بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض گرایش آنالیز هارمونیک

ضربگرهای ایزومتری از فضای

$L^p(G, X)$

استاد راهنما

دکتر علی رجالی

پژوهشگر

زهرا حافظی

بهمن ۱۳۹۱

سپاسگزاری...

سپاسگزار از اساتید بزرگواری هستم که مرا در فرجام این پژوهش یاری کردند.
جناب آقای دکتر علی رجالی که برای همیشه افتخار شاگردیشان باعث مباهات خواهد بود و وجود گرانبهایشان را برای همیشه خواهم ستود.
جناب آقای دکتر لشگری زاده بمی که با راهنمایی های ارزنده خود مرا در تدوین این پژوهش یاری نمودند.

تقدیم به :

آنانکه رویاهای خاموشم را در منشور عشق و محبت رنگ بخشیدند

پدرم و مادرم...

که پیمودن پله های ترقی را مدیون زحمات بی دریغ شان عستم

تک ستاره زندگی ام روح الله

که در تمامی لحظات زندگی مرا امید بخشید

چکیده

G را یک گروه موضعاً فشرده با یک اندازه هار راست ثابت و X را یک فضاي باناخ تفکیک پدیر در نظر بگیرید، $L^p(G,X)$ فضاي توابع اندازه پذیر X، مقدار مي‌باشد که توابع نرم آنهاL^p معمول و عادي هستند، یک ضربگر چپ $L^p(G,x)$ یک عملگر خطي کراندار روي $L^p(G,x)$ است که با تمام انتقال‌هاي چپ جابه‌جا مي‌شود با این فرض که L^p- جمع مستقیم از دو زیر فضاي غیر صفر نیست، از خاصیت ایزومتري‌هاي $L^p(G,x)$ روي خودش براي مشخص کردن و توصیف کردن ضربگرهاي چپ، معکوس پذیر، ایزومتریک، $L^p(G,x)$ براي $p \neq q$ و $1 < p$ استفاده مي‌کنیم و در واقع ما ثابت مي‌کنیم که اگر T یک ضربگر چپ، ایزومتریک و $L^p(G,x)$ روي خودش است. پس یک $y \in G$ و یک ایزومتري U از X به روي خودش وجود دارد به‌طوري‌که $Tf(x) = U(R_y f)(x)$ براي $f \in L^p(G,x)$. به صورت عملی ضربگرهای ایزومتر چپ از و طوریکه G غیر فشرده و حاصلجمع مستقیم از زیر فضای غیر صفر نیست را تعیین می‌کنیم. اگر G یک گروه آبلی فشرده و H یک فضای هیلبرت تفکیک پذیر باشد ما تعریف میکنیم $A^p(G,H) = \{f \in L^1(G,H) : \widehat{f} \in L^p(\Gamma,H)\}$ جاییکه Γ دوگان گروه G است. ما ضربگرهای چپ، ایزومتریک و معکوس پذیر را تعیین می‌کنیم با این شرط که G فشرده نیست، در نهایت ما از خاصیت ایزومتری برای G فشرده در تعیین ضربگرهای چپ و ایزومتریک استفاده می‌کنیم با این شرط که X^*موضعاً محدب است.

واژگان کلیدی: گروه موضعاً فشرده، اندازه‌ها، فضاي باناخ، توابع اندازه پذیر، ضربگرهاي ایزومتریک

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

۱.۱ گروهها و همریختی گروهها

تعریف ۱.۱.۱. عمل دوتایی روی یک مجموعه‌ی X، نگاشت $f : X \times X \longrightarrow X$ می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$f(a,b) = a \cdot b.$$

تعریف ۲.۱.۱. الف) یک نیم‌گروه، مجموعه‌ای ناتهی مانند G همراه با یک عمل دوتایی روی G با خاصیت زیر است

۱. شرکت‌پذیری: به ازای هر $a, b, c \in G$، $(ab)c = a(bc)$.

ب) تکگون نیم‌گروهی است مانند G که شامل یک عنصر همانی (دو طرفه) مانند $e \in G$ است که برای هر $a \in G$، $ae = ea = a$.

ج) تکگون را یک گروه[1] می‌نامیم هرگاه

---

[1] Group

۲. برای هر $a \in G$، عنصر $a^{-1} \in G$ موجود است به طوری که $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

د) گروه G را آبلی[۲] یا تعویض‌پذیر گوییم هرگاه

۳. برای هر $a, b \in G$، $ab = ba$.

تبصره ۳.۱.۱. اگر عمل دوتایی تعریف شده در عمل G، $+$ باشد آن‌گاه عنصر همانی را با صفر، ۰ ، نشان داده و معکوس[۳] هر عنصر را قرینه آن عنصر نامیده و به جای a^{-1} از $-a$ استفاده می کنیم.

نکته ۴.۱.۱. یکی از معروف‌ترین گروههایی که در ریاضیات با آن سروکار داریم، اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ است که با عمل جمع یک گروه با عضو همانی صفر است. از گروههای مهم دیگر اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ و اعداد گویای $\mathbb{Q}$ و اعداد مختلط $\mathbb{C}$ تحت جمع معمولی می‌باشند.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. در این صورت عدد اصلی مجموعه‌ی G را مرتبه‌ی G [۴] می‌نامیم و آن را با $|G|$ نشان می‌دهیم. اگر $|G|$ متناهی باشد G را متناهی و در غیر این صورت G را گروهی نامتناهی گوییم. فرض کنید $a \in G$ یک عنصر دلخواه از گروه G باشد. در این صورت کوچکترین عدد صحیح مثبت n (در صورت وجود) را به طوری که $a^n = e$، مرتبه‌ی a می‌نامیم و با $|a|$ نشان می‌دهیم. اگر چنین عددی وجود نداشته باشد مرتبه‌ی a را نامتناهی می‌نامیم.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید $(G, \cdot)$ یک گروه و Hزیرمجموعه‌ای ناتهی از G باشد،

[۲] Abelian

[۳] Inverse

[۴] Cardinal

اگر H نسبت به عمل دوتایی $(G,\cdot)$ تشکیل یک گروه دهد آن‌گاه H را زیرگروهی از G می‌نامیم و با نماد $H \leqslant G$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید G و H دو گروه باشند، تابع $f : G \longrightarrow H$ یک همریختی[۵] است اگر برای هر $a,b \in G$ داشته باشیم

$$f(ab) = f(a) \cdot f(b).$$

اگر f به عنوان یک نگاشت یک‌به‌یک باشد، f را تکریختی و اگر f پوشا باشد، f را برووریختی و در صورتی که f یک‌به‌یک و پوشا باشد، f را یکریختی گوییم.

۲.۱ مفاهیم توپولوژیک

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید S مجموعه‌ی ناتهی و τ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های S باشد که

۱. $\emptyset \in \tau$ و $S \in \tau$.

۲. هرگاه برای هر $i \in I$ داشته باشیم $G_i \in \tau$، آن‌گاه

$$\bigcup\{G_i : i \in I\} \in \tau.$$

۳. هرگاه برای هر $i = ۱, ۲, \ldots, n$، $G_i \in \tau$، آن‌گاه

$$\bigcap_{i=۱}^{n} G_i \in \tau.$$

[۵] Homomorphism

در این صورت τ یک توپولوژی [۶] است و عناصر τ مجموعه‌های باز نامیده می‌شوند و زوج مرتب (S,τ) را یک فضای توپولوژیک می‌نامیم.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید (S,τ)یک فضای توپولوژیک باشد و $\mathcal{B} \subseteq 2^S$ (که در آن 2^S گردایه‌ی تمام زیرمجموعه‌های S است) $\mathcal{B}$ را یک پایه[۷] برای τ گوییم اگروفقط‌اگر گردایه‌ی متشکل از مجموعه‌ی تهی و تمام زیرمجموعه‌های S که به صورت اجتماعی از عناصر $\mathcal{B}$ هستند، برابر τ باشد.

قضیه ۳.۲.۱. فرض کنید $S \neq \emptyset$ و $\mathcal{B} \subseteq 2^S$ آن‌گاه $\mathcal{B}$ یک پایه برای یک توپولوژی τ در S است اگروفقط‌اگر

۱. $S = \bigcup\{B : B \in \mathcal{B}\}$.

۲. برای هر $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ و $x \in B_1 \cap B_2$ عنصری مانند $B_3 \in \mathcal{B}$ وجود داشته باشد به قسمی که $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنیم S یک زیرمجموعه از اعداد حقیقی باشد. اگر عدد حقیقی مانند b وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $x \in S$ رابطه $x \leq b$ (به ترتیب $x \geq b$) برقرار باشد، آنگاه b را یک کران بالای (به ترتیب کران پایین) S می‌نامیم و می گوییم S از بالا (به ترتیب پایین) کراندار است.

اگر کران بالای (به ترتیب کران پایین) S عضو S هم باشد، به آن ماکزیمم (به ترتیب مینیمم) S گوییم و آن را با $\max S$ (به ترتیب $\min S$) نمایش می‌دهیم.

مجموعه S را کراندار گوییم، هرگاه S از بالا و از پایین کراندار باشد.

[۶] Topologic

[۷] Basis

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنیم S یک زیرمجموعه غیرتهی از اعداد حقیقی باشد. عدد c را کوچکترین کران بالایی (به ترتیب بزرگترین کران پایینی) مجموعه S می گویند هرگاه c یک کران بالای (به ترتیب کران پایین) S باشد و برای هر کران بالای (به ترتیب کران پایین) دیگر S مانند b، داشته باشیم $c \leq b$ (به ترتیب $c \geq b$).

کوچکترین کران بالای (به ترتیب بزرگترین کران پایین) مجموعه‌ی S را با $\sup_{x\in S} x$ (به ترتیب $\inf\limits_{x\in S} x$) نشان می‌دهیم.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنید (S,τ)یک فضای توپولوژیک و $A \subset S$ باشد. بستارA[۸] را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\overline{A} = \bigcap \{F \subset S : \text{بسته است } F \text{ و } A \subseteq F\}$$

قضیه ۷.۲.۱. فرض کنید (S,τ)یک فضای توپولوژیک و $A \subset S$ باشد. در این صورت $x \in \overline{A}$ اگروفقطاگر $x \in G \in \tau$ ایجاب کند که $G \cap A \neq \emptyset$.

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنید (S,τ)یک فضای توپولوژیک باشد و$A, B \in 2^S$ با شرط $A \subseteq B$ باشد، آن‌گاه A در B چگال[۹] است اگر وتنهااگر $B = \overline{A}$. بنابراین A در S چگال است اگروتنهااگر برای هر $G \in \tau \setminus \{\emptyset\}$، $G \cap \overline{A} \neq \emptyset$.

تعریف ۹.۲.۱. گوییم فضای توپولوژیک (S,τ) تفکیک‌پذیر[۱۰] است اگروتنهااگر شامل یک زیرمجموعه شمارش‌پذیر D باشد که در S چگال است، (یعنی $\overline{D} = S$).

[۸] Closure

[۹] Danse

[۱۰] Seprable

تعریف ۱۰.۲.۱. فضای توپولوژیک (S,τ) شمارش‌پذیر نوع دوم گوییم اگروتنهااگر τ دارای یک پایه شمارش‌پذیر $B = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ باشد.

قضیه ۱۱.۲.۱. هر فضای شمارش‌پذیر نوع دوم (S,τ) تفکیک‌پذیر است.

