۴ع

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته آمار ریاضی

عنوان :

متغیرهای تصادفی گاوسی تعمیم یافته و زیرگاوسی

استاد راهنما:

دکتر ابوالقاسم بزرگ‌نیا ـ استاد دانشگاه مشهد

استاد مشاور:

دکتر غلامحسین شاهکار ـ استادیار دانشگاه مشهد

استاد مدعو:

دکتر علی عمیدی ـ استاد دانشگاه شهید بهشتی

نگارش:

محمود کامکار

شهریور ۱۳۷۴

تقدیم به پدر و مادر بزرگوارم و همسر مهربانم

که در راه رسیدن به اهدافم از هیچ کوششی دریغ نورزیدند.

و تقدیم به همه کسانی که در کسب علم می‌کوشند و از خود مایه می‌گذارند

شماره ......
تاریخ ......
پیوست ......

دانشکده علوم

دانشگاه فردوسی مشهد

دانشگاه فردوسی " مشهـد"

دانشکده علـوم

گـروه آمـار

صـورتجلسـه دفاع رسالـه کارشناسی ارشـد آمـارریاضـی

درتاریخ ۷۴/۷/۱۳ خانم / آقای محمود کامکـار از رسالهٔ کارشناسی ارشد خود

تحت عنوان :

" متغیرهای تصادفی گاوسی تعمیـم یافتـه و زیر گاوسـی "

با بیان خلاصه ای از کار انجام شده و پاسخ به سئوالات داوران دفـــــاع نمودنـــــمـد و

این رسالـه با نمـره ۱۹/۵ معادل عالـی قبول/رد شـد.

۱ ـ استادراهنما : دکتر ابوالقاسم بزرگ نیا

۲ ـ اعضاء هیئت داوران ۱ ـ دکتر علی عمیـدی

۲ ـ دکتر غلامحسین شاهکار

۳ ـ

مـدیر گروه آمـار

غلامحسین شاهکار

معاون آموزشـی دانشکده

مقدمه چکیده :

اصولاً نام متغیرهای تصادفی زیرگاوسی منسوب است به متغیرهای تصادفی‌گاوسی با میانگین صفر و این متغیرها دو کلاس مهم از متغیرهای تصادفی را شامل می‌شوند،یکی متغیرهای تصادفی‌گاوسی با میانگین صفر و دیگری متغیرهای تصادفی‌کراندار با میانگین صفر. ولی «چاو» در سال ۱۹۶۶ این متغیرها را بدون اینکه میانگین استاندارد برای آنها در نظر بگیرد مورد بررسی قرار داد و این متغیرها را گاوسی تعمیم یافته نامید.

اگرچه به زحمت می‌توان تفاوتی بین این متغیرها قائل شد، ولی ما در این رساله سعی کرده‌ایم که این متغیرها را با همان دو نام ذکر شده جداگانه مورد بررسی قرار دهیم. بنابراین فصل اول و دوم را به متغیرهای تصادفی‌گاوسی تعمیم یافته و فصل سوم و چهارم را به متغیرهای تصادفی زیرگاوسی اختصاص داده‌ایم.

در فصل اول متغیرهای تصادفی‌گاوسی تعمیم یافته را معرفی و خواص آنها را مورد بررسی قرار داده و سپس همگرایی در متغیرهای مستقل‌گاوسی تعمیم یافته مورد بحث قرار می‌گیرد،و در ادامه این فصل با استفاده از خواص مارتینگلها مطالبی را در مورد متغیر توقف بیان کرده‌ایم.

فصل دوم این رساله در حقیقت تعمیم فصل اول است.همانطوریکه متذکر شدیم در فصل اول متغیرهای تصادفی مستقل‌گاوسی تعمیم یافته مورد بحث قرار می‌گیرند،در حالیکه در این فصل قضایای فصل اول را در مورد متغیرهای m- وابسته و وابسته‌کامل تعیمم می‌دهیم، و نتایج مربوط به آنها را اثبات می‌کنیم.

در فصل سوم متغیرهای تصادفی زیرگاوسی و اکیداً زیرکاوسی را مورد بررسی قرار داده و مثالهایی را در مورد این متغیرها بیان می‌کنیم. سپس رابطه بین توزیعهای کلاسیک و این متغیرها را بررسی کرده و در ادامه با استفاده از خواص متغیرهای تصادفی زیرگاوسی تکنیکهای زیرگاوسی را در اثبات قوانین اعداد بزرگ بیان می‌کنیم،و با استفاده از قوانین آنها،قانون اعداد بزرگ را به روشهای ساده‌تری اثبات می‌کنیم.

