بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه
بخش ریاضی

رساله تحصیلی برای دریافت درجه دکتری

رشته ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات

حل مسائل بهینه سازی در شرایط ناهموار

مؤلف:

علی حمزه ای

استادان راهنما:

دکتر ماشاالله ماشین چی

دکتر محمد علی یعقوبی

آذر ماه ۱۳۹۲

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط درجه دکتری به

بخش ریاضی

دانشکده ریاضی و رایانه
دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: علی حمزه ای | امضاء:

استاد راهنما ۱: دکتر ماشاالله ماشین چی | امضاء:

استاد راهنما ۲: دکتر محمد علی یعقوبی | امضاء:

داور اول : دکتر اسماعیل خرم | امضاء:

داور دوم: دکتر محمود محسنی مقدم | امضاء:

داور سوم: دکتر آزیتا تاج الدینی | امضاء:

نماینده تحصیلات تکمیلی: .... | امضاء:

تقدیم به تمام عزیزان خانواده ام

و

تقدیم به همه آنهایی که

می خواهند بیشتر بدانند

تشکر و قدردانی

سپاس خدای را که سخنوران در ستودن او بمانند و شمارندگان شمردن نعمت های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. و سپاس او را که با لطف بی کران خود، آدمی را زیور عقل آراست. سلام و دورد بر محمد و خاندان پاك او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان وامدار وجودشان است؛ و نفرین پیوسته بر دشمنان ایشان تا روز رستاخیز...

پس از حمد و ثنای ایزد متعال وظیفه خود می دانم از زحمات بی دریغ اساتید با کمالات و شایسته؛ آقایان دکتر ماشاالله ماشین چی و دکتر محمدعلی یعقوبی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی تمام، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمائی این رساله را بر عهده گرفتند صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم؛

همچنین از اساتید فرزانه و دلسوز؛ آقایان دکتر اسماعیل خرم و دکتر محمود محسنی مقدم و سرکار خانم دکتر آزیتا تاج الدینی که زحمت داوری این رساله را متقبل شدند و حقیر از نقطه نظرات ایشان بهره مند گردیدم، کمال تشکر و امتنان را دارم.

در پایان، رحمت می فرستم بر روان پاک پدرم و بوسه می‌زنم بر دستان پر مهر مادرم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از تمام عزیزان خانواده ام، خصوصاً همسر و فرزندانم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند. باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

علی حمزه ای

آذر ماه ۱۳۹۲

چکیده

امروزه تعداد زیادی از مسائل بهینه سازی و تصمیم گیری با شرایط عدم قطعیت ساخته می شوند. در اینگونه مسائل کمیت های مورد استفاده داده های دقیقی نبوده، بلکه به شرایط محیط بستگی دارند. بیشتر مفاهیمی که در زبان طبیعی استفاده می شوند، مبهم هستند. به عبارت دیگر معمولاً برخی از مفاهیم و اطلاعات توسط عبارت های زبانی بیان می شوند، مانند "حدوداً ۱۰۰ کیلومتر"، "تقریباً ۸۰ کیلوگرم"، "سرد"، "سریع"، "قوی"، "جوان" و غیره. برخی از پژوهشگران این مفاهیم را بر حسب موضوع با داده های احتمالی یا فازی مدل سازی کرده اند. اما در بعضی موارد این کمیت های نادقیق نه می توانند بصورت احتمالی و نه بصورت فازی بیان شوند. در سالهای اخیر محققان اغلب با مسائل تصمیم گیری مختلف و مختلطی در رابطه با عدم قطعیت و ابهام روبرو شده اند. این عدم قطعیت ها با داده های بازه ای، ناهمواری یا ترکیبی از آن دو با داده های فازی و تصادفی بیان می شوند. در این رساله یک دسته از این مسائل در محیط ناهموار (راف) و ترکیبی از آن با داده های بازه ای مورد بحث قرار می گیرند.

این رساله شامل پنج فصل است. در فصل اول مقدمات و مفاهیم اولیه مربوط به مسائل بهینه سازی در شرایط عدم قطعیت و ابهام مورد بحث قرار داده می شوند. در فصل دوم مفاهیم کلی تری از مجموعه ها و بازه های ناهموار ارائه می گردد. فصل سوم مسائل برنامه ریزی خطی با ضرایب بازه ای ناهموار را معرفی و به بررسی و روند حل آنها می پردازد. فصل چهارم کلاس هایی از مسائل برنامه ریزی ریاضی تک هدفی و چندهدفی را در محیط های ناهموار تعریف و ارزیابی می نماید. در پایان، در فصل پنجم مختصری درباره نتایج حاصل از رساله به همراه پیشنهادات ارائه می گردد.