تعریف ۱۲.۲.۱. فضای (S,τ) هاسدورف یا T_2 نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $x,y \in S$ و $x \neq y$ مجموعه‌های U و V در τ وجود داشته باشند که $x \in U$ و $y \in V$ و $U \cap V \neq \emptyset$.

تعریف ۱۳.۲.۱. فرض کنید (S,τ)یک فضای توپولوژیک باشد و همچنین در نظر بگیرید $C = \{G_i : i \in I\} \subseteq 2^S$. گردایه‌ی$C$ یک پوشش برای (S,τ) است اگروتنهااگر $S \subset \bigcup\{G_i : i \in I\}$. پوشش C برای (S,τ) یک پوشش باز است اگروتنهااگر به ازای هر $i \in I$، $G_i \in \tau$.

تعریف ۱۴.۲.۱. فرض کنید $C = \{G_i : i \in I\}$ و $U = \{U_\beta : \beta \in T\}$ دو پوشش برای فضای توپولوژیک (S,τ) باشند. در این صورت گوییم U یک زیرپوشش C برای (S,τ) است اگروتنهااگر برای هر $\beta \in T$، $U_\beta \in C$.
(S,τ) فشرده[11] نامیده می‌شود، هرگاه هر پوشش باز (S,τ) شامل یک زیرپوشش باز باپایان باشد.

تعریف ۱۵.۲.۱. فضای (S,τ) موضعا فشرده[12] نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر $p \in S$ عنصری مانند $G_p \in \tau$ و زیرفضای فشرده K_p از (S,τ) موجود باشد که $p \in G_p \subseteq K_p$.

[11] Compact

[12] Locally compact

تعریف ۱۶.۲.۱. الف) تابع $f:(S,\tau_1)\longrightarrow (T,\tau_2)$ در $x\in G$ پیوسته [13] نامیده می‌شود، هرگاه $f(x)\in U\in\tau_2$ ایجاب کند که عنصری مانند $G\in\tau_1$ وجود دارد به قسمی که $x\in G$ و $f(G)\subset U$.

ب) تابع f پیوسته است اگروتنهااگر f در هر نقطه $x\in G$ پیوسته باشد.

تعریف ۱۷.۲.۱. فرض کنید G یک گروه موضعا فشرده و X یک فضای باناخ تفکیک‌پذیر باشد، دراین‌صورت فضای توابع پیوسته‌ی X-مقدار بر G را با $C(G,X)$ نمایش می‌دهیم. هرگاه X یک فضای مختلط یک‌بعدی باشد، این فضا را با $C(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۸.۲.۱. محمل (محافظ) تابع مختلط f بر فضای توپولوژیک X بستار مجموعه‌ی $\{x: f(x)\neq 0\}$ می‌باشد.

گردایه‌ی تمام توابع مختلط پیوسته بر X را که محافظ فشرده دارند با $C_c(X)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۹.۲.۱. گوییم تابع مختلط-مقدار f بر فضای توپولوژیک X در بی‌نهایت صفر می‌شود، اگر به ازای هر $\epsilon>0$ مجموعه‌ی فشرده‌ای مانند $K\subset X$ موجود باشد به طوری که به ازای هر x غیر واقع در K، $|f(x)|<\epsilon$.

مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته f بر X را که در بی‌نهایت صفر می‌شوند با $C_0(X)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۰.۲.۱. فرض کنید $f:(S,\tau_1)\longrightarrow (T,\tau_2)$ یک تابع باشد، آن‌گاه f باز است اگروتنهااگر $G\in\tau_1$ ایجاب کند که $f(G)\in\tau_2$.

---
[13] Continuse

تعریف ۲۱.۲.۱. فرض کنید$S \neq \emptyset$ و $\rho : S \times S \longrightarrow \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ تابعی باشد که در شرایط زیر صدق می کند

۱. به ازای هر $x, y \in S$، $\rho(x, y) = 0$ اگروتنهااگر $x = y$.

۲. به ازای هر $x, y \in S$، $\rho(x, y) = \rho(y, x)$، (یعنی ρ متقارن است).

۳. به ازای هر $x, y, z \in S$، $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$، (یعنی ρ در نابرابری مثلثی صدق می کند).

در این صورت ρ یک متر در S است و (S, ρ) یک فضای متریک است.

تعریف ۲۲.۲.۱. فرض کنید S و T دو فضای متریک باشند. گوییم نگاشت $f : (S, d_1) \longrightarrow (T, d_2)$ به طور یکنواخت پیوسته است اگروتنهااگر برای هر $\epsilon > 0$، عدد $\delta > 0$ وجود داشته باشد که اگر $d_1(x, y) < \delta$ آن گاه $d_2(f(x), f(y)) < \epsilon$.

تعریف ۲۳.۲.۱. هرگاه G یک گروه و (G, τ) یک فضای توپولوژیکی باشد به طوری که

۱. نگاشت$G \times G \longrightarrow G$ با ضابطه‌ی $(x, y) \longrightarrow x \cdot y$ پیوسته باشد.

۲. نگاشت $G \longrightarrow G$ با ضابطه‌ی $x \longrightarrow x^{-1}$ پیوسته باشد.
نگاشت وارون پیوسته است اگروتنهااگر

$$\forall W = nb(e) \ \ \exists V = nb(e) \ \ s.t \ \ V^{-1} \subseteq W.$$

بنابراین (G, τ) یک گروه توپولوژیکی است.

تعریف ۲۴.۲.۱. فرض می کنید f تابع حقیقی-مقدار بر $[a, b]$ باشد. f را بر $[a, b]$ مطلقاً پیوسته می گوییم درصورتی که، برای هر $\varepsilon > 0$، یک $\delta > 0$ وجود داشته باشد

به‌قسمی که به ازای هر زیربازه‌ی باز و از هم‌جدای (a_k, b_k)، $k = ۱, ۲, ..., n$، داشته باشیم $\sum_{k=۱}^{n}(b_k - a_k) < \delta$، آن‌گاه

$$\sum_{k=۱}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

تعریف ۲۵.۲.۱. اگر G یک گروه با توپولوژی گسسته[۱۴] باشد، در این صورت G یک گروه توپولوژیکی است.

۳.۱ فضای متریک

تعریف ۱.۳.۱. فضای برداری X را یک فضای نرم‌دار خطی[۱۵] می‌نامیم، هرگاه به هر $x \in X$ یک عدد حقیقی نامنفی مانند $\|x\|$ به نام نرم x چنان مربوط شده باشد که

۱. به ازای هر $x, y \in X$،

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

۲. اگر $x \in X$ و α اسکالر باشد

$$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|.$$

۳. $\|x\| = ۰$ اگروتنهااگر $x = ۰$.

[۱۴] Discrete

[۱۵] linear normed

هرگاه فقط شرط ۱ و ۲ برقرار باشند، آن‌گاه $\|x\|$ نیم‌نرم x نامیده می‌شود.
بنابر شرط ۱ نامساوی مثلثی برقرار است

$$\|x-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\|.$$

و بنابراین هر فضای نرم‌دار خطی یک فضای متریک است.

تعریف ۲.۳.۱. فرض کنید $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ دو نرم روی فضای برداری X باشند، نرم های $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ را دو نرم معادل نامیم، هرگاه توپولوژی‌های حاصل از آن‌ها یکسان باشند.

گزاره ۳.۳.۱. فرض کنید $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ دو نرم روی X باشند. در این صورت $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ معادل‌اند اگروتنهااگر ثابت‌های مثبت c و C وجود داشته باشند به قسمی که برای هر $x \in X$،

$$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$$

اثبات. به؟ صفحه‌ی ۶۶ رجوع کنید. □

تعریف ۴.۳.۱. هر فضای باناخ[۱۶] یک فضای نرم‌دار خطی است که با متر تعریف شده به وسیله‌ی نرمش کامل می‌باشد، یعنی هر دنباله کشی[۱۷] در این فضا همگرا می‌باشد.

یک نرم روی جبر A را زیرضربی نامیم هرگاه برای هر $x, y \in A$،

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|.$$

Banach space[۱۶]

Cauchy[۱۷]

هرگاه A یک جبر با یک نرم زیرضربی باشد، آن‌گاه $(A, \|\cdot\|)$ یک جبر نرم‌دار می‌نامیم.

تعریف ۵.۳.۱. جبر نرم‌دار کامل را یک جبر باناخ می‌نامند.

تعریف ۶.۳.۱. اگر X و Y فضاهای نیم‌نرم‌دار خطی باشند، یک طولپایی از X به Y نگاشت $U : X \longrightarrow Y$ است که برای هر $x, y \in X$،

$$\|Ux - Uy\| = \|x - y\|.$$

تعریف ۷.۳.۱. فرض کنید X یک فضای نرم‌دار خطی باشد و X' فضای دوگان[۱۸] آن باشد یعنی فضای تمام تابعک‌های خطی پیوسته Y روی X، در این صورت منظور از توپولوژی ضعیف $\sigma(X, X')$ روی X، کوچکترین توپولوژی است که توابع به فرم $y(x) \longrightarrow x$ در آن توپولوژی پیوسته باشند.

تعریف ۸.۳.۱. یک فضای توپولوژیکی برداری $(T.V.S)$ یک فضای برداری X است با یک توپولوژی که دارای خواص زیر است

۱. نگاشت $+ : X \times X \longrightarrow X$ با ضابطه‌ی $(x, y) \longrightarrow x + y$ پیوسته باشد.

۲. نگاشت $\mathbb{F} \times X \longrightarrow X$ با ضابطه‌ی $(\alpha, x) \longrightarrow \alpha x$ پیوسته باشد.

به سادگی هر فضای نرم‌دار یک $T.V.S$ است.

تعریف ۹.۳.۱. فضای توپولوژیکی (S, τ) را $\tau_\circ$ فضا گوییم هرگاه به ازای هر $x \in X$، $\{x\}$ بسته باشد.

[۱۸] Dual

تعریف ۱۰.۳.۱. هرگاه X و Y دو فضای موضعا محدب [۱۹] باشند، آن‌گاه فضای $L(X,Y)$ همراه با توپولوژی همگرای نقطه‌ای (یعنی برای هر $x \in X$، $Tx \longrightarrow 0$ اگر و تنها اگر $T \longrightarrow 0$) را با $LS(X,Y)$ نمایش می‌دهند.

هرگاه X و Y دو فضای نرم‌دار باشند و Y مجهز به توپولوژی نرم باشد، آن‌گاه توپولوژی فضای $LS(X,Y)$ را توپولوژی عملگر قوی و در حالتی که Y مجهز به توپولوژی ضعیف باشد، توپولوژی $LS(X,Y)$ را توپولوژی عملگر ضعیف می‌نامند.

تبصره ۱۱.۳.۱. فضای (S,τ) منظم است اگر و تنها اگر

$$\forall U = nb(x) \;\; \exists V = nb(x) \;\; s.t \;\; \overline{V} \subseteq U.$$

تعریف ۱۲.۳.۱. فضای برداری H را یک ضرب داخلی [۲۰] می‌نامیم اگر به هر زوج مرتب از بردارهای x و y در H یک عدد مختلط مانند $\langle x,y\rangle$ به نام حاصل‌ضرب داخلی x و y چنان مربوط شده باشد که

۱. $\langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle}$.

۲. اگر $x,y,z \in H$، آن‌گاه

$$\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle.$$

۳. اگر $x,y \in H$ و α اسکالر باشد، آن‌گاه

$$\langle \alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle.$$

[۱۹] Locally convex

[۲۰] Inner product