در فصل چهارم صورتهای درجه دوم و دو خطی حاصل از متغیرهای تصادفی زیرگاوسی مورد بحث قرار گرفته و در چند قضیه برآوردهای نمایی برای این دو صورت بدست آورده، و سپس از آنها در بدست آوردن قانون لگاریتم مکرر در متغیرهای تصادفی زیرگاوسی استفاده کرده‌ایم.

در بخش ضمیمه سعی شده است مطالبی که با این متغیرها ارتباط چندانی ندارند ولی در اثبات قضایا از آنها استفاده شده است را بیان و اثبات کنیم. ضمناً متذکر می‌شویم اثباتهایی که با علامت * مشخص شده است توسط خودم اثبات شده، و مطالبی که با ** مشخص شده است مطالبی هستند که منبع خاصی نداشته و توسط خودم بیان و اثبات شده‌اند.

در پایان برخود لازم می‌دانم از استاد ارجمند جناب آقای **دکتر بزرگ‌نیا** ***(استاد راهنما)*** که با صبر و حوصله فراوان اینجانب را در تهیه این رساله راهنمایی کرده‌اند صمیمانه تشکر و قدردانی کنم. همچنین از آقای **دکتر *شاهکار*** ***(استاد مشاور)*** بخاطر راهنمایی‌هایشان، و همچنین از آقای **دکتر *علی عمیدی*** که دعوت ما را قبول کرده‌اند و داوری این رساله را بر عهده گرفته‌اند، تشکر و قدردانی می‌کنم.

و نیز در خاتمه از آقای رسول اتحاد مسئول کتابخانه دانشکده علوم ۲ و مسئولین کتابخانه دانشکده علوم ۱ بخاطر در اختیار گذاشتن مقالات و کتب لازم و نیز تهیه مقالات از خارج از کشور و همچنین از خانم پاکرو که تایپ این رساله را بر عهده داشته‌اند صمیمانه تشکر و قدردانی می‌کنم.

شهریور ماه ۷۴

محمود کامکار

فهرست

عنوان	صفحه

صفحه	عنوان

فصل چهارم. برآوردهایی برای دنباله احتمالات صورتهای درجه دوم و دو خطی در متغیرهای تصادفی زیر گاوسی وکاربرد آنها در قانون لگاریتم مکرر

علائم اختصاری

a.e. = almost everywhere	تقریباً همه جا
$\xrightarrow{P}$ = converge in probobility	همگرایی در احتمال
a.e. = converge almost everywher	همگرایی .a.e
$\underline{\lim}$ = lim inf	حد پایین
$\overline{\lim}$ = lim sup	حد اعلا
i.o. = lim sup	

$$P(E_n \quad \text{i.o.}) = P(\limsup E_n) = P(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} E_n)$$

فصل ۱

«متغیرهای تصادفی گاوسی تعمیم یافته مستقل»

۱.۱. تعاریف و مقدمات.

در این بخش ضمن تعریف متغیرهای تصادفی گاوسی تعمیم یافته [1] یک لم که در قضایای بخشهای آینده مورد استفاده قرار می‌گیرد را بیان و اثبات می‌کنیم.

تعریف ۱. متغیر تصادفی X را یک متغیر تصادفی گاوسی تعمیم یافته گوئیم هرگاه وجود داشته باشد، $\alpha \geq 0$ بطوریکه برای هر عدد حقیقی t داشته باشیم:

$$E(e^{tX}) \leq e^{t^2\alpha^2/2}. \qquad (1-1)$$

تذکر. با توجه به اینکه تابع $e^X(X > 0)$ تابعی غیر نزولی است، پارامتر α در رابطه (۱-۱) منحصر بفرد نیست ولی آنچه مورد نظر است کوچکترین αای است که در رابطه فوق صدق می‌کنند. بنابراین تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲.

$$\tau(X) = \inf\{\alpha : \alpha \geq 0, E(e^{tX}) \leq e^{t^2\alpha^2/2}, t \in R\}. \qquad (2-1)$$

مثال ۱.۱.۱.۱ اگر X متغیر تصادفی باشد که مقادیر ۱ و ۱- را با احتمالات $\frac{1}{2}$ اختیار کند آنگاه X یک متغیر تصادفی گاوسی تعمیم یافته با $\tau(X) \leq 1$ است.