کلمات کلیدی:

بهینه سازی، عدم قطعیت، مجموعه های ناهموار، بازه های ناهموار، برنامه ریزی ناهموار

فهرست مطالب

پیش گفتار

انسان در مسیر زندگی خود همواره با مشکلات و مسائل مختلفی مواجه می شود که بایستی برای حل آنها تصمیم گیری و یا برنامه ریزی نماید. در حالی که بیشتر اوقات این تصمیمات و برنامه ریزی های روزمره با عدم قطعیت یا ابهام روبرو هستند. در این صورت ذهن تصمیم گیرنده برای اتخاذ تصمیم با دسته ای از سئوالات درگیر خواهد شد. برخی از این سئوالات می توانند چنین بیان شوند؛ داده های غیر قطعی در تعریف هر مسأله چطور شناسایی می شوند و از چه نوعی هستند؟ این مسائل بهینه سازی و تصمیم گیری در شرایط عدم قطعیت به چه صورت مدل سازی می شوند؟ مدل های ساخته شده چگونه حل می شوند؟ آیا روش یا الگوریتم خاصی برای حل این گونه مسائل وجود دارد؟ و غیره.

روش های بهینه سازی در شرایط عدم قطعیت و حوزه های بکارگیری آنها همراه با پیشرفت های علوم و فن آوری های نوین مانند علوم رایانه ای توسعه چشم گیری یافته اند. در نظریه های غیر قطعی یا عدم اطمینان، پس از کاربرد موفقیت آمیز نظریه مجموعه های فازی در سیستم های کنترلی و گسترش سریع این نظریه در اکثر علوم مدیریتی و اجتماعی، بهینه سازی، هوش مصنوعی، شبیه سازی، تحقیق در عملیات و غیره، نظریه مجموعه های ناهموار[۱] نیز به عنوان یک ابزار ریاضی مدرن در سایر علوم مذکور جهت بحث با اطلاعات نادقیق مطرح و مورد استفاده محققین قرار گرفت.[۲]

---

[۱] Rough sets theory

[۲] یادآوری می گردد برای بیان معادل فارسی Rough کلمات دیگری از قبیل ناهنجار نیز به کار گرفته شده اند، که در این رساله به پیروی از اکثر مقالات و پایان نامه های ارائه شده در این زمینه مانند [۱، ۳، ۴] کلمه ناهموار در نظر گرفته شده است.

در این رساله پس از معرفی کامل کمیت های نادقیق همچون داده های احتمالی، فازی، بازه ای و ناهموار و تاریخچه پیدایش آنها، درباره دسته ای از مسائل بهینه سازی در شرایط عدم قطعیت با برخی از این داده ها بحث خواهد شد. بعلاوه مثال هایی از حل آن مسائل جهت توضیح روش های پیشنهادی ارائه می گردد. سپس با توجه به این که مجموعه ها و بازه های ناهموار از مباحث اصلی این رساله هستند، به بیان مطالب کلی تری درباره آنها پرداخته می شود. اما چنان که مشخص است مسائل برنامه ریزی خطی یکی از مهمترین مسائل بهینه سازی هستند، لذا پس از ارائه تعاریف و کلیاتی درباره نظریه مجموعه های ناهموار یکی از شاخه های مسائل برنامه ریزی خطی در شرایط عدم قطعیت یعنی برنامه ریزی خطی با ضرایب بازه ای ناهموار مورد حل و بررسی قرار می گیرند. در پایان با معرفی شاخه ای از مسائل بهینه سازی تک هدفی در شرایط ناهموار، مطالب جدیدی از حالت چندهدفی این مسائل در فضای شدنی ناهموار تعریف و بیان می گردند.

رساله حاضر تلاشی به منظور معرفی، توسعه و گسترش مباحثی درباره نظریه مجموعه های ناهموار و حل و بحث دسته هایی از مسائل بهینه سازی در محیط آن مجموعه هاست.

فصل ۱

کمیت های نادقیق و معرفی مسائل بهینه سازی در شرایط عدم قطعیت

۱.۱ مقدمه

کمیت ها و داده های مسائل روزمره که اغلب بر اساس عبارت های زبانی هستند، می توانند از لحاظ مفهومی به یکی از مجموعه داده های نادقیق[1] تعلق داشته باشند. این مجموعه ها عبارتند از:

۱- داده های احتمالی یا تصادفی ۲- داده های فازی ۳- داده های بازه ای

۴- داده های ناهموار ۵- داده های نادقیق دیگر که حتی می توانند ترکیبی از داده های قبلی باشد.

در بسیاری از مسائل بهینه سازی و تصمیم گیری، تصمیم گیرنده نمی تواند بطور دقیق مقادیر ضرایب مسأله را تعیین کند و این ابهام ممکن است بر حسب یکی از مجموعه های فوق الذکر باشد. در واقع در مسائل بهینه سازی مرسوم عموماً ضرایب مسأله توسط افراد خبره با مقادیر دقیق تعیین می گردند، ولی در محیط های عدم قطعیت فرض اطلاعات دقیق توسط افراد خبره بسیار دور از واقعیت بنظر می رسد. بنابراین توسعه و استفاده از مدل سازی های نادقیق در مسائل تصمیم گیری و بهینه سازی واقعی با ضرایب و داده های نادقیق می تواند خیلی مناسب باشد.

از اواسط قرن گذشته میلادی بکارگیری روش ها و تکنیک های تحقیق در عملیات جهت حل مسائل بهینه سازی و تصمیم گیری در دنیای واقعی رواج یافت و با سرعت نسبتاً بالا به یکی از مهمترین فعالیتها در علوم پایه و علوم مهندسی تبدیل گردید. اما اغلب این مسائل کاملا معین نیستند. لذا مدلهای دقیق ریاضی توانایی لازم برای حل این چنین مسائل علمی روزمره را ندارند.

در زمانهای گذشته پژوهشگران در زمان رویارویی با مسائل شامل شرایط عدم اطمینان و داده های نادقیق، مفاهیم و روشهای مربوط به داده های تصادفی[2] و نظریه های احتمال را مورد استفاده قرار می دادند، که مبدأ آن به سال ۱۹۵۰ میلادی بر می گردد. البته خود نظریه احتمالات از قرن ۱۷ میلادی مورد مطالعه بوده و در محیط های وسیع و گوناگونی از علوم پایه، مهندسی، مدیریت و غیره به کار گرفته شده است.

اما در سالهای حدود ۱۹۶۰ میلادی استفاده از تئوری احتمالات در مدل سازی مسائل علمی بالاخص

[1] Uncertain

[2] Random

در هوش مصنوعی مورد انتقاد بیشتر محققان قرار گرفت. لذا برای تجدید نظر در حل اینگونه مسائل نظریه مجموعه های فازی[۱] نخستین بار توسط دانشمندی ایرانی تبار به نام پروفسور زاده در سال ۱۹۶۵ میلادی ارائه گردید [۵۳]. نظریه مجموعه های فازی در مفهوم کلی نظریه مدرج کردن مفاهیم است و با نظریه احتمال و شانس کاملا متفاوت است.

در مسائل بهینه سازی با داده های تصادفی و فازی بترتیب توزیع های احتمالی و توابع عضویت فازی نقش اصلی را بازی می کنند. بعضی اوقات برای حل و بررسی یکسری از مسائل، تعیین توزیع احتمالی و یا تابع عضویت مناسب در یک محیط نادقیق و شرایط عدم قطعیت مشکل به نظر می رسد. بنابراین روشهای دیگری مانند تحلیل بازه ای برای فائق آمدن بر این کمبودها مورد توجه و توسعه قرار گرفتند و در موازات مطرح شدن نظریه مجموعه های فازی کارهای گسترده ای هم روی مسائل بهینه سازی بازه ای خصوصاً برنامه ریزی خطی بازه ای[۲] در سالهای ۱۹۶۰ تا ۱۹۸۰ میلادی انجام گردید بطوری که در آغاز با مدل هایی از برنامه ریزی خطی سر و کار داشت که در آنها قیود می توانستند حد بالا و پایین داشته باشند، برای مثال می توان به [۸] اشاره کرد. بطور خلاصه در جاهایی کرانهای ضرایب نادقیق بازه ای مورد نیاز قرار می گرفتند که لزوماً توزیع های احتمالی یا توابع عضویت ناشناخته هستند.

سرانجام در خصوص معرفی کمیت های نادقیق، جدیدترین نوع از این داده ها نظریه مجموعه های ناهموار[۳] است [۳۲]. این نظریه یک ابزار ریاضی جدید برای کار با عدم اطمینان و اطلاعات ناقص و تقریبی می باشد. مفهوم مجموعه های ناهموار با اکثر ابزارهای ریاضی دیگر که برای بیان داده های نادقیق بکار گرفته می شوند تا حدی اشتراک دارد ولی با آنها خصوصاً با نظریه مجموعه های فازی مقایسه نمی شود. نظریه مجموعه های ناهموار در فصل بعد بطور مفصل ارائه و مورد بحث قرار خواهد گرفت.

---

[۱] Fuzzy

[۲] Interval linear programming

[۳] Rough

۲.۱ مسائل بهینه سازی در شرایط عدم قطعیت

در این بخش مسائل تصمیم گیری در شرایط عدم قطعیت با داده های نادقیق مورد بحث و بررسی قرار می گیرند. این نوع مسائل که بطور کلی مسائل برنامه ریزی ریاضی با داده های نادقیق یا مبهم و یا مسائل بهینه سازی در شرایط عدم قطعیت نامیده می شوند، بر اساس یک طبقه بندی از [۲۴] عبارتند از:

الف) برنامه ریزی تصادفی[۱] [۲۴] ب) برنامه ریزی فازی[۲] [۱۸] ج) برنامه ریزی ناهموار[۳] [۳۱]
د) برنامه ریزی بازه ای[۴] [۳۸] ه) برنامه ریزی ترکیبی[۵] [۵۰]

مورد آخر ترکیبی از دو یا چند حالت از چهار حالت قبلی می باشد. برای بحث درباره یک مسأله برنامه ریزی ریاضی در شرایط عدم قطعیت، می توان این مسائل را به صورت کلی زیر معرفی کرد:

فرض کنید $x \in \mathbb{R}^n$ بردار متغیرهای تصمیم گیری و ξ برداری از **داده های نادقیق** باشد، آنگاه بدون کاستن از کلیت، یک مسأله برنامه ریزی ریاضی تک هدفی با تابع هدف $f(x,\xi)$ و m تابع از توابع قیود $g_j(x,\xi)$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x,\xi) \\ s.t. \quad & g_j(x,\xi) \leq ۰ \quad j = ۱,\ldots,m, \end{aligned} \tag{۱.۱}$$

که در آن توابع f و g_j هر نوع تابع ریاضی می باشند، ضمناً این مسأله یک مسأله برنامه ریزی ریاضی در شرایط عدم قطعیت است که به دلایل ذیل یک مدل برنامه ریزی قطعی خوش تعریف[۶] نیست:

[۱] Stochastic programming

[۲] Fuzzy programming

[۳] Rough programming

[۴] Interval programming

[۵] Hybrid programming

[۶] Well-defined

الف) چون ξ یک بردار از داده های نادقیق است، محاسبه ماکزیمم تابع غیر قطعی $f(x,\xi)$ متشکل از این بردار به راحتی امکان پذیر نیست.

ب) به همان دلیل نادقیق بودن ξ، توابع قیود $g_j(x,\xi)$ نمی توانند یک مجموعه شدنی قطعی و معین تولید نمایند.

ضمناً باید توجه داشت که بردار ξ می تواند یک بردار از داده های تصادفی، فازی، بازه ای، ناهموار یا ترکیبی از آنها باشد.

۳.۱ مدل سازی و بیان جزئیاتی از مسائل بهینه سازی با داده های فازی

اگر در مسأله برنامه ریزی (۱.۱) بردار نادقیق ξ بر اساس داده های فازی باشد آنگاه مسأله (۱.۱) تبدیل به یک مسأله برنامه ریزی فازی می شود. مسائل بهینه سازی و تصمیم گیری فازی اولین بار با مفهوم بیشینه سازی تصمیم فازی توسط بلمن و زاده[۱] در سال ۱۹۷۰ میلادی مطرح گردید [۷]. اما آغاز مباحث مربوط به برنامه ریزی ریاضی فازی در چارچوب تصمیم فازی بلمن و زاده توسط تاناکا[۲] و همکارانش [۴۴] در سال ۱۹۷۴ میلادی صورت گرفت. شناخته ترین و کاربردی ترین مدل در بین مدلهای تصمیم گیری فازی، برنامه ریزی خطی فازی[۳] است که نخستین بار در سال ۱۹۷۶ میلادی توسط زیمرمن[۴] ارائه گردید [۵۴] و از آن پس تا کنون مقالات متعددی بوسیله محققان در این خصوص به چاپ رسیده است.

برای بیان دقیق مفهوم برنامه ریزی خطی فازی و مقایسه آن با مسائل برنامه ریزی خطی در محیط های بازه ای و ناهموار در بخش ها و فصل های بعد، ابتدا یک مثال کاربردی به همراه مدل سازی آن

[۱] Bellman and Zadeh

[۲] Tanaka

[۳] Fuzzy linear programming

[۴] Zimmermann

برگرفته شده از [۳۸] بیان می شود.

مثال ۱.۳.۱. در یک مرغداری تعداد ۱۰۰۰ جوجه نگهداری می شود. غذای این جوجه ها بوسیله مخلوطی از ارزن و سویای روغنی تأمین می گردد. هر جوجه روزانه **حدود ۰٫۲۵ کیلوگرم** از این مخلوط و حداقل **حدود ۲۲ درصد** پروتئین و **حدود ۵ درصد** کلسیم نیاز دارد. در هر کیلوگرم سویا **حدود ۵۰ درصد** پروتئین و **حدود ۶ درصد** کلسیم وجود دارد. در ضمن هر کیلوگرم ارزن نیز شامل **حدود ۹ درصد** پروتئین و **حدود ۰٫۳ درصد** کