in H^\infty, \| f \|_\infty \leq 1$ و $f(0) = 0$. در این صورت داریم:

$$|f(z)| \leq |z| \qquad (z \in D) \tag{1}$$

و

$$|f'(0)| \leq 1 \tag{2}$$

[۲] Schwarz Lemma

هرگاه در (۱) به ازای یک $z \in D - \{0\}$ و یا در (۲) تساوی برقرار باشد، آنگاه $f(z) = \lambda z$ که در آن λ عدد مختلط ثابتی با $|\lambda| = 1$ است.

که در آن H^{∞} فضای توابع تحلیلی و کراندار بر دیسک واحد است.

اثبات : به مرجع [۲۶] فصل [۱۲] قضیه(۱۲—۲) مراجعه شود. ■

تعریف ۱۲.۱.۱ فرض کنید $\alpha \in D$ باشد، نگاشت $\varphi_\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z}$$

و به آن **نگاشت موبیوس** [۳] می‌گوییم.

قضیه ۱۳.۱.۱ فرض کنید $\alpha \in D$ ثابت باشد. احکام زیر برقرارند:

۱): φ_α یک به یک بوده و $\varphi_\alpha \in H(D)$

۲): معکوس φ_α عبارت است از $\varphi_{-\alpha}$

۳): تابع φ_α، T را بروی T و D را بروی D می‌نگارد.

اثبات : به مرجع [۲۶] فصل [۱۲] قضیه(۱۲—۴) مراجعه شود. ■

تعریف ۱۴.۱.۱ فرض کنید c, b, a و d اعداد مختلط باشند، تابع $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ با ضابطه $w(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ که در آن $ad - bc \neq 0$ است، را تبدیل خطی کسری می‌نامیم. برخی از خواص w را یادآور می‌شویم:

۱): خطوط راستی که از نقطه‌ی $z = -\frac{d}{c}$ می‌گذرند، بر خطوط راستی که از مبداء می‌گذرند، نگاشته می‌شود.

۲): خطوط راستی که از نقطه‌ی $z = -\frac{d}{c}$ نمی‌گذرند، بر دوایری که از مبداء می‌گذرند، نگاشته

[۳] Mobius mapping

می‌شود.

۳): دوایری که از نقطه‌ی $z=-\frac{d}{c}$ می‌گذرند، بر خطوط راستی که از مبداء نمی‌گذرند، نگاشته می‌شود.

۴): دوایری که از نقطه‌ی $z=-\frac{d}{c}$ نمی‌گذرند، بر دوایری که از مبداء نمی‌گذرند، نگاشته می‌شود.

لم ۱۵.۱.۱ فرض کنید A و B دو عدد حقیقی باشند بطوریکه $-۱ \leq B < A \leq ۱$ باشد. برای تبدیل موبیوس $\varphi_{A,B}(z)=\frac{۱+Az}{۱+Bz}$ احکام زیر برقرارند:

۱): $\varphi_{A,B}$ یک به یک بوده و در دیسک واحد تحلیلی است.

۲): $\varphi_{A,B}$ دیسک واحد را به نیم صفحه یا دیسکی به قطر $(\frac{۱-A}{۱-B},\frac{۱+A}{۱+B})$ می‌نگارد.

اثبات : فرض کنید برای $z_۱,z_۲\in\mathbb{C}$ و $\varphi_{A,B}(z_۱)=\varphi_{A,B}(z_۲)$ باشد، آنگاه

$$\frac{۱+Az_۱}{۱+Bz_۱}=\frac{۱+Az_۲}{۱+Bz_۲} \quad\Rightarrow\quad B(z_۲-z_۱)-A(z_۲-z_۱)=۰ \quad\Rightarrow\quad (z_۲-z_۱)(B-A)=۰$$

لذا $z_۱=z_۲$ و $\varphi_{A,B}$ یک به یک است. همچنین

$$\varphi'_{A,B}(z)=\frac{A(۱+Bz)-B(۱+Az)}{(۱+Bz)^۲}=\frac{A-B}{(۱+Bz)^۲}$$

برای اثبات قسمت (۲)، ابتدا فرض کنید $B=-۱$ باشد. دراین صورت بنابر تعریف (۱۴.۱.۱) تبدیل $\varphi_{A,-۱}$ دایره‌ی $|z|=۱$ را به یک خط راست می‌نگارد. داریم:

$$\varphi_{A,-۱}(i)=\frac{۱+Ai}{۱-i}=\frac{(۱+Ai)(۱+i)}{(۱-i)(۱+i)}=\frac{۱-A}{۲}+i\frac{۱+A}{۲}$$

و

$$\varphi_{A,-۱}(-۱)=\frac{۱-A}{۲}$$

لذا معادله‌ی خط، $x=\frac{۱-A}{۲}$ است. چون $\varphi_{A,-۱}(۰)=۱$ و $۱>\frac{۱-A}{۲}$، آنگاه داخل دایره‌ی $|z|=۱$ به نیم‌صفحه در سمت راست خط $x=\frac{۱-A}{۲}$ نگاشته می‌شود.

برای $B = 0$ داریم

$$\varphi_{A,0}(z) = 1 + Az$$

می‌دانیم تابع $F : D \to D$ با ضابطه $F(z) = Az$، دیسک واحد را بروی دیسک $D(0, A)$ می‌نگارد.
لذا $\varphi_{A,0}$ دیسک واحد را بروی دیسک $D(1, A)$ می‌نگارد.

حال فرض کنید $-1 < B < 1$ و $B \neq 0$ باشد، دراین صورت $|\frac{-1}{B}| > 1$ بوده و دایره‌ی $|z| = 1$ از نقطه $-\frac{1}{B}$ عبور نمی‌کند؛ پس تحت $\varphi_{A,B}$ به دایره نگاشته می‌شود که از نقاط زیر عبور می‌کند

$$\varphi_{A,B}(1) = \frac{1 + A}{1 + B} \quad , \quad \varphi_{A,B}(-1) = \frac{1 - A}{1 - B}$$

چون $\varphi_{A,B}(0) = 1$ و $\frac{1+A}{1+B} < 1 < \frac{1-A}{1-B}$، لذا داخل دایره‌ی $|z| = 1$ به داخل دایره‌ی حاصل، نگاشته می‌شود. ■

۲.۱ آشنایی بااندازه‌ی کارلسون

در ریاضیات اندازه کارلسون یک نوع اندازه روی زیر مجموعه‌ی فضای اقلیدسی n بعدی R^n است. اندازه کارلسون کاربرد زیادی در توابع توافقی و معادلات دیفرانسیل جزئی دارد. مثلاً در حل مساله دیریکله با ناهمواری در مرز کارآیی دارد.

تعریف ۱.۲.۱ اگر m یک σ − جبر بر X باشد، در این صورت X را یک فضای اندازه‌پذیر و اعضاء m را مجموعه‌های اندازه‌پذیر گوییم.

قضیه ۲.۲.۱ فرض کنید p, q نماهای مزدوج بوده و $1 < p < \infty$ باشد. همچنین فرض کنید X یک فضای اندازه با اندازه μ باشد و f, g توابع اندازه‌پذیر بر X با برد در $[0, \infty]$ باشند، دراین صورت

$$\int_X |fg| d\mu \leq \Big(\int_X |f|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_X |g|^q d\mu\Big)^{\frac{1}{q}}$$

$$\Big(\int_X |f+g|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\int_X |f|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_X |g|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}$$

نامساوی اول را **نامساوی هلدر**[۴] و نامساوی دوم را **نامساوی مینکوفسکی**[۵] می‌نامند. اگر $p = q = 2$ باشد، آنگاه نامساوی اول به **نامساوی شوارتز**[۶] معروف است.

اثبات : به مرجع [۲۶] فصل [۳] قضیه(۳−۵) مراجعه شود. ■

[۴] Holder inequality
[۵] Minkowiski inequality
[۶] Schwarz inequality

تعریف ۳.۲.۱ فرض کنید X یک مجموعه دلخواه و $x_\circ \in X$ باشد، **اندازه دیراک** [۷] در نقطه $x_\circ$ را با $\delta_{x_\circ}$ نمایش داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\delta_{x_\circ}(X) = \begin{cases} ۱ & x_\circ \in X \\ \circ & x_\circ \notin X \end{cases}$$

تعریف ۴.۲.۱ فرض کنید $n \in N$ باشد و $\Omega \subset R^n$ یک مجموعه‌ی باز (و لذا اندازه‌پذیر) با مرز ناتهی $\partial\Omega$ باشد.μ را یک اندازه بورل روی Ω و σ را اندازه مساحت روی $\partial\Omega$ در نظر می‌گیریم. اندازه μ را **اندازه کارلسون** [۸] روی Ω نامیم اگر ثابت $c > \circ$ وجود داشته باشد بطوری که برای هر نقطه $p \in \partial\Omega$ و هر شعاع $r > \circ$،

$$\mu(\Omega \cap B_r(p)) \leq c\ \sigma(\partial\Omega \cap B_r(p))$$

که

$$B_r(p) := \{x \in R^n :\ ||x-p||_{R^n} < r\}$$

گوی باز به شعاع r حول نقطه p را نشان می‌دهد.

[۷] Dirac measure

[۸] Carleson measure

۳.۱ آشنایی با فضاهای هاردی

در آنالیز مختلط فضای هاردی (کلاسهای هاردی) H^p یک فضای مشخصی از توابع تحلیلی روی دیسک واحد و نیم صفحه بالایی صفحه مختلط است. این نوع توابع در سال ۱۹۲۳ توسط فرگیس رایسز[۹] معرفی شدند، اما بخاطر مقاله هاردی[۱۰] در سال ۱۹۱۵ فضای هاردی نامیده شد.

قرارداد ۱.۳.۱ فرض کنید $\mathbb{C}$ صفحه مختلط باشد و مجموعه D را قرص واحد در نظر میگیریم، از dA برای نشان دادن اندازه مساحت D استفاده می‌کنیم و مساحت نرمالیزه را به شکل زیر می نویسیم: $dA(z) = \frac{1}{\pi}\ dxdy = \frac{1}{\pi}\ rdrd\theta$

تعریف ۲.۳.۱ مجموعه تمام توابع $f : D \to \mathbb{C}$ بطوری که f اندازه‌پذیر باشد و در رابطه

$$||f||_p = \left(\int_D |f(z)|^p dA(z)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \qquad (0 < p < \infty)$$

صدق کند را با $L^p(D, dA)$ نشان می‌دهیم. و

$$L^\infty(D, dA) = \{f : D \to \mathbb{C} \ : \ ||f||_\infty = ess\ sup|f(z)| < \infty \quad , \quad f \text{ اندازه‌پذیر است}\}$$

که

$$||f||_\infty = inf\{\lambda > 0 \ : \ \mu(\{z \ : \ |f(z)| > \lambda\}) = 0\}$$

$$= inf\{\lambda > 0 \ : \ |f(z)| \leq \lambda\} = ess\ sup|f(z)| < \infty$$

[۹] Frigyes Riesz
[۱۰] Hardy

تعریف ۳.۳.۱ به ازای $1 \leq p \leq \infty$ مجموعه تمام توابع $f \in L^p(D, dA)$ که f تحلیلی باشد را فضای برگمن می‌نامیم و با $L^p_a(D)$ و یا A^p نشان می‌دهیم.

گزاره ۴.۳.۱ فرض کنیم $0 < p < \infty$ و K یک زیر مجموعه‌ی فشرده از U باشد. در این صورت یک عدد ثابت مثبت $C = C(n, K, p)$ وجود دارد بطوری که برای هر $f \in A^p$ و هر عدد صحیح نامنفی n،

$$\sup_{z\in K} |f^{(n)}(z)| \leq C||f||_p$$

اثبات : به مرجع [۱۷] فصل [۱] قضیه(۱—۱) مراجعه شود. ■

قضیه زیر بیان می‌کند که فضای برگمن یک فضای باناخ است.

قضیه ۵.۳.۱ برای $1 \leq p < \infty$، $L^p_a(D)$ یک زیر فضای بسته از $L^p(D, dA)$ است.

اثبات : فرض کنید $\{f_n\}_n$ یک دنباله از توابع تحلیلی در $L^p_a(D, dA)$ باشد و f_n در $L^p(D, dA)$ به f همگرا باشد. نشان می‌دهیم $f \in A^p$. چون دنباله $f_n \to f$ همگراست لذا در $L^p(D, dA)$ یک دنباله کوشی است.بنابراین برای هر $\varepsilon > 0$، $N > 0$ وجود دارد بطوری که برای هر $n, m \geq N$ اگر $z \in U$ آنگاه

$$||f_n - f_m||_{L^p} < \varepsilon$$

فرض کنید K یک زیرمجموعه فشرده دلخواهی از D باشد، درنتیجه بنابر گزاره (۴.۳.۱) برای هر $z \in K$ و هر $n, m \geq N$ داریم

$$|f_n(z) - f_m(z)| = |(f_n - f_m)(z)| \leq C||f_n - f_m||_p < C\varepsilon$$

پس

$$\sup_{z\in K} |f_n(z) - f_m(z)| < C\varepsilon$$

در نتیجه $\{f_n\}_n$ روی هر زیر مجموعه‌ی فشرده از D بطور یکنواخت همگراست.

از طرف دیگر چون $f_n \to f$ در $L^p(D, dA)$ بنابراین $f'_n \to f'$ بطور یکنواخت روی هر زیر مجموعه‌ی فشرده از D. و لذا طبق قضیه(۸.۱.۱) f یک تابع تحلیلی خواهد بود.

از طرفی چون

$$|f(z)|^p \leq |f(z) - f_n(z)|^p + |f_n(z)|^p$$

لذا

$$\int_D |f(z)|^p dA(z) \leq \int_D |f(z) - f_n(z)|^p dA(z) + \int_D |f_n(z)|^p dA(z)$$

اما طبق فرض $\{f_n\} \in A^p$ و $f_n \to f$ روی هر زیر مجموعه فشرده از D همگرای یکنواخت است. با توجه به این مطالب باید رابطه اخیر متناهی باشد. یعنی $f \in A^p$. ■

تعریف ۶.۳.۱ فرض کنید $f \in H(D)$ باشد آنگاه میانگین انتگرالی را با $M_p(r, f)$ نشان می دهیم و چنین تعریف می کنیم:

$$M_p(r, f) = \left(\frac{۱}{۲\pi} \int_۰^{۲\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^p d\theta \right)^{۱/p} \qquad (۰ < p < \infty)$$

و برای $p = \infty$ میانگین انتگرالی به صورت زیر است:

$$. \ M_\infty(r, f) = \max_{۰ \leq \theta \leq ۲\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right| \qquad (۰ < r < ۱)$$

قضیه ۷.۳.۱ (**قضیه‌ی تحدب هاردی** [۱۱]) فرض کنیم f تابعی تحلیلی در دیسک واحد باشد. در این صورت با فرض $۰ < p \leq \infty$ داریم:

۱. $M_p(r, f)$ تابعی صعودی از r است؛

[۱۱] Hardy's convexity theorem

۲. $\log M_p(r,f)$ تابعی محدب از $\log r$ است.

اثبات : به مرجع [۸] فصل [۱] قضیه(۱—۵) مراجعه شود. ■

تعریف ۸.۳.۱ گوییم تابع تحلیلی $f \in H(D)$ بر دیسک واحد، متعلق به فضای H^p (که $0 < p \leq \infty$) است، هرگاه

$$\lim_{r \to 1^-} M_p(r,f) < \infty$$

چون مقدار میانگین $M_p(r,f)$ نسبت به r صعودی است لذا رابطه بالا با رابطه زیر معادل است:

$$\sup_{0<r<1} M_p(r,f) < \infty$$

تذکر ۹.۳.۱ H^p تحت اعمال معمولی یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط است که به این فضاها، فضاهای هاردی می‌گویند.

تعریف ۱۰.۳.۱ فرض کنید $f \in H^p$، در این صورت نرم f روی H^p را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$||f||_{H^p} := \sup_{0<r<1} M_p(r,f) = \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^p d\theta \right)^{1/p}$$

قضیه ۱۱.۳.۱ اگر $0 < p < q \leq \infty$ باشد، آنگاه $H^q \subseteq H^p$.

اثبات : ابتدا فرض کنید $p,q \neq \infty$ و $f \in H^q$ باشد، دراین صورت بنابر نامساوی هلدر(قضیه (۲.۲.۱)) داریم:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|f(re^{i\theta})|^p \times 1) d\theta$$

$$\leq \Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(|f(re^{i\theta})|^p)^{\frac{q}{p}}d\theta\Big)^{\frac{p}{q}}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\Big)^{\frac{q-p}{q}}$$

بنابراین

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta \leq \Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^q d\theta\Big)^{\frac{p}{q}}$$

حال اگر طرفین نامساوی را به توان $\frac{1}{p}$ برسانیم خواهیم داشت:

$$\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^q d\theta\Big)^{\frac{1}{q}}$$

و چون $f \in H^q$ است، بنابراین مقدار اخیر متناهی است و لذا نتیجه می‌گیریم که $f \in H^p$.

حال فرض کنید $q = \infty$ دراین صورت می‌دانیم که

$$M_\infty(r,f) = \max_{0\leq\theta\leq 2\pi}|f(re^{i\theta})|$$

درنتیجه

$$|f(re^{i\theta})| \leq M_\infty(r,f) \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

بنابراین

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}M_\infty^p(r,f)d\theta = M_\infty^p(r,f)$$

لذا

$$\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta\Big)^{\frac{1}{p}} \leq M_\infty(r,f)$$

و درنتیجه

$$M_p(r,f) \leq M_\infty(r,f)$$

ولی می‌دانیم که $f \in H^\infty$ است. لذا طرف دوم نامساوی فوق با میل دادن $r \to ۱$ متناهی خواهد بود و درنتیجه خواهیم داشت $\lim_{r\to ۱} M_p(r,f) < \infty$، و این معنی می‌دهد که $f \in H^p$. ■

مثال ۱۲.۳.۱ ۱): تابع $f(z) = \frac{۱}{۱-z}$ برای $p \geq ۱$ متعلق به H^p نیست.

۲): تابع $g(z) = \frac{۱}{(۱-z)^۲}$ به ازای $p < \frac{۱}{۲}$ عضوی از H^p است.

اثبات : به مرجع [۸] صفحه ۱۳ مراجعه شود. ■

نتیجه ۱۳.۳.۱ مجموعه‌ی H^∞ متشکل از تمام توابع تحلیلی و کراندار در دیسک واحد است.

اثبات : ابتدا فرض کنیم f متعلق به فضای H^∞ باشد. طبق تعریف، f در D تحلیلی بوده و داریم:

$$M := \lim_{r\to ۱^-} M_\infty(r,f) = \lim_{r\to ۱^-} \max_{\circ \leq \theta \leq ۲\pi} |f(re^{i\theta})| < \infty$$

پس طبق حکم اول قضیه‌ی ۷.۳.۱، برای هر $\circ \leq r < ۱$، $M_\infty(r,f) \leq M$ و در نتیجه برای هر $\circ \leq \theta \leq ۲\pi$ و $\circ \leq r < ۱$، $|f(re^{i\theta})| \leq M$ و f در D کراندار است. برعکس، اگر f تابعی تحلیلی و کراندار در D باشد دراین صورت طبق تعریف های ۶.۳.۱ و ۸.۳.۱، به وضوح $f \in H^\infty$. ■

نتیجه ۱۴.۳.۱ برای $۱ \leq p \leq \infty$، H^p بانرم $||f||_{H_p} = \sup_{\circ<r<۱} M_p(r,f)$ یک فضای باناخ است.

اثبات : به مرجع [۸] فصل [۳] نتیجه(۱) مراجعه شود. ■

تذکر ۱۵.۳.۱ باتوجه به این که در حالت $p < ۱$، $||.||_p$، نرم نیست لذا اگر $\circ < p < ۱$ آنگاه H^p فقط یک فضای متری کامل است.

اثبات : به مرجع [۸] فصل [۳] نتیجه(۲) مراجعه شود. ■

قضیه ۱۶.۳.۱ فرض کنید $p \in (\circ, \infty)$، دراین صورت

$$H^p \subset A^{۲p} \qquad , \qquad ||f||_{A^{۲p}} \leq ||f||_{H^p}$$