1: generalized GauSSian

زیرا داریم :

$$p(X = ۱) = p(X = -۱) = \frac{۱}{۲}$$

پس

$$E(e^{tX}) = \frac{۱}{۲}(e^{t} + e^{-t}) = \frac{۱}{۲}\left(\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{t^{n}}{n!} + \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-t)^{n}}{n!}\right) = \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{t^{۲n}}{(۲n)!} \quad , \qquad (۱-۳)$$

و نیز

$$e^{t^{۲}/۲} = ۱ + \frac{t^{۲}}{۲} + \frac{t^{۴}}{۲^{۲}\times ۲!} + \frac{t^{۶}}{۲^{۳}\times ۳!} + \dots = \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{t^{۲n}}{n!\,۲^{n}} \quad . \qquad (۱-۴)$$

از مقایسه (۱ ـ ۳) و (۱ ـ ۴) نتیجه می‌شود

$$E(e^{tX}) \leq e^{t^{۲}/۲}$$

پس بنا به تعریف X یک متغیر تصادفی گاوسی تعمیم یافته با $\tau(X) \leq ۱$ است.

ذکر این نکته ضروری است مثالهای بیشتر در فصلهای آینده بخصوص فصل ۳ ذکر خواهد شد.

لم ۱.۱.۱.۱ اگر برای متغیر تصادفی X داشته باشیم $EX = ۰$ و $|X| \leq ۱$ آنگاه برای هر عدد حقیقی t،

$$E(e^{tx}) \leq e^{t^{۲}} \quad . \qquad (۱-۵)$$

** اثبات* . حالت اول . فرض کنید $|t| \leq ۱$ پس می‌توان نوشت

$$E(e^{tX}) = E(۱ + tX + \frac{t^{۲}}{۲!}X^{۲} + \frac{t^{۳}}{۳!}X^{۳} + \dots)$$

$$= ۱ + \frac{t^{۲}}{۲!}EX^{۲} + \frac{t^{۳}}{۳!}EX^{۳} + \dots . \qquad (EX = ۰)$$

$$\leq ۱ + E(X^{۲})\,(\frac{t^{۲}}{۲!} + \frac{t^{۳}}{۳!} + \frac{t^{۴}}{۴!} + \dots)$$

$$\leq ۱ + EX^{۲}(t^{۲} - \frac{t^{۲}}{۲} + \frac{|t|^{۳}}{۳!} + \frac{t^{۴}}{۴!} + \frac{|t|^{۵}}{۵!} + \dots)$$

$$\leq ۱ + EX^{۲}\{t^{۲} - t^{۲}(\frac{۱}{۲!} - \frac{|t|}{۳!} - \frac{t^{۲}}{۴!} - \frac{|t|^{۳}}{۵!} - \dots)\}$$

$$\le ۱ + EX^۲\{t^۲ - t^۲(\frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} - \frac{۱}{۴!} - \frac{۱}{۵!} - ...)\}$$

$$\le ۱ + EX^۲\{t^۲ - t^۲(\frac{۱}{۲} - (e - ۱ - ۱ - \frac{۱}{۲}))\}$$

$$= ۱ + EX^۲(t^۲ - ۰/۲۸t^۲)$$

$$\le ۱ + t^۲EX^۲ \le ۱ + t^۲ \le e^{t^۲} . \qquad (|X| \le ۱)$$

پس اگر $|t| \le ۱$ نتیجه می‌شود

$$E(e^{tx}) \le e^{t^۲}$$

بنابراین در این حالت حکم برقرار است.

