بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم پایه
مرکز تبریز

پایان نامه

برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی

گروه ریاضی

عنوان پایان‌نامه:

روش های هم‌محلی و هم‌محلی تکراری برای رده‌ای از معادلات انتگرال ولترای به‌طور ضعیف منفرد

رقیه محمدی

استاد راهنما: دکتر صداقت شهمراد

استاد مشاور: محسن ساعدی

بهمن ۱۳۸۹

دانشگاه پیام نور

فرم ۱۱

تاریخ: ....

شماره: ....

بسمه تعالی

صورتجلسه دفاع از پایان نامه

دوره کارشناسی ارشد

جلسه دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد خانم **رقیه محمدی** دانشجوی رشته **ریاضی کاربرده‌ی** به شماره دانشجویی **۸۷۰۰۰۱۳۱۶** تحت عنوان **روشهای هم محلی و هم محلی تکراری برای رده ای از معادلات انتگرال ولترای به طور ضعیف منفرد**

با حضور هیات داوران در روز **دو شنبه** مورخ **۱۳۸۹/۱۱/۱۱** ساعت **۱۱/-** در محل **سالن کنفرانس** برگزار شد و هیات داوران پس از بررسی، پایان نامه مذکور را شایسته نمره به عدد ۱۹ به حروف نوزده ۰/ با درجه عالی تشخیص داد.

نام و نام خانوادگی	هیأت داوران	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه/ موسسه	امضاء
آقای دکتر صداقت شهمراد	استاد راهنما	دانشیار	دانشگاه تبریز	
آقای محسن ساعدی	استاد مشاور	مربی	مرکز تبریز	
آقای دکتر غلامرضا حجتی	استاد داور	استادیار	دانشگاه تبریز	
آقای دکتر محمد چاپچی رقیمی	نماینده گروه علمی	استادیار	مرکز تبریز	
آقای دکتر سید مهدی عراقی	مدیر تحصیلات تکمیلی استان	استادیار	مرکز تبریز	

اینجانب رقیه مهری دانشجوی ورودی سال ۸۷ مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی گواهی می نمایم چنانچه در پایان نامه خود از فکر، ایده و نوشته دیگری بهره گرفته ام با نقل قول مستقیم یا غیر مستقیم منبع و ماخذ آن را نیز در جای مناسب ذکر کرده ام. بدیهی است مسئولیت تمامی مطالبی که نقل قول دیگران نباشد بر عهده خویش می دانم و جوابگوی آن خواهم بود.

دانشجو تأیید می نماید که مطالب مندرج دراین پایان نامه (رساله) نتیجه تحقیقات خودش می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

نام و نام خانوادگی دانشجو رقیه مهری

تاریخ و امضاء ۸۹/۱۱/۲۶

اینجانب رقیه مهری دانشجوی ورودی سال ۸۷ مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی گواهی می نمایم چنانچه براساس مطالب پایان نامه خود اقدام به انتشار مقاله، کتاب، و ... نمایم ضمن مطلع نمودن استاد راهنما، با نظر ایشان نسبت به نشر مقاله، کتاب، و ... و به صورت مشترک و با ذکر نام استاد راهنما مبادرت نمایم.

ام و نام خانوادگی دانشجو رقیه مهری

تاریخ و امضاء ۸۹/۱۱/۲۶

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات ، آزمایشات و نو آوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه پیام نور می باشد .

ماه و سال

فهرست مندرجات

تقدیم به

کودک دلبندم

که تمام زندگی‌ام اوست.

تقدیر و تشکر

سپاس خداوندی را که اندیشه در حضرتش سرگردان و متحیر گشته است. حمد بی‌پایان مخصوص اوست و گنجینه‌ی اسرار غیب در او. خدایی که انسان را خلق کرد و توان اندیشه و کلام و نگارش به او عطا کرد تا یاد بگیرد آنچه را نمی‌داند.

با سپاس فراوان از استاد دانشمند و بزرگوارم جناب آقای دکتر شهمراد که دلسوزانه و بی‌دریغ قطره‌ای از دریای بی‌کران علمشان را در اختیار من نهادند و صبورانه و حکیمانه در تمام مراحل راهنمایی‌ام فرمودند.

همچنین از جناب آقای محسن ساعدی که زحمت مشاوره‌ی این پایان‌نامه را به عهده گرفتند تشکر می‌نمایم.

از استاد داور محترم، جناب آقای دکتر حجتی که قبول زحمت فرمودند قدردانی می‌نمایم.

همچنین از همسر عزیزم که در تمام مراحل یاور وهمراه من بود و در تمام سختی‌ها، دستهای یاری‌رسان و کلام امیدبخشش را از من دریغ نکرد سپاسگزاری می کنم. از خانواده‌ام و تمام کسانی که یاریم کردند و همراهم شدند تشکر می‌نمایم.

چکیده فارسی

در این پایان‌نامه که بر اساس مرجع [۴] تدوین یافته است، در مورد خواص همگرایی روش‌های هم‌محلی و هم‌محلی تکراری برای رده‌ی خاصی از معادلات انتگرال ولترای به طور ضعیف منفرد بحث می‌شود. اگر جواب واقعی در شرایط خاصی صدق کند، با انتخاب پارامترهای هم‌محلی خاص، خاصیت فوق‌همگرایی جواب حاصل از روش هم‌محلی، بررسی می‌شود.

درپایان، مثالهای عددی، نتایج تئوری را تشریح می‌کند.

واژگان کلیدی

معادلات انتگرال ولترا، هسته‌ی منفرد، روش هم‌محلی، هم‌محلی تکراری، فوق‌همگرایی .

مقدمه

در این نوشتار کاربرد روشهای هم‌محلی و هم‌محلی تکراری برای حل تحلیلی معادله انتگرال ولترای

$$y(t) = g(t) + \int_{۰}^{t} p(t,s)y(s)ds, \qquad t \in (۰, T],$$

$$p(t,s) = \frac{s^{\mu-۱}}{t^{\mu}}, \qquad \mu > ۱,$$

بحث می‌شود. این معادله در مسائل انتقال حرارت رخ می‌دهد.

همچنین همگرایی روش ارائه شده بررسی می‌شود. در ادامه با انتخاب نقاط خاصی به عنوان پارامترهای هم‌محلی، امکان رسیدن به مرتبه‌ی بالاتر همگرایی (خاصیت فوق‌همگرایی) حاصل می‌شود و تحت فرض‌های خاص معادله‌ی مذکور را با یک معادله‌ی جدید که در مفروضات قضیه‌ی ارائه شده در بخش فوق‌همگرایی صدق کند جایگزین می‌کنیم.

همین طور جواب متناظر با هم‌محلی تکراری نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد.

فصل ۱

یادآوری

در این فصل تعارف و قضایایی که در فصلهای بعدی دانستن آنها لازم است بیان می‌شود.

۱.۱ مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۱.۱ : عملگر: نگاشت یا تبدیلی است که روی یک عنصر از فضا اثر می‌کند و عنصر دیگری از همان فضا را تولید می‌کند.

تعریف ۲.۱.۱ : فرض کنید X و Y فضاهای برداری نرمدار باشند و فرض کند $K : X \to Y$ خطی باشد. آنگاه K فشرده است اگر مجموعه‌ی $\{Kx| \; ||x||_X \leq ۱\}$ دارای بستار فشرده در Y باشد.

تعریف ۳.۱.۱ : دنباله همگرا: دنباله‌ی $\{p_n\}$، در فضای متری X را همگرا نامند اگر نقطه‌ای مانند $p \in X$ موجود باشد به‌طوری‌که به ازای هر $\epsilon > ۰$ عدد صحیحی چون N وجود داشته باشد به‌طوری‌که به ازای هر $n \geq N$، نامساوی $d(p_n, p) < \epsilon$ را ایجاب کند.

تعریف ۴.۱.۱ : دنباله‌ی کشی: دنباله‌ی $\{p_n\}$ در فضای متری X را یک دنباله‌ی کشی می‌نامند هر گاه به ازای هر $\epsilon > ۰$، عدد صحیحی چون N وجود داشته باشد به‌طوری‌که اگر $n \geq N$ و $m \geq N$ ، داشته باشیم:

$$d(p_n, p_m) < \epsilon.$$

تعریف ۵.۱.۱ : فضای تام : یک فضای متری که در آن هر دنباله‌ی کشی، همگرا باشد فضای تام نامیده می‌شود.

تعریف ۶.۱.۱ : فضای باناخ : هر فضای باناخ یک فضای خطی نرمدار است که با متر تعریف شده به‌وسیله‌ی نرمش تام باشد.

تعریف ۷.۱.۱ : هر گاه X یک فضای متری باشد $C(X)$ را برابر تمام توابع مختلط پیوسته و کراندار با قلمرو X در نظر می‌گیریم.

تعریف ۸.۱.۱ : نگاشت انقباض: فرض کنیم X یک فضای متری باشد هرگاه ϕ ، X را به توی X بنگارد و عددی مثل $c < ۱$ موجود باشد به‌طوری‌که به ازای هر $x, y \in X$،

$$d(\phi(x), \phi(y)) \leq c\, d(x, y)$$

آنگاه ϕ یک نگاشت انقباض از X به توی X است.

قضیه ۹.۱.۱ : (نگاشت انقباض): فرض کنید X یک فضای متری تام باشد و ϕ یک انقباض از X به توی X باشد آنگاه یک و فقط یک $x \in X$ وجود دارد که $\phi(x) = x$ (به عبارت دیگر ϕ دارای نقطه ثابت منحصربه‌فرد است.)

برهان: ر.ک. [۹].

تعریف ۱۰.۱.۱ : چندجمله‌ای مشخصه: هرگاه A یک ماتریس $n \times n$ حقیقی باشد، چندجمله‌ای تعریف شده با

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I),$$

چندجمله‌ای مشخصه A نامیده می‌شود.

تعریف ۱۱.۱.۱ : مقدار ویژه: هرگاه $P(\lambda)$ چندجمله‌ای مشخصه ماتریس A باشد، ریشه‌های P مقادیر ویژه‌ی ماتریس A نامیده می‌شوند.

هرگاه λ یک مقدار ویژه از A بوده و $X \neq ۰$ دارای این خاصیت باشد که $(A - \lambda I)X = ۰$، آنگاه X یک بردار ویژه‌ی ماتریس A، متناظر مقدار ویژه‌ی λ نامیده می‌شود.

تعریف ۱۲.۱.۱ : شعاع طیفی: شعاع طیفی ماتریس A، $\rho(A)$، به صورت

$$\rho(A) = max|\lambda_i|, \quad i = ۱, ۲, \ldots, n,$$

تعریف می‌شود، که در آن λ_i یک مقدار ویژه‌ی A است.

لم ۱۳.۱.۱ : اگر شعاع طیفی ماتریس D کوچکتر از یک باشد آنگاه $(I - D)$ معکوس پذیر است .

برهان: ر.ک. [۱].

لم ۱۴.۱.۱ : اگر λ مقدار ویژه‌ی D باشد $۱/\lambda$ مقدار ویژه‌ی $D^{-۱}$ است.

برهان: ر.ک. [۱].

۲.۱ درونیابی

در بحث درونیابی فرض می‌کنیم مقدار تابع f در تعدادی از نقاط داده شده است، هدف تعیین مقدار تابع در نقاطی است که تابع در آنها نامعلوم است.

تعریف ۱.۲.۱ : تابع درونیاب: فرض کنید تابع f در نقاط $x_۰$، $x_۱$، $\ldots$، x_n در بازه‌ی $[a, b]$ داده شده باشد. تابع $g(x)$ را یک تابع درونیاب f در این نقاط گوییم هرگاه

$$g(x_i) = f(x_i), \quad i = ۰, \ldots, n$$

در این صورت به ازای هر $x \in [a, b]$ قرار می‌دهیم

$$f(x) \simeq g(x);$$

اگر $g(x)$ یک تابع چندجمله‌ای باشد آن را چندجمله‌ای درونیاب f می‌گویند.

قضیه ۲.۲.۱ : فقط یک چندجمله‌ای $P(x)$، حداکثر از درجه‌ی n، وجود دارد که در شرط زیر صدق می‌کند

$$P(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

برهان: ر.ک. [۱].

قضیه‌ی زیر روند درونیابی لاگرانژ را توصیف می‌کند.

قضیه ۳.۲.۱ : (قضیه درونیابی لاگرانژ): هرگاه x_0، x_1، ...، x_n، $n+1$ نقطه متمایز بوده و f تابعی با مقادیر معلوم در این نقاط باشد، آنگاه چندجمله‌ای منحصربه‌فردی مانند P، از درجه‌ی حداکثر n، وجود دارد با این خاصیت که:

$$f(x_k) = P(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n;$$

این چندجمله‌ای با رابطه‌ی

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k(x),$$

داده می‌شود که د ر آن

$$L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{1.1}$$

برهان: ر.ک. [۱].

چندجمله‌ای‌هایی که در رابطه‌ی (۱.۱) بیان شده به چندجمله‌ای‌های لاگرانژ معروفند و چندجمله‌ای $P(x)$ شکل لاگرانژ چندجمله‌ای درونیاب نامیده می‌شود.

نکته ۴.۲.۱ : چندجمله‌ای‌های لاگرانژ مستقل خطی‌اند.

۳.۱ آشنایی با معادلات انتگرال

تعریف ۱.۳.۱ : معادله انتگرال: هر معادله‌ای که در آن تابع مجهول زیر علامت انتگرال ظاهر شود یک معادلهٔ انتگرال است.

شکل کلی معادلات انتگرال به صورت

$$F\Big(x, y(x), \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} G(x,t,y(t))dt\Big) = 0,$$

است به‌طوری که y تابع مجهول است.

معادلات انتگرال به دو دسته‌ی خطی و غیر خطی تقسیم می‌شوند:

معادلات انتگرال خطی دارای شکل عمومی

$$y(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)y(t)dt = f(x),$$

می‌باشند و معادلات انتگرال غیر خطی نیز به شکل

$$y(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t,y(t))dt = f(x),$$

یا به شکل

$$y(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)F(y(t))dt = f(x),$$

ظاهر می‌شوند. $K(x,t)$ هسته‌ی معادله انتگرال نامیده می‌شود.

۲.۳.۱ دسته‌بندی معادلات انتگرال خطی

معادله انتگرال فردهلم نوع دوم:

$$y(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt = f(x), \quad a \le t \le b.$$

معادله انتگرال فردهلم نوع اول:

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt, \quad a \leq t \leq b.$$

معادله انتگرال ولترا نوع دوم:

$$y(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)y(t)dt = f(x), \quad a \leq x,$$

معادله انتگرال ولترا نوع اول:

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)y(t)dt, \quad a \leq x,$$

نکته ۳.۳.۱ در هر یک از معادلات فوق اگر $f(x) = 0$ باشد معادله را همگن می‌گویند.

نکته ۴.۳.۱ معادله انتگرال ولترا حالت خاص از معادله انتگرال فردهلم است. چون با فرض

$$K(x,t) = 0, \quad t > x,$$

معادله‌ی ولترا به معادله‌ی فردهلم تبدیل می‌شود.

تعریف ۵.۳.۱ : معادله انتگرال منفرد: معادله انتگرالی که در آن حداقل یکی از حدود انتگرال نامتناهی و یا هسته‌ی معادله انتگرال در نقطه یا نقاطی از بازه‌ی انتگرالگیری نامتناهی می‌گردد.

تعریف ۶.۳.۱ : معادله انتگرال به‌طور ضعیف منفرد: هسته‌ی $K(x,t)$ را منفرد به طور ضعیف می‌گویند هر گاه به ازای $t \neq x$ پیوسته و در رابطه‌ی زیر صدق کند

$$K(x,t) = H(x,t)|t-x|^{-\alpha},$$

به‌طوری‌که $H(x,t)$ پیوسته و $\alpha < ۱$ باشد، در این صورت معادله انتگرال متناظر را منفرد به‌طور ضعیف می‌گویند.

تعریف ۷.۳.۱ : ضرب داخلی : به ازای دو تابع حقیقی و انتگرال‌پذیر f و g، ضرب داخلی آن‌ها را روی $[a,b]$، به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

قضیه ۸.۳.۱ : (قضیه‌ی تناوبی فردهلم): معادله‌ی ناهمگن

$$y(x) = f(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt, \tag{۲.۱}$$

دارای جواب یکتاست اگر و تنها اگر معادله‌ی همگن

$$y(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt = ۰, \tag{۳.۱}$$

فقط دارای جواب بدیهی باشد.

اگر معادله‌ی همگن دارای جواب غیربدیهی باشد آنگاه معادله‌ی ناهمگن یا دارای جواب نیست و یا بیشمار جواب دارد.

اگر معادله‌ی همگن دارای جواب غیربدیهی باشد، شرط وجود جواب معادله‌ی ناهمگن (۲.۱) این است که $(y_H(x), f(x)) = ۰$ باشد به‌طوری‌که $y_H(x)$ جواب معادله‌ی (۳.۱) و (f,g) نشان دهنده‌ی ضرب داخلی دو تابع f و g است.

برهان : ر.ک. [۷].

۹.۳.۱ حل تکراری معادله انتگرال ولترای نوع دوم

معادله انتگرال ولترای ناهمگن نوع دوم

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_{0}^{x} K(x,t)y(t)dt, \quad 0 \leq x, y \leq h, \tag{۴.۱}$$

را بررسی می‌کنیم به‌طوری‌که

$$||f||^{2} = \int_{0}^{h} |f(x)|^{2} dx < \infty,$$

$$||K||^{2} = \int_{0}^{h} \int_{0}^{x} |K(x,t)|^{2} dt dx < \infty,$$

جواب را به شکل

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{i} y_{i}(x), \tag{۵.۱}$$

در نظر می‌گیریم؛

با قرار دادن (۵.۱) در (۴.۱) به‌دست می‌آوریم

$$y_{0}(x) = f(x),$$

و

$$y_{n}(x) = \int_{0}^{x} K(x,t) y_{n-1}(t)dt, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

می‌توان ثابت کرد که :

۱) به ازای هر مقدار λ، معادله‌ی (۴.۱) دارای جواب است.

۲) به ازای هر مقدار λ، جواب یکتاست.

۳) به ازای هر مقدار λ، سری (۵.۱) همگرا به جواب معادله‌ی (۴.۱) است.

برای توضیحات بیشتر به منبع [۸] مراجعه کنید.

۱۰.۳.۱ حل تکراری معادله انتگرال فردهلم نوع دوم

معادله انتگرال فردهلم ناهمگن نوع دوم

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_0^h K(x,t)y(t)dt, \qquad 0 \le x \le h, \tag{۶.۱}$$

را بررسی می‌کنیم و فرض می‌کنیم

$$||f||^2 = \int_0^h |f(x)|^2 dx < \infty,$$

$$||K||^2 = \int_0^h \int_0^h |K(x,t)|^2 dtdx < \infty.$$

فرض می‌کنیم معادله انتگرال (۶.۱) دارای جوابی به صورت $y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i y_i(x)$ باشد.
با جایگذاری سری در معادله انتگرال خواهیم داشت:

$$y_0(x) = f(x),$$

$$y_n(x) = \int_0^h K(x,t)y_{n-1}(t)dt, \quad n = 1, 2, \ldots$$

۱) سری $y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i y_i(x)$ به جواب $y(x)$ معادله انتگرال (۶.۱) همگراست اگر $|\lambda| < \frac{1}{||K||}$.
۲) با فرض اینکه $|\lambda| < \frac{1}{||K||}$، معادله‌ی (۶.۱) دارای جواب یکتاست.
برای توضیحات بیشتر به منبع [۸] مراجعه کنید.

۴.۱ روش هسته‌ی حلّال

معادله انتگرال ولترای نوع دوم

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,y)\phi(y)dy$$