فصل ۱

پیشنیازها و نمادها

در این فصل نمادها ، تعاریف و قضایای مورد نیاز در فصل های بعدی را بیان مینماییم .

مجموعهی اعداد طبیعی و صحیح را به ترتیب با نمادهای $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ نشان میدهیم و $J \subset \mathbb{Z}$ همواره شمارش-پذیراست .

۱.۱ فضاهای نرمدار

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید X یک فضای برداری مختلط باشد ، نگاشت $\|.\|: X \to \mathbb{R}$ ، را یک **نرم** روی X مینامیم هرگاه برای هر $x, y \in X$ و برای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ ،

(الف). $\|x\| = 0$ اگرو تنها اگر $x = 0$,

(ب). $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$,

(پ). $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

همچنین فضای برداری X را همراه با نرم $\|.\|$ یک **فضای نرمدار**[۱] مینامیم.

قضیه ۲.۱.۱. فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد در این صورت :

(الف). نگاشت $x \to \|x\|$ پیوسته است .

(ب). اگر X یک فضای هیلبرت باشد ، آنگاه :

$$\|x\| = \sup\{|< x, y >| : y \in H, \|y\| = 1\} .$$

اثبات . رجوع شود به قضیه ۲-۱-۷ [37] .

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد و $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ دنبالهای در X باشد .

---
۱ Normed space

الف).گوییم $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ به $x \in X$ همگراست هرگاه $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$ یعنی به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، یک $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که برای هر $n \geq N_\varepsilon$ ، $\|x_n - x\| < \varepsilon$.

ب). گوییم $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ در X کوشی است هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ ، یک $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که برای هر $n, m \geq N_\varepsilon$ ، $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

قضیه ۴.۱.۱. در فضای نرمدار X هر دنباله همگرا ، کوشی است .

اثبات . رجوع شود به قضیه ۳-۵-۳ [16] .

تعریف ۵.۱.۱ . فضای نرمدار X را یک **فضای باناخ**[1] (کامل) مینامیم، هرگاه هر دنباله کوشی [2] درآن همگرا باشد.

تعریف ۶.۱.۱ . (الف). دلتای کرونکر به ازای هر β و α با نماد $\delta_{\alpha,\beta}$ نشان داده میشود و به صورت زیر تعریف میشود :

$$\delta_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1 & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases} .$$

(ب). اگر (X, m, μ) یک فضای اندازه باشد آنگاه برای $1 < p < \infty$ ، فضای $L^p(X, \mu)$ عبارت است از :

$$L^p(X,\mu) = \left\{ f: X \to \mathbb{C};\ \text{اندازه پذیراست}\ f,\ \|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

همچنین برای $1 \leq p < \infty$ ، فضای ℓ^p به صورت زیر است :

$$\ell^p = \left\{ x = (x_j)_{j\in J} : \|x\|_p = \left(\sum_{j\in J} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

(ث). فرض کنید V یک فضای برداری و $\emptyset \neq A \subseteq V$ ، $\mathrm{Span}\,(A)$ را مجموعه تمام ترکیبات خطی اعضای A تعریف میکنیم یعنی :

$$\mathrm{Span}\,(A) = \left\{ \textstyle\sum_{i\in F} c_i x_i :\ \text{متناهی}\ F,\ x_i \in A,\ c_i \in \mathbb{C} \right\}$$

---

[1] Banach space
[2] Cauchy

در واقع (Span (A کوچکترین زیر فضای برداری V است که شامل A است و آن را زیر فضای تولید شده توسط A مینامیم .

مثال ۷.۱.۱.

(الف). $\mathbb{C}$ و $\mathbb{N}$ همراه با نرم قدرمطلق فضاهای باناخ هستند.

(ب). اگر (X , m , μ) یک فضای اندازه باشد آنگاه برای $1 \le P < \infty$ ، فضای $L^P\ (X, \mu)$ با نرم $\|\cdot\|_P$ یک فضای باناخ است .

(پ) $X = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} ;\right.$ دنباله ای ازاعداد مختلط که از مرحله ای به بعد صفر است $\left.(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \right\}$

یک فضای برداری است که با نرم

$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \quad , \qquad \|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \ .$$

باناخ نیست .

تعریف ۸.۱.۱ . دو نرم $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ در فضای نرمدار X را معادل (هم ارز) مینامیم هرگاه اعداد ثابت ومثبت A و B موجود باشند به طوری که به ازای هر $x\in X$ ،

$$A\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le B\|x\|_1 \ .$$

قضیه ۹.۱.۱. فرض کنیم $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ دو نرم هم ارز روی فضای برداری X باشند ، در این صورت X با $\|\cdot\|_1$ باناخ است اگر وفقط اگر، X با $\|\cdot\|_2$ باناخ باشد .

اثبات . رجوع شود به قضیه **۲۱-۸-۴** [26] .