حالت دوم. فرض کنید $t > ۱$ با توجه به اینکه $|X| < ۱$ می‌توان نوشت

$$E(e^{tx}) \le e^t \le e^{t^۲},$$

و اگر $t < -۱$ چون $۱ < X < ۱$. پس

$$t < tX < -t < t^۲,$$

بنابراین

$$e^{tx} \le e^{t^۲},$$

در نتیجه

$$E(e^{tX}) \le e^{t^۲} .$$

■

توجه. لم فوق در حقیقت نشان دهنده این است که متغیر تصادفی X یک متغیر تصادفی گاوسی تعمیم یافته با پارامتر $\tau(X) \le \sqrt{۲}$ است. زیرا می‌توان نوشت،

$$E(e^{tX}) \le e^{t^۲} = \exp\left(\frac{t^۲\sqrt{۲}^۲}{۲}\right) .$$

بنابراین با توجه به تعریف متغیرهای تصادفی گاوسی تعمیم یافته نتیجه می‌شود $\tau(X) = \alpha \le \sqrt{۲}$.

تذکر ۲. در انتهای این بخش ذکر این نکته ضروری است که اگر در بخشها و فصلهای آینده صحبت از پارامتر α برای یک متغیر تصادفی گاوسی تعمیم یافته به میان آید منظور همان $\alpha \le \tau(X)$ است.

۲.۱. خواص متغیرهای تصادفی گاوسی تعمیم یافته

در این بخش با استفاده از تعریف متغیرهای تصادفی گاوسی تعمیم یافته خواص آنها را بیان و اثبات می‌کنیم و بخصوص نامساویهای مهم که در بخشهای آینده مورد استفاده قرار خواهندگرفت در این بخش اثبات خواهند شد.

قضیه ۱.۲.۱. اگر X یک متغیر تصادفی گاوسی تعمیم یافته و $a > 0$ یک عدد حقیقی باشد آنگاه

الف) $-X$ متغیر تصادفی گاوسی تعمیم یافته است و $\tau(-X) = \tau(X)$.

ب) aX متغیر تصادفی گاوسی تعمیم یافته است و $\tau(aX) = a\tau(X)$.

اثبات (الف). چون X متغیر تصادفی گاوسی تعمیم یافته است پس برای هر عدد حقیقی t وجود دارد $\alpha > 0$ بطوریکه

$$E(e^{tX}) \le e^{t^2\alpha^2/2}.$$

بنابراین

$$E(e^{(-t)(-X)}) \le e^{t^2\alpha^2/2}.$$

اگر قرار دهیم $-t = z$ پس

$$E(e^{z(-X)}) \le e^{z^2\alpha^2/2},$$

لذا بنا به تعریف $-X$ یک متغیر تصادفی گاوسی تعمیم یافته است و چون $z = -t$ پس

$$\tau(-x) = \inf\{\alpha : \alpha \ge 0, E(e^{z(-x)}) \le e^{z^2\alpha^2/2}\}$$
$$= \inf\{\alpha : \alpha \ge 0, E(e^{tx}) \le e^{t^2\alpha^2/2}\} = \tau(x) .$$

* *اثبات (ب)* . بنا به تعریف داریم

$$E(e^{tX}) \le e^{t^2\alpha^2/2},$$

بنابراین برای هر $a > 0$

$$E(e^{(t/a)(aX)}) \le e^{t^2\alpha^2/2}.$$

و با فرض $z = \frac{t}{a}$

$$E(e^{z(aX)}) \le e^{z^2/2(a\alpha)^2}.$$

پس aX گاوسی تعمیم یافته است و با فرض $\alpha = \tau(X)$ ،

$$E(e^{z(aX)}) \le \exp\{\frac{Z^2}{2}(a\tau(X))^2\},$$

پس نتیجه می‌شود

$$\tau(aX) = a\tau(X).$$

■

نتیجه ۱. اگر X متغیر تصادفی گاوسی تعمیم یافته باشد و $a < 0$ آنگاه aX متغیر تصادفی گاوسی ـ تعمیم یافته است و $\tau(aX) = -a\tau(X)$.

اثبات. چون $a < 0$ پس $-a > 0$ پس بنا به قضیه (۱.۲.۱) $-aX$ گاوسی تعمیم یافته است و

$$\tau(-aX) = -a\tau(X).$$

■

نتیجه ۲. اگر X متغیر تصادفی گاوسی تعمیم یافته باشد و a یک عدد حقیقی دلخواه $(a \ne 0)$ آنگاه aX متغیر تصادفی گاوسی تعمیم یافته است و

$$\tau(aX) = |a|\tau(X).$$

اثبات. با توجه به قضیه (۱.۲.۰) و نتیجه ۱، اثبات واضح است.

قضیه ۱.۲.۲. اگر X متغیر تصادفی گاوسی تعمیم یافته باشد و $\tau(X) \le \alpha$ $(\alpha \ge 0)$ آنگاه برای $\lambda > 0$ و $t > 0$:

(الف) (۱ـ۶)
$$p(X \ge \lambda) \le \exp[\frac{-\lambda^2}{2\alpha^2}]$$

(ب) (۱ـ۷)
$$p(|X| \ge \lambda) \le 2\exp(\frac{-\lambda^2}{2\alpha^2})$$

اثبات. (الف) چون $\alpha > 0$ و $\lambda > 0$ پس

$$p(X \ge \lambda) = p(\lambda X \alpha^{-2} \ge \lambda^2 \alpha^{-2}),$$

بنابراین با استفاده از نامساوی چبی‌شف داریم

$$p(X\ge\lambda) = p(\lambda X\alpha^{-2} \ge \lambda^2\alpha^{-2}) \le \frac{E(e^{\lambda\alpha^{-2}X})}{e^{\lambda^2\alpha^{-2}}}.$$

و چون X متغیر تصادفی گاوسی تعمیم یافته است پس

$$p(X\ge \lambda) = p(\lambda X\alpha^{-2} \ge \lambda^2\alpha^{-2}) \le \frac{E(e^{\lambda\alpha^{-2}X})}{e^{\lambda^2\alpha^{-2}}} \le \frac{1}{e^{\lambda^2\alpha^{-2}}}.e^{\lambda^2\alpha^{-4}.\alpha^2/2}.$$

در نتیجه

$$p(X \geq \lambda) = p(\lambda X\alpha^{-۲} \geq \lambda^{۲} \alpha^{-۲}) \leq \exp[\frac{\lambda^{۲} \alpha^{-۲}}{۲} - \lambda^{۲} \alpha^{-۲}] = \exp[\frac{-\lambda^{۲} \alpha^{-۲}}{۲}].$$

و یا

$$p(X \geq \lambda) = p(\lambda X\alpha^{-۲} \geq \lambda^{۲}\alpha^{-۲}) \leq \exp[\frac{-\lambda^{۲}}{۲\alpha^{۲}}],$$

پس رابطه (۱-۶) برقرار است.

اثبات (ب). می‌توان نوشت

$$p(|X| \geq \lambda) = p(X \geq \lambda) + p(-X \geq \lambda),$$

و چون X متغیر تصادفی گاوسی تعمیم یافته است پس بنا به قضیه (۱.۲.۱) X- نیز گاوسی تعمیم - یافته است و

$$\tau(X) = \tau(-X),$$

بنابراین با استفاده از رابطه (۱-۶)

$$p(-X \geq \lambda) \leq e^{-\lambda^{۲}/۲\alpha^{۲}} \quad , \quad p(X \geq \lambda) \leq e^{-\lambda^{۲}/۲\alpha^{۲}}$$

پس

$$p(|X| \geq \lambda) = p(X \geq \lambda) + p(-X \geq \lambda) \leq e^{-\lambda^{۲}/۲\alpha^{۲}} + e^{-\lambda^{۲}/۲\alpha^{۲}} = ۲e^{-\lambda^{۲}/۲\alpha^{۲}},$$

در نتیجه

$$p(|X| \geq \lambda) \leq ۲\exp[\frac{-\lambda^{۲}}{۲\alpha^{۲}}]. \quad \blacksquare$$

قضیه ۳.۲.۱. اگر $X_۱, X_۲, ..., X_n$ متغیرهای تصادفی گاوسی تعمیم یافته و مستقل با پارامترهای به ترتیب $\alpha_۱, \alpha_۲, ..., \alpha_n$ باشند آنگاه $S_n = \sum_{i=۱}^{n} X_i$ یک متغیر تصادفی گاوسی تعمیم یافته با پارامتر $\alpha = \sqrt{\sum_{۱}^{n} \alpha_i^{۲}}$ است.

اثبات. چون $X_۱, X_۲, ..., X_n$ متغیرهای تصادفی گاوسی تعمیم یافته هستند پس برای عدد حقیقی t می‌توان نوشت:

$$E(e^{tX_i}) \leq e^{t^{۲}\alpha_i^{۲}/۲},$$

و با توجه به استقلال متغیرها داریم: