بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه علم و صنعت ایران

دانشکده ریاضی

یک شرط لازم برای وجود فروبری‌های ایزومتریک مینیمال از فضای فرمهای کروی ناهمگن بتوی کره‌ها

اکبر صدیقی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته:
ریاضی محض

استادراهنما: پروفسور ابراهیم اسرافیلیان
بهمن ماه ۱۳۷۷

تقدیم به روان پاک مادر مهربان و فداکارم که مظهر صفا و صمیمیت بود

و به پدر صبورم که اسطورهٔ رنج است و برادران عزیز

و خواهر دلسوز و همسر مهربانم

چکیده

موضوع این رساله در باره شرط لازم برای وجود فروبری‌های ایزومتریک مینیمال از فضای فرمهای کروی ناهمگن بتوی کره‌ها است.

مقالات و کتابهای متعددی در باره فروبری‌های ایزومتریک مینیمال از فضای فرمهای کروی همگن بتوی کره‌ها را داریم ولی تاکنون مقاله یا نوشتاری در باره یک چنین فروبری‌های با دامنه فضای فرمهای ناهمگن وجود ندارد. در این نوشتار سعی می‌کنیم یک شرط لازم را برای وجود یک چنین فروبری‌هایی از یک درجه داده شده را ارائه دهیم و این شرط وابسته است تنها به درجه و گروه اساسی فضای فرم باتوجه به یک تابع صریحاً قابل محاسبه.

محاسبه این تابع نشان می‌دهد که اگر درجه فروبری کوچکتر از ۲۸ یا کوچکتر از ۲۰ باشد آنگاه به ترتیب نه L(5,2) و نه L(8,3) یک چنین فروبری ایزومتریک مینیمال بتوی یک کره را می‌پذیرند.

تقدیر و تشکر

سپاس خدای را که پس از طی یک دورهٔ پر تلاطم کشتی به ساحل حقیقت نزدیک شد تا بتوانیم گامی در حد توانایی برداریم.

در اینجا بر خود لازم می‌دانم از زحمات مستمر و مدبرانه استاد گرانقدر جناب آقای پروفسور ابراهیم اسرافیلیان که در مدت تهیه این نوشتار و تحصیل در دوره کارشناسی ارشد، اینجانب را راهنمائی و کمک نموده‌اند، صمیمانه تشکر نمایم و خدمات ارزشمند ایشان را درج می‌نهم.

از حضور اساتید گرانقدر جناب آقای پروفسور ابراهیم اسرافیلیان، جناب آقای دکتر حمید تولایی و جناب آقای دکتر مأموریان جهت داوری و دیگر دوستان در جلسه دفاعیه صمیمانه سپاسگزاری می‌نمایم.

وظیفه خود می‌دانم که از مشوقان اصلی‌ام در ادامه تحصیل از پدر عزیز و مادر مهربانم صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم.

اکبر صدیقی

فهرست مطالب

عنوان　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　صفحه

فرض کنیم M یک منیفلد ریمانی فشرده n- بعدی و $S^N(r)$ یک کره به شعاع r و به بعد N باشد.

Takahashi در مقاله *[T]* قضیه اساسی زیر را نتیجه گرفت

قضیه *(Takahashi)*: فرض کنیم M یک منیفلد ریمانی فشرده n- بعدی و $f:M \to R^N$ یک فروبری ایزومتریک باشد. در این صورت f یک فروبری ایزومتریک مینیمال بتوی یک کره گرد است اگر و فقط اگر همهٔ مولفه‌های f توابع ویژه عملگر لاپلاس روی M متناظر با همان مقدار ویژه باشند.

$$\Delta f=\lambda f \quad \text{شعاع کره} \quad a\lambda=\frac{m}{a^{۲}}$$

بنابراین کار عمده در ساختن فروبری‌های ایزومتریک مینیمال از یک منیفلد M بتوی یک کره پیدا کردن ویژه مقدارهای عملگر لاپلاس روی M به قدر کافی متنوع دایر بر تهیه توابع مختصاتی فروبری‌هاست.

نتیجه دیگر *Takahashi* در این مقاله *[T]* این است که همهٔ منیفلدهای ریمانی همگن تحویل‌ناپذیر ایزوتروپی یعنی منیفلدهایی به صورت $M=\frac{G}{H}$ که گروه ایزو تروپی‌اش H تحویل‌ناپذیر روی فضای مماسی، عمل می‌کند یک چنین فروبری‌هایی را می‌پذیرد. برای مشاهده این مطلب فضای ویژه E_λ به ازای یک مقدار ویژه ثابت $\lambda\neq ۰$ را در نظر می‌گیریم. روی E_λ یک حاصلضرب داخلی القا شده بوسیله $L^{۲}(M)$ را داریم و گروه G روی E_λ با ایزومتری عمل می‌کند. فرض کنیم $\{\phi_{۱},\ldots,\phi_N\}$ یک پایه متعامد یکه E_λ و $\phi=(\phi_{۱},\ldots,\phi_N):\mathrm{M}\to\mathrm{R}^{\mathrm{N}}$ یک نگاشت باشد. آنگاه $\sum d\phi_i^{۲}$ از یک طرف می‌تواند تعریف شود بوسیله حاصلضرب داخلی روی E_λ و از طرف دیگر بوسیله متریک پس کشیده شده از متریک استاندارد روی R^N بوسیله ϕ. در توضیح اولیه واضح است که $\sum d\phi_i^{۲}$ باید تحت عمل گروه G پایا باشد و بنابراین متریک $\sum d\phi_i^{۲}$ روی M نیز باید چنین

باشد. ولی آن وقت $\sum d\phi_i^2$ باید مضربی از متریک داده شده روی M باشد بطوریکه هر دو تحت عمل تحویل‌ناپذیر گروه ایزوتروپی H پایا هستند. چون توابع ϕ_i ثابت نیستند بنابراین این ضریب نمی‌تواند صفر باشد. بنابراین به رغم ضرب متریک روی M به یک ثابت، $\phi: M \to R^N$ یک فروبری ایزومتریک است. که طبق اولین قضیه بیان شده توسط *Takahashi* یک فروبری ایزومتریک مینیمال بتوی یک کره است. این فروبری را فروبری ایزومتریک مینیمال استاندارد از درجه d گوییم اگر λ، dامین ویژه مقدار غیر صفر باشد.

دو فروبری را هم ارز گوییم اگر آن‌ها بوسیله یک ایزومتری از فضای احاطه کننده اختلاف داشته باشند. توجه داشته باشید که انتخاب پایه‌های متعامد یکه مجزا برای E_λ مایهٔ یک فروبری هم‌ارزی می‌شوند.

مثالی مقدماتی از یک منیفلد ریمانی همگن کره n- بعدی است. همچنین فضای همگن $SO(n+1)/SO(n)$ نیزیک منیفلد ریمانی همگن است. (که در آن $SO(n) = \{A \in GL(n,R) \ : \det A = 1\}$. زیرا $S^n \cong So(n+1)/S\circ(n)$ است. ($\cong$ دیفنئومرفیک بودن است) .

(هندسه دیفرانسیل جدید برای فیزیک‌دانان نوشته *chris J Isham* ترجمه: دکتر ابراهیم اسرافیان)

توابع ویژه S^n (۱) به طور ساده تحدیدهای چندجمله‌ایهای همگن هارمونیک روی R^{n+1} بر S^n (۱) هستند. همهٔ چندجمله‌ایهای همگن هارمونیک از درجه g منحصر به توابع ویژه روی S^n با مقدار ویژه یکسان $\lambda_g = g(g+n-1)$ بوده و بعد این فضای ویژه بابر است با

$$N_g = (2g+n-1)(g+n-2)!/(g!(n-1)!)$$

برای gهای فرد فروبری ایزومتریک مینیمال استاندارد باعث بوجود آمدن یک نشاندهٔ ایزومتریک از S^n بتوی $(\sqrt{n/\lambda_g})$ $S^{N_g - 1}$ می‌شود و برای g های زوج همهٔ مولفه‌های فروبری تحت نگاشت متقاطر پایا بوده و یک نشاندهٔ ایزومتریک مینیمال از P^n بتوی $(\sqrt{n/\lambda_g})$ $S^{N_g - 1}$ بدست می‌آوریم. که در آن P^n فضای n- بعدی تصویری حقیقی است. *[4]* و بنا به قضیه‌ای در

$$RP^n \underset{\text{diffe}}{\cong} SO(n+1)/O(n,R) \qquad [1]$$

در سال *E.calabi 1967* در مقاله *[c]* نشان داد که هر فروبری ایزومتریک مینیمال از کره دو بعدی به شعاع 1 یعنی $S^2(1)$ بتوی یک کره N- بعدی به شعاع r یعنی $S^N(r)$ برابر با یک فروبری و فضای ویژه استاندارد است. در مقاله *M.dacarmo one N. wallach [DW2]* فضای همهٔ فروبدی‌های ایزومتریک مینیمال از $S^n(1)$ بتوی $S^n(r)$ تقریباً با جزئیات بررسی کردند و در آن نشان دادند که برای $n > 2$ های فروبری‌های ایزومتریک متعدی وجود دارد.

اگر قرار دهیم $r = \sqrt{n/\lambda_g}$ یا معادلاً فقط چند جمله‌ایهای همگن هارمونیک از درجه g را در نظر بگیریم آنگاه این فروبری‌های ایزومتریک مینیمال (طبق هم‌ارزی فضای احاطه کننده) بوسیله یک جسم محدب فشرده B_g در یک فضای برداری متناهی البعد پارامتری شده هستند. همچنین *Dudar-wael* در مقاله *[DW2]* نشان دادند که برای $n=2$ و هر g و برای $g=2,3$ و هر n فضای Bg یک نقطه است یعنی هر یک چنین فروبری ایزومتریک مینیمال معادل با واحد استاندارد است.

Cobor toth در مقاله *[To]* بعد این جسم محدب را دقیقاً مشخص کرد. برای مطالعه بیشتر در این زمینه می‌توانید به منابع زیر مراجعه کنید.

$[DZ]$, $[DW]$, $[DW۲]$, $[L]$, $[T]$

از توصیف جسم محدب B_g بلافاصله آن نتیجه می‌شود که نقاط درونی‌اش متناظر با فروبری‌های ایزومتریک که مورد استفاده یک پایهٔ کامل E_λ همانند مولفه‌هایشان است. همانند اثبات شده در مقاله *[WZ]* باید نشان داد که این فروبری‌ها، فروبری‌های *SO(n+1)-equivariant* بتوی R^{N_g} هستند. اما تنها فضای فرمهایی که شامل همه $SO(n+1)$ ها درگروههای ایزوتروپی‌شان باشند S^n و P^n می‌باشند بنابراین تصویر فروبری‌ها باید برای g های فرد S^n و برای g های زوج P^n باشد و تصویر فضای فرمهای دیگر باید متناظر با نقاط مرزی B_g باشد.

P.Li در مقاله *[L]* نتایج پارامتری‌سازی *Do carm and wal* در مقاله *[DW2]* را به فضاهای همگن تحویل‌ناپذیر ایزوتروپی تعمیم داد و همچنین ادعا کرد که تصویر یک فروبری ایزومتریک مینیمال از یک فضای همگن تحویل‌ناپذیر ایزوتروپی باید همچنان یک فضای همگن تحویل‌ناپذیر ایزوتروپی باشد. همچنین او روی کاربرد این قضیه برای حالتی که M یک کره باشد نیز کار کرد و نتیجه گرفت که تصویر یک فروبری ایزومتریک مینیمال از یک کره بتوی یک کره باید یک کره یا فضای تصویری حقیقی باشد. البته این دلیلی بر عدم وجود فروبری ایزومتریک مینیمال از یک فضای لنز **(Lens)** *[6]* یا فضای فرم کروی بسیار پیچیده دیگر بتوی یک کره است. ولی نتیجه‌گیری او درست نبود و برای اولین بار توسط *K.Mashimo* در مقاله *[Ma1]* تصحیح شد به این معنی که یک مثال از یک فروبری ایزومتریک مینیمال از $S^3(1)$ بتوی $S^6(\frac{1}{4})$ ارائه داد که تصویرش بالاخره یک زیر پوشش ۶ تایی از S^3 است (او تصویر را کاملاً مشخص نکرد یعنی به طور واضح معین نکرد که تصویر این فروبری چیست؟)

بعدها *M.Wong* و *W.Ziller* در مقاله *[WZ]* نشان دادند که معادلات حتمی S^3 همچنین

تحویل‌ناپذیر ایزوتروپی هستند و بنابراین بنا به قضیهٔ بیان شده توسط *Takahashi* منیفلدهای چند وجـــــهی

S^3/T^* و S^3/O^* و S^3/I^* فروبری‌های ایزومتریک مینیمال بتوی کره‌ها را می‌پذیرند.

پس این سرچشمه سوال یک دقیقه پیش است که فضای فرمهای کروی، فروبری‌های ایـزومتریک مینیمال یا نشاننده‌ها بتوی کره‌ها را می‌پذیرند.

فضای فرمهای کروی یعنی منیفلدهایی فشرده با خمیدگی ثابت $+1$، توسط *J.A.Wolf* در کـتاب *spaces of constant curvature* کاملاً طبقه‌بندی شده است. دو نوع همگن و ناهمگن از فضای فرمها وجود دارد یعنی اینکه در این فضای فرمها گروه G از چپ به صورت تعدی عمل می‌کند یا نمی‌کند. برای فضای فرمهای کروی همگن *D.De Turck* و *W.ziller* در مقاله *[DZ]* قضیه زیر را نشان دادند.

قضیه: *[DZ]* هر فضای فرم کروی همگن دارای یک نشانندهٔ ایـزومتریک مـینیمال بـتوی یک کـره استاندارد است.

با وجود اینکه رده‌بندی نشان می‌دهد فضای فرمهای همگن بسیار کم‌اند چرا که در این مورد قضیه زیر را داریم

قضیه *[W.Therem 2.71]* فرض کنیم M یک منیفلد ریمانی همگن همبند از بعد n و خمیدگی ثابت K باشد. اگر $K<0$ آنگاه M ایزومرفیک با یک فضای هذلولی H^n. اگر $K=0$ آنگاه ایزومرفیک با حاصلضرب $R^m \times T^{n-m}$ یک فضای اقلیدسی با یک چنبره ریمانی تخت. اگر $K>0$ آنگاه M ایزومرفیک با یک منیفلد $\frac{S^n}{\Gamma}$ است که

(i) F یک میدان حقیقی یا مختلط یا گویاست.

(ii) S^n کرهٔ $\|x\| = K^{-\frac{1}{2}}$ در فضای برداری هرمیتی تخت V روی F که V دارای بعد حقیقی $n+1$ است.

(iii) Γ گروه ضربی متناهی از عناصر به نرم 1 در F است که در یک زیر میدان سره F_1 از F واقع نباشند، $R \subset F_1 E$.

(iv) Γ عمل می‌کند. روی S^n با حاصلضرب اسکالری F مقداری بردارها.

برعکس. همهٔ منیفلدهای یاد شده، منیفلدهایی ریمانی همگن n-بعدی با خمیدگی ثابت K هستند.

اثبات: *[W]*

یک سؤال طبیعی که اینجا مطرح می‌شود این است که آیا همان قضیه برای حالتهای ناهمگن درست است؟

فرض کنیم $L(p,q)$ $\left(L(p,q) = \frac{S^3}{G}\right)$ نشان دهنده فضای لنز سه بعدی تولید شده بوسیله عمل استاندارد Z_p روی S^3 باشد. یک چنین فضای لنز ناهمگن است اگر و فقط اگر $q \not\equiv \pm 1 \mod P$. قضیه اصلی این مقاله یک شرط لازم را برای وجود فروبری‌های ایزومتریک مینیمال از فضای فرمهای ناهمگن سه بعدی بتوی کره‌ها را ارائه می‌دهد. ابتدا نشان می‌دهیم

قضیه *1*: تنها فضای فرمهای کروی ناهمگن سه بعدی که نمی‌توانند بوسیله یک فضای لنز ناهمگن پوشانده شوند عبارتند از:

(1) $\frac{S^3}{G}$ که $G \equiv T$ (که T یک زیرگروه قطری از شاخص 3 در $\phi(\tilde{Z} \times \tilde{T})$).

(2) $\frac{S^3}{G}$ که $G \cong D_n$ (D_n یک زیرگروه قطری از شاخص 2 در $\phi(\tilde{Z}_2 \times D_n)$.

در این قضیه از نمادهای مقاله [S] استفاده خواهیم کرد.

فرض کنیم $u(p,q)$ یک تابع $u: N{*}N \to N$ باشد که جزئیات آن در بخش ۷-۵-۳ توضیح داده شده خواهد شد.

قضیه 2: اگر $g<u(p,q)$، آنگاه فضای لنز ناهمگن سه بعدی $L(p,q)$ نمی‌تواند یک فروبری ایزومتریک مینیمال از درجه g بتوی کره‌ای را بپذیرد.

تعریف: یک فضای فرم ناهمگن را یک pq- فضای فرم خواهیم گفت اگر بتواند بوسیله یک فضای لنز ناهمگن $L(p,q)$ پوشانده شود.

نتیجه زیر را از دو قضیه بالا بدست می‌آوریم

نتیجه: اگر $g<u(p,q)$، آنگاه pq- فضای فرم غیر سه بعدی، یک فروبری ایزومتریک مینیمال از درجه g بتوی یک کره را می‌پذیرد.

نتایج مستقیم قضایای 1 و 2: از قضایای 1 و 2 می‌توانیم نتایج زیر را مستقیماً داشته باشیم که در واقع قضیه 1 بیان می‌کند که به جز حالتهای (1) و (2) هر فضای فرم کروی ناهمگن $\frac{S^3}{G}$ می‌تواند بوسیله یک فضای لنز ناهمگن $L(p,q)$ که در آن $gcd(p,q)=1$, $q \not\equiv \pm 1 \mod p$ پوشانده شود

حال فرض کنیم.

$g<u(p,q)$ وجود داشته باشد یک فروبری ایزومتریک مینیمال از درجه g از یک pq- فضای فرم ناهمگن $\frac{S^3}{G}$ بتوی یک کره S^N آنگاه داریم

$$\begin{tikzcd} L(p,q) \arrow[d, "\pi"'] & \\ S^3/G \arrow[r, "f"] & S^N \end{tikzcd}$$

$f o \pi$ یک فروبری ایزومتریک مینیمال از درجه g با $g<u(p,q)$ از $L(p,q)$ بتوی S^N. اما این برای قضیه ۲ ممکن نیست.

در پی‌گیری این مطالب تابع $u(p,q)$ را تجزیه و تحلیل خواهیم کرد.

هدف نشان دادن این است که تابع $u(p,q)$ با افزایش P، افزایش پیدا می‌کند. بنابراین محاسبه کوچکترین مقدار P نشان خواهد داد که

conjecture 1 (حدس *1*): اگر $g<28$ و P فرد باشد. آنگاه به ازای هر q غیر از pq- فضای فرمها یک فروبری ایزومتریک مینیمال از درجه g بتوی یک کره را می‌پذیرند.

اگر $g<20$ و P زوج باشد و به ازای هر q غیر از pq- فضای فرمها یک فروبری ایزومتریک مینیمال بتوی یک کره را می‌پذیرد.

مثال: محاسبات نشان می‌دهند که $u(5,2)=28$ ، $u(8,3)=20$. بنابراین وجود ندارد یک فروبری ایزومتریک مینیمال از $L(5,2)$ بتوی یک کره اگر $g<28$ و از $L(8,3)$ بتوی یک کره اگر $g<20$ باشد.

همچنین در این مقاله قضیه *2* را به شرط لازم و کافی برای وجود فروبری‌های ایزومتریک مینیمال تعمیم خواهیم داد.

conjecture 2 (**حدس** *2*) : یک فروبری ایزومتریک مینیمال از درجه g از یک pq- فضای فرم سه بعدی بتوی یک کره موجود است اگر و فقط اگر $g \geq u(p,q)$ و دستگاه خطی وابسته به شرط ایزومتری دارای یک جواب نامنفی باشد.

تبصره: محاسبات نشان می‌دهند که دستگاه خطی در درجه *20* ، *28* به ترتیب برای $L(8,3)$ و $L(5,2)$ دارای جواب هست ولی آنها نامنفی نیستند.