قضیه ۱۰.۱.۱. در یک فضای برداری متناهی البعد ، همهی نرمها معادلند .

اثبات . رجوع شود به قضیه **۳-۶-۵** [50] .

مثال ۱۱.۱.۱. همهی نرمهای زیر در $\mathbb{R}^2$ معادلند (برای $x, y \in \mathbb{R}^2$) :

(الف). $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$,

(ب). $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$,

(ج). $\|(x,y)\|_1 = \max\{|x| , |y|\}$,

(د). $\|(x,y)\| = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

قضیه ۱۲.۱.۱. فرض کنید X یک فضای نرمدار و Y زیر فضایی از X باشد ، به طوری که $\dim Y < \infty$ ، در این صورت Y بسته است .

اثبات . رجوع شود به قضیه ۵-۱۲-۵ [14] .

قضیه ۱۳.۱.۱.(ریس فیشر[۱]). L^p برای $1 \le p < \infty$ ، یک فضای باناخ است .

اثبات . رجوع شود به قضیه ۱۴-۳-۷ [۲۲] .

[۱] Risez-fisher

۲.۱ عملگرهای خطی روی فضاهای نرمدار

تعریف ۱.۲.۱ . فرض کنید X و Y دو فضای برداری باشند ، عملگر $T : X \to Y$ را **خطی** مینامیم ، هرگاه به ازای هر $y , x \in X$ وهر $\alpha \in \mathbb{C}$ داشته باشیم :

$$T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y),$$

زیر فضاهای $N(T) := \{x \in X , T(x) = 0\}$ و $R(T) := \{T(x), x \in X\}$ از X و Y را به ترتیب **فضای پوچ و فضای برد** T مینامیم. همچنین عملگرهمانی روی X را با نماد I_X یا به طور خلاصه با I نشان می-دهیم .

تعریف ۲.۲.۱ . فرض کنید X و Y دو فضای نرمدار باشند و $T : X \to Y$ عملگری خطی باشد ، آنگاه نرم عملگر T را با $\|T\|$ نشان میدهیم و به صورت زیر تعریف میکنیم :

$$\|T\| = \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{x} : x \in X , x \neq 0\right\} ;$$

عملگر T را **کراندار** مینامیم هرگاه $\|T\| < \infty$ و آن را **بیکران** مینامیم هرگاه $\|T\| = \infty$.

فضای تمام عملگرهای خطی و کرانداراز X به Y را با $L(X,Y)$ نشان میدهیم و اگر $X = Y$ آن را با $L(X)$ نمایش میدهیم. همچنین در حالت خاص اگر $Y = \mathbb{C}$ باشد ، آن را با X^* نشان میدهیم وهر یک از اعضای X^* را یک **تابعک خطی کراندار**[۱] مینامیم .

قضیه ۳.۲.۱ . فرض کنید Y , X دو فضای نرمدار باشند ،

(الف). برای هر $T \in L(X,Y)$ ، و تحت نرم کراندار $\|T\| := \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\}$ ، $L(X,Y)$ یک فضای نرمدار میباشد .

(ب). به علاوه اگر Y یک فضای باناخ باشد ، در این صورت $L(X,Y)$ نیز یک فضای باناخ میباشد .

اثبات . رجوع شود به قضیه ۱۵-۱-۵[۴۲] .

قضیه ۴.۲.۱ . فرض کنید X و Y دو فضای باناخ و $T : X \to Y$ عملگری خطی باشد ، در این صورت :

[۱] Bounded linear functional

$$\|T\| = \sup\{|y^*(Tx)| : x \in X , y \in Y , \|x\| \le 1 , \|y^*\| \le 1\}$$

اثبات . رجوع شود به قضیه ۱۰-۴-۶ [۴۶] .

قضیه ۵.۲.۱. (نگاشت باز [۱]). فرض کنید Y , X دو فضای باناخ باشند و T یک عملگرخطی و کراندار از X بروی Y باشد ، در این صورت T یک نگاشت باز است .

به علاوه اگر T یک به یک نیز باشد ، آنگاه T یک هومئومورفیسم نیز میباشد .(یعنی T ، معکوس دارد و معکوس آن نیز پیوسته میباشد) .

اثبات . رجوع شود به قضیه ۵-۹-۵ [۳۲] .

قضیه ۶.۲.۱ . فرض کنید X , Y دو فضای نرمدار و $T : X \to Y$ عملگری خطی باشد ، دراین صورت گزاره های زیر هم ارزند :

الف) T کراندار است .

ب) عددی ثابت مانند M موجود است به طوری که برای هر $x \in X$ ، $\|Tx\| \le M \|x\|$.

(پ). T در صفر با توپولوژی نرم ، پیوسته است .

(ت). T با توپولوژی نرم ، پیوسته است .

اثبات . رجوع شود به قضیه ۵-۱-۳ [۳۲] .

قضیه ۷.۲.۱. هر عملگر خطی کراندار ، به طور یکنواخت پیوسته است . اگر یک عملگر خطی در یک نقطه پیوسته باشد ،کراندار است . (در نتیجه پیوسته یکنواخت است)

اثبات . رجوع شود به قضیه ۱۱-۷-۴ [۱۷] .

تعریف ۸.۲.۱ . فضای نرمدار X را

(الف). بازتابی مینامند هرگاه $X \cong X^*$.

(ب). انعکاسی مینامند هرگاه $X \cong X^{**}$.

[۱] Open maping theorem

قضیه ۹.۲.۱. فرض کنید X, Y دو فضای نرمدار و $X \neq \{o\}$ باشد ، اگر $L(X, Y)$ یک فضای باناخ باشد ، آنگاه Y نیز باناخ است .

اثبات . رجوع شود به قضیه۱۲– ۸–۶ [۵۱] .

قضیه ۱۰.۲.۱. فضای $\mathcal{B}$ ، متشکل از همه ی عملگرهای خطی کراندار از فضای نرمدار X به یک فضای باناخ Y ، یک فضای باناخ است .

اثبات . رجوع شود به قضیه ۱۲–۷–۹ [۴۵] .

قضیه ۱۱.۲.۱. (هان باناخ). فرض کنید X یک فضای نرمدار و M زیر فضای X باشد و $f: M \to \mathbb{C}$ تابعک خطی کراندار باشد . در این صورت $F \in X^*$ موجود است به طوری که

$$F|_M = f .$$

اثبات . رجوع شود به قضیه ۸–۱۳–۹ [۴۵] .

مثال ۱۲.۲.۱. فضای برداری $X = \left\{(x_n)_{n\in N};\ (x_n)_{n\in N}\right.$ از مرحله ای به بعد صفر میشود$\left.\right\}$ با $\|x\| = \sup_{n\in N}|x_n|$ یک فضای نرمدار غیر باناخ میباشد .

قضیه ۱۳.۲.۱.(گراف بسته[۱]). فرض کنید X, Y دو فضای باناخ و $T: X \to Y$ عملگری خطی باشد و $G = \{(x, T(x)) \mid x \in X\}$ (گراف T) در $X \times Y$ بسته باشد ، در این صورت T کراندار است .

اثبات . رجوع شود به قضیه ۲۱–۵–۷ [۴۵] .

Close maping theorem [۱]

۳.۱ فضای هیلبرت

تعریف ۱.۳.۱. یک فضای برداری مختلط H را یک **فضای ضرب داخلی** گوییم ، اگر نگاشت

$$< .,. >: H \times H \rightarrow \mathbb{C}$$
$$(x,y) \mapsto < x,y >,$$

موجود باشد که به ازای هر $x,y,z \in H$ و هر $\alpha \in \mathbb{C}$ داشته باشیم :

(الف). $;< x,y > = \overline{< y,x >}$

(ب). $;< \alpha x + y,z > = \alpha < x,z > + < y,z >$

(پ). $;< x,x > \geq 0$

(ت). $x = 0$ اگر و فقط اگر $< x,x > = 0$.

به عدد مختلط $< x,y >$ ، ضرب داخلی x , y میگویند و نگاشت فوق را ضرب داخلی (یکه ای) می - نامند . با توجه به تعریف ضرب داخلی ، نرم را در فضای H چنین تعریف میکنیم :

$$\|x\| = < x,x >^{\frac{1}{2}}.$$

یعنی به ازای هر $x \in H$ ریشه دوم ضرب داخلی $< x,x >$ که عددی نامنفی است ، برابر با نرم x میباشد.

نتیجه ۲.۳.۱. به ازای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ و هر $x,y,z \in H$ ، با استفاده از تعریف فضای ضرب داخلی نتایج زیر به دست میآید .

(الف). $; <0,x > = 0$

(ب). $; < z,\alpha x + y > = \overline{\alpha} < z,x > + < z,y >$

(پ). نا مساوی کوشی – شوارتز :

$$; |< x,y >| \leq \|x\| \, \|y\|$$

(ث). اتحاد متوازی الاضلاع :

$$; \ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

از نا مساوی مثلثی نتیجه میگیریم که $\|x-z\| \le \|x-y\| + \|y-z\|$. اگر فاصله بین x و y را با $\|x-y\|$ نشان دهیم ، H در تمام شرایط متریک صدق میکند و اگر $\|x\| = ۰$ ،آنگاه $x = ۰$ ، لذا H یک فضای متریک است.

تعریف ۳.۳.۱. فضای ضرب داخلی H را یک **فضای هیلبرت**[۱] گوییم هرگاه با متر حاصل از ضرب داخلی ، یک فضای متریک کامل (باناخ) باشد .

مثال ۴.۳.۱. (الف). فضای برداری $\mathbb{C}^n$ با ضرب داخلی زیر یک فضای هیلبرت است .

$$< x,y > = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \ , \ y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \ \text{و} \ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$$

در حالت خاص $\mathbb{R}^n$ نیز یک فضای باناخ است ،

(ب). فضای $L^2(X,\mu)$ با ضرب داخلی زیرروی آن یک فضای هیلبرت است .

$$< f,g > = \int f\, \bar{g}\, d\mu \qquad f,g \in L^2(X,\mu) .$$

(پ). فضای $\ell^2(\mathbb{Z})$ با ضرب داخلی زیر یک فضای هیلبرت است .

$$< x,y > = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \overline{y_n} \qquad x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \, , y = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) .$$

تعریف ۵.۳.۱ . اگر X , Y دو فضای برداری مختلط باشند ، آنگاه $T : X \to Y$ را **مزدوج خطی کراندار** مینامند هرگاه به ازای هر $x,y,z \in H$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ داشته باشیم :

$$T(\alpha x + y) = \bar{\alpha}\, T(x) + T(y) .$$

مثال ۶.۳.۱ . در فضای هیلبرت H ، برای هر $y \in H$ ، نگاشت های $x \to < y,x >$ و $x \to < x,y >$ به ترتیب ، مزدوج خطی کراندار و کراندارند .

قضیه ۷.۳.۱ .(نمایش ریس[۲]). فرض کنید T یک تابعک خطی و پیوسته روی H باشد ،آن گاه عضو منحصر به فردی از H مانند x موجود است به طوری که برای هر $y \in H$ داریم :

$$T(x) = < x , y > ,$$

---

[۱] Hilbert space
[۲] Riesz representation

و همچنین

$$\|T\| = \|y\|,$$

معمولا T را با φ_x نشان میدهند و آن را تابعک القا شده توسط عنصر x مینامند .

اثبات . رجوع شود به قضیه ۱۷-۶-۶ [۴۵] .

تعریف ۸.۳.۱ . مجموعهی $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ در H را

(الف). **متعامد** مینامند هرگاه به ازای هر $\alpha, \beta \in A$ که $\alpha \neq \beta$ ، $< u_\alpha, u_\beta > = 0$;

(ب). **متعامدیکه** مینامند هرگاه به ازای هر $\alpha, \beta \in A$ که ، $< u_\alpha, u_\beta > = \delta_{\alpha,\beta}$.

تعریف ۹.۳.۱. پایهی $\{e_j : j \in J\}$ را یک **پایه متعامدیکه** مینامند هرگاه $\{e_j : j \in J\}$ یک دستگاه متعامدیکه باشد یعنی

$$< e_k, e_j > = \delta_{k,j} .$$

توجه ۱۰.۳.۱. اگر X و Y دو پایه متعامدیکه برای H باشند آنگاه $\text{card}\, X = \text{card}\, Y$ واین مقدار را **بعد H** مینامند و آن را با $\dim H$ نشان میدهند .

تعریف ۱۱.۳.۱. اگر H دارای زیر مجموعه چگال شمارش پذیری باشد ، H را فضای هیلبرت **جدایی-پذیر** مینامیم .

قضیه ۱۲.۳.۱. هر خانواده متعامدیکه در یک فضای هیلبرت جدایی، پذیر شماراست .

اثبات . رجوع شود به قضیه ۸-۲۳-۷ [۴۲] .

تعریف ۱۳.۳.۱ . دو دنبالهی $(x_m)_{m\in N}$ و $(y_n)_{n\in N}$ را در H **دو متعامد** مینامند هرگاه به ازای هر $m, n \in \mathbb{N}$ که $m \neq n$ داشته باشیم $< x_m, y_n > = 0$ و این را **دو متعامدیکه** مینامند هرگاه برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ ، $< x_m, y_n > = \delta_{m,n}$.

تعریف ۱۴.۳.۱ . دنباله $\{x_i : i \in I\}$ را در H **کامل (مولد)** گوییم اگر تنها عضو عمود بر این خانواده ، صفر باشد یعنی اگر $x \in H$ چنان باشد که برای هر $i \in I$ ، که $< x, x_i > = 0$ نتیجه بگیریمکه $x = 0$ ، یعنی به طور معادل $\text{Span}\{x_i : i \in I\}$ در H چگال باشد.

قضیه ۱۵.۳.۱ . فرض کنید که $(x_n)_{n\in N}$ دنباله ای از اعضای دو به دو متعامد برهم در H باشد در این صورت گزارههای زیر هم ارز هستند :

(الف). $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ در H همگراست .

(ب). $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty$.

(پ). به ازای هر $x \in H$ ، سری $\sum_{n=1}^{\infty} < x, x_n >$ همگراست .

اثبات . رجوع شود به قضیه ۱-۱۱-۶ [۲۲] .

قضیه ۱۶.۳.۱. فرض کنید X و Y دو فضای نرمدار باشند و $T \in L(X,Y)$ ، در این صورت متناظر T عملگر منحصر به فردی مانند $T^* \in L(Y^*,X^*)$ موجود است به طوری که به ازای هر $y^* \in Y^*$ داریم :

$$T^*(y^*) = y^* \, o \, T ,$$

به علاوه تساوی $\|T^*\| = \|T\|$ برقرار میباشد . عملگر T^* را **الحاقی** T مینامیم .

اثبات . رجوع شود به قضیه ۸-۱۴-۸ [۲۲] .

قضیه ۱۷.۳.۱. فرض کنید X و Y و Z فضاهای نرمدار باشند و $T \in L(X,Y)$ و $S \in L(Y,Z)$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ ، در این صورت حکم های زیر برقرارند .

(الف). $(\alpha T + S)^* = \overline{\alpha}\, T^* + S^*$;

(ب). $(TS)^* = S^* T^*$;

(پ). $I_X^* = I_{X^*}$;

(ت). اگر T وارون پذیر باشد آن گاه T^* نیز وارون پذیر است و $(T^{-1})^* = T^{*-1}$.

اثبات . رجوع شود به قضیه ۱۶-۵-۷ [۲۲] .

قضیه ۱۸.۳.۱. فرض کنید $(H, <.,.>_H)$ و $(K, <.,.>_K)$ دو فضای هیلبرت بوده و

$T \in \mathcal{B}(H,K)$ و $S \in \mathcal{B}(H)$ ، در این صورت

(الف). $T^* \in \mathcal{B}(K^*,H^*)$ الحاقی است اگر و فقط اگر به ازای هر $x \in H$ و $y \in K$ داشته باشیم :

$$< Tx , y >_K = < x, T^*y >_H ,$$

(ب). $S^{**} = S$.

اثبات . رجوع شود به قضیه ۱۰-۷-۲ [۳۸] .

قضیه ۱.۳.۱۹. فرض کنید $T \in \mathcal{B}(H)$ چنان باشد که به ازای هر $x \in H$ داشته باشیم : $< Tx, x > = 0$ و در این صورت $T = 0$.

اثبات . رجوع شود به قضیه ۷-۷-۲ [۳۸] .

نتیجه ۱.۳.۲۰. فرض کنید $T, S \in \mathcal{B}(H)$ و به ازای هر $x \in H$، $< Tx, x > = < Sx, x >$. در این صورت $T = S$.

اثبات . رجوع شود به قضیه ۲۱-۶-۲ [۳۸] .

تعریف ۱.۳.۲۱. عملگر $T \in \mathcal{B}(H)$ را

(الف). خود الحاق مینامند هرگاه $T = T^*$;

(ب). یکانی مینامند هرگاه $T T^* = T^*T = I_H$;

(ث). متعامد مینامند هرگاه $N(T)^{\perp} = R(T)$.

قضیه ۱.۳.۲۲. اگر $T \in \mathcal{B}(H)$ آنگاه گزارههای زیر هم ارزند :

(الف). T یکهای است .

(ب). $R(T) = H$ و برای هر $x \in H$، $< Tx , Ty > = < x , y >$.

(پ). $R(T) = H$ و برای هر $x \in H$، $\|Tx\| = \|x\|$.

اثبات . رجوع شود به قضیه ۱۵-۴-۲ [۳۸] .

قضیه ۱.۳.۲۳. اگر $1 < p, q < \infty$ به طوری که $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$، آنگاه برای هر $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ از ℓ^p و هر دنباله $y = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ از ℓ^q نامساوی زیر که به نامساوی هولدر معروف است ، برقرار است :

$$\|xy\|_1 = \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n y_n\right| \leq \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} . \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |y_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$= \|x\|_p \|y\|_q .$$

در حاتی که $p = q = 2$ باشد ، آن را **نامساوی کوشی – شوارتز** مینامند .

اثبات . رجوع شود به قضیه ۴-۵-۱۱ [۱۶] .

۴.۱. قابها و پایه های رایس

تعریف ۱.۴.۱. دنبالهی $\{f_j : j \in J\}$ از اعضای H ، یک **قاب**[۱] برای H است هرگاه اعداد ثابت ومثبت A وB موجود باشند به طوری که برای هر $f \in H$:

$$A\|f\|^2 \le \sum_{j\in J} \left| < f, f_j > \right|^2 \le B\,\|f\|^2 \quad .$$

در این جا اعداد A وB را کرانهای قاب مینامند .

در حالت خاص اگر $B = A$ باشد ، قاب مورد نظر را **قاب تنگ**[۲] میگویند .

توجه ۲.۴.۱. طبق نامساوی کوشی–شوارتز ($\left| < f, f_j > \right|^2 \le \|f\|^2 \left\|f_j\right\|^2$) ، برای هر $f \in V$ ، نتیجه میگیریم که :

$$\sum_{j\in J} \left| < f, f_j > \right|^2 \le \|f\|^2 \sum_{j\in J} \left\|f_j\right\|^2 \le B\,\|f\|^2 \,.$$

و این یعنی شرط بالایی قاب همیشه برقرار است . (هر چند که اغلب میتوان یک کران بالایی کوچکتر از $\sum_{j\in J}\left\|f_j\right\|^2$ برای قاب پیدا کرد .)

مثال ۳.۴.۱. فرض کنید $\{e_j : j \in J\}$ یک پایه متعامد یکه برای H باشد

الف). با دو بار تکرار هر عضو $\{e_j : j \in J\}$ ،به دست میآوریم :

$$\{f_j : j \in J\} = \{e_1, e_1, e_2, e_2, \dots\} ,$$

که این یک قاب تنگ با کران قابی $A = 2$ میباشد زیرا از این که $\{e_j : j \in J\}$ پایه متعامدیکه است داریم

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| < f, e_j > \right|^2 = \|f\|^2,$$

از طرفی چون در این جا هر کدام از عناصر دو بار تکرار میشود بنابراین

---

۱ Frame
۲ Tight frame

$$
\begin{aligned}
&|< f, \mathrm{e}_1 \ >|^2 + \ |< f, \mathrm{e}_1 \ >|^2 \\
&+|< f, \mathrm{e}_2 \ >|^2 + |< f, \mathrm{e}_2 \ >|^2 + \cdots \\
&= 2 \sum_{\mathrm{j}=1}^{\infty} \left|< f, \mathrm{e}_{\mathrm{j}} \ >\right|^2 \ = 2\|f\|^2
\end{aligned}
$$

پس $A = 2$ و این یعنی دنباله داده شده یک قاب تنگ با کران ۲ میباشد .

ب). اگر فقط e_1 را تکرار کنیم آنگاه

$$\{f_{\mathrm{j}} : \mathrm{j} \in \mathrm{J}\} \ = \{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3, \dots\} \ ,$$

یک قاب با کرانهای $A = 1 \ , B \ = \ 2$ میباشد . یعنی باید نشان دهیم که :

$$\|f\|^2 \leq \sum_{\mathrm{j}=1}^{\infty} \left|< f, \mathrm{e}_{\mathrm{j}} \ >\right|^2 \ \leq 2\|f\|^2$$

برای این منظور

$$
\begin{aligned}
\|f\|^2 \ &= |< f, \mathrm{e}_1 \ >|^2 + |< f, \mathrm{e}_2 \ >|^2 + \cdots \\
&\leq \ |< f, \mathrm{e}_1 \ >|^2 + \ |< f, \mathrm{e}_1 \ >|^2 \\
&+|< f, \mathrm{e}_2 \ >|^2 + |< f, \mathrm{e}_3 \ >|^2 + \cdots \\
&\leq \ |< f, \mathrm{e}_1 \ >|^2 + \ |< f, \mathrm{e}_1 \ >|^2 \\
&+|< f, \mathrm{e}_2 \ >|^2 + |< f, \mathrm{e}_2 \ >|^2 + \cdots \\
&= 2\sum_{\mathrm{j}=1}^{\infty} \left|< f, \mathrm{e}_{\mathrm{j}} \ >\right|^2 \ = 2\|f\|^2
\end{aligned}
$$

و این یعنی ، دنباله داده شده یک قاب با کرانهای $A = 1 \ , B \ = \ 2$ میباشد .

توجه ۴.۴.۱. برای قاب $\{f_{\mathrm{j}} : \mathrm{j} \in \mathrm{J}\}$ ، عملگر

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{T} : \ell^2(\,\mathbb{N}\,) \ \to H \\
&\mathrm{T}\{\mathrm{C}_{\mathrm{j}}\}_{\mathrm{j}\in\mathrm{J}} \ := \sum_{\mathrm{j}\in\mathrm{J}} \mathrm{C}_{\mathrm{j}} \mathrm{f}_{\mathrm{j}}
\end{aligned}
$$

را **عملگر پیش قابی**[1] یا **عملگر ترکیب**[2] مینا مند ، که یک عملگر کراندار نیز هست .

عملگر الحاقی T رابا T^* نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم .

$$T^* : H \to \ell^2(\mathbb{N})$$
$$T^* f = \{< f, f_j >\}_{j \in J} ,$$

که T^* ، **عملگر تجزیه**[3] نیز نامیده میشود . به وسیلهی ترکیب T و T^* ، **عملگر قابی S**[4] رابه صورت زیر به دست میآوریم :

$$S : H \to H$$
$$S f = TT^* f = \sum_{j \in J} < f, f_j > f_j .$$

لم ۵.۴.۱ . فرض کنید $\{f_j : j \in J\}$ ، یک قاب با عملگر قابی S و کرانهای قابی A وB باشد ،آنگاه احکام زیر برقرارند .

الف). عملگر S ، کراندار ، وارونپذیر ، خود الحاقی و مثبت است .

ب). $\{S^{-1} f_j : j \in J\}$ یک قاب با عملگر قابی S^{-1} و کرانهای قابی A^{-1} و B^{-1} میباشد .

اثبات . (الف). چون S ترکیبی از دو عملگر کراندر است ، بنابراین خود S نیز عملگری کراندار است یعنی

$$\|s\| = \|TT^*\| = \|T\|\|T^*\| \leq \|T\|^2 \leq B .$$

چون $S = (TT^*)^* = TT^* = S$ ، بنابراین S ، خود الحاقی است . همچنین برای هر $f \in H$ ،

$$A\|f\|^2 \leq < sf, f > \leq B\|f\|^2.$$

به علاوه از نامساوی (i) $AI \leq S \leq BI$ ، مثبت بودن S نتیجه می شود . همچنین

$$\circ \leq I - B^{-1}S \leq \frac{B-A}{B} I$$

در نتیجه

$$\|I - B^{-1}S\| = \sup_{\|f\|=1} |< (I - B^{-1}S)f, f >| \leq \frac{B-A}{B} \leq 1$$

---

[1] Pre-frame operator
[2] Synthesis operator
[3] Analysis operator
[4] Frame operator

و این یعنی S وارون پذیر است .

(ب). چون عملگر S خود الحاقی است ، بنابراین S^{-1} نیز خودالحاقی است . از طرفی برای $f \in H$ ،

$$\sum_{j\in J}\left|< f, S^{-1}f_j >\right|^2 = \sum_{j\in J}\left|< S^{-1}f, f_j >\right|^2 \le B\|S^{-1}f\|^2 \le B\|S^{-1}\|^2\|f\|^2.$$

و از این نتیجه میگیریم که $\left\{S^{-1}f_j : j \in J\right\}$ خوش تعریف است . از طرفی برای $f \in H$ ،

$$\sum_{j\in J} < f, S^{-1}f_j > S^{-1}f_j = S^{-1}\sum_{j\in J} < S^{-1}f, f_j > f_j = S^{-1}SS^{-1}f = S^{-1}f\ ; \quad \text{(ii)}$$

و از تساوی بالا نتیجه میگیریم که عملگر قاب برای $\left\{S^{-1}f_j : j \in J\right\}$ و S^{-1} مساوی میشوند . حال اگر در رابطه (i) ،تغییراتی اعمال کنیم ، خواهیم داشت :

$$B^{-1}I \le S^{-1} \le A^{-1}I\ ,$$

در این صورت برای $f \in H$ ، داریم :

$$B^{-1}\|f\|^2 \le < S^{-1}f, f > \le A^{-1}\|f\|^2\ ,$$

حال با استفاده از رابطه (ii) ، برای $f \in H$ داریم :

$$B^{-1}\|f\|^2 \le \sum_{j\in J}\left|< f, S^{-1}f_j >\right|^2 \le A^{-1}\|f\|^2$$

بنابراین $\left\{S^{-1}f_j : j \in J\right\}$ یک قاب با کرانهای قابی A^{-1} و B^{-1} میباشد .

قضیه ۶.۴.۱ . فرض کنید $\{f_j : j \in J\}$ ، یک قاب با عملگر قابی S باشد ، آنگاه برای هر $f \in H$ ، داریم :

$$\begin{aligned} f &= \sum_{j\in J} < f, S^{-1} f_j > f_j \\ &= \sum_{j\in J} < f, f_j > S^{-1} f_j\ . \end{aligned}$$

اثبات . رجوع شود به ۵-۳-۱ [۱۲] .

توجه ۷.۴.۱. در قضیه بالا اعداد $< f, S^{-1}f_j >$ **ضرایب قاب**[۱] نامیده میشوند و $\{S^{-1}f_j : j \in J\}$ نیز **دوگان متعارف قاب**[۲] $\{f_j : j \in J\}$ نامیده میشود .

[۱] Coefficients frame
[۲] Canonical dual frame

نتیجه ۸.۴.۱ . اگر $\{f_j : j \in J\}$ یک قاب تنگ با کران قابی A باشد ، در این صورت دوگان متعارف قاب برابر است با $\{A^{-1}f_j \ : \ j \in J\}$ و برای هر $f \ \in H$ ،

$$f = \frac{1}{A}\sum_{j\in J} < f,\ f_j \ > f_k \,.$$

برای قابهای $\{f_j : j \in J\}$ که پایه نیست میتوان قاب دیگری نظیر $\{g_j : j \in J\}$ از $\{S^{-1}f_j \ : \ j \in J\}$ پیدا کرد که برای هر $f \ \in H$ ،

$$f = \sum_{j\in J} < f,\ g_j \ > f_j \quad ,$$

ودر این جا قاب $\{g_j : j \in J\}$ یک دوگان قاب $\{f_j : j \in J\}$ نامیده میشود .

اثبات . رجوع شود به قضیه ۴-۴-۱ [۱۲] .

مثال ۹.۴.۱. اگر $\{e_j : j \in J\}$ یک پایهی متعامدیکه برای H باشد ، $\{f_j : j \in J\} = \{e_1، e_1، e_2، e_3، \ldots.\}$ را در نظر بگیرید ، دوگان متعارف قاب در زیر آمده است :

$$\left\{\tfrac{1}{2}e_1، \tfrac{1}{2}\ e_1، e_2، e_3، \ldots.\right\} \ = \{S^{-1}f_j \ : \ j \in J\}\,.$$

به عنوان یک مثال از دوگان نامتعارف قاب میتوانیم:

$\{g_j : j \in J\} = \{\circ، e_1، e_2، e_3، \ldots.\}$ و $\{g_j : j \in J\} = \left\{\tfrac{1}{3}e_1، \tfrac{2}{3}e_1، e_2، e_3، \ldots\right\}$ را ذکر کنیم

زیرا اگر $f_1 \ = \ e_1$ باشد ، بنابراین داریم :

$$\begin{aligned} f_1 = \ e_1 \ &=< e_1, e_1 > \ S^{-1}e_1 + < e_1, e_1 > \ S^{-1}e_1 \\ &= \|e_1\|^2 S^{-1}e_1 \ + \|e_1\|^2 S^{-1}e_1 \ = 2S^{-1}e_1 \end{aligned}$$

بنابراین $S^{-1}e_1 = \frac{1}{2}\ e_1$ و در نتیجه $S^{-1}f_1 = \frac{1}{2}\ e_1$.

به طور مشابه چون $f_2 \ = \ e_1$ بنابراین $S^{-1}f_2 = \frac{1}{2}\ e_1$. برای $f_3 \ = \ e_2$ می نویسیم :

$$\begin{aligned} e_2 &= \sum_{j=1}^{\infty} < \ e_2, e_j \ > \ S^{-1}e_2 \\ &= \|e_2\|^2 S^{-1}e_2 \,, \end{aligned}$$

و در نتیجه $S^{-1}f_3 = e_2$. حال چون $\{g_j : j \in J\}$ ، دوگان قاب $\{f_j : j \in J\}$ است در این صورت

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} < f, g_j > f_j$$

$$e_1 = < e_1, o > e_1 + < e_1, e_1 > e_1$$

$$e_2 = < e_2, e_1 > e_1 + < e_2, e_1 > e_1$$
$$+ < e_2, e_2 > e_2 ,$$

پس برای $\{f_j : j \in J\}$ داده شده ، $\{g_j : j \in J\}$ یک دوگان نامتعارف قاب میباشد .

مثال ۱.۴.۱۰. فرض کنید $\{e_j : j = 1,2\}$ یک پایه متعامدیکه برای فضای برداری دو بعدی V با ضرب داخلی باشد . از طرفی $f_1 = e_1 , f_2 = e_1 - e_2 , f_3 = e_1 + e_2$ را در نظر بگیرید ، آنگاه $\{f_j : j = 1,2و3\}$ یک قاب برای V میباشد زیرا : میتوانیم V را به عنوان یک ترکیب خطی از f_j ها بنویسیم ، به عبارت دیگر برای $e_2 = f_1 - f_2$ ، میتوانیم بنویسیم :

$$V = C_1 e_1 + C_2 e_2 = C_1 f_1 + C_2 (f_1 - f_2) .$$

حال دوگان متعارف قاب را به دست میآوریم . برای این منظور ابتدا عملگر قاب را تعریف میکنیم یعنی

$$Sf = \sum_{j=1}^{3} < f, f_j > f_j$$

$$\begin{aligned}
S e_1 &= < e_1, e_1 > e_1 \\
&+ < e_1, e_1 - e_2 > (e_1 - e_2) \\
&+ < e_1, e_1 + e_2 > (e_1 + e_2) \\
&= < e_1, e_1 > e_1 \\
&+ < e_1, e_1 > (e_1 - e_2) \\
&- < e_1, e_2 > (e_1 - e_2) \\
&+ < e_1, e_1 > (e_1 + e_2) \\
&+ < e_1, e_2 > (e_1 + e_2) \\
&= e_1 + (e_1 - e_2) + (e_1 + e_2) = 3e_1 .
\end{aligned}$$

به همین ترتیب میتوانیم بنویسیم :

$$\begin{aligned}
S e_2 &= < e_2, e_1 > e_1 \\
&+ < e_2, e_1 - e_2 > (e_1 - e_2) \\
&+ < e_2, e_1 + e_2 > (e_1 + e_2) = 2e_2
\end{aligned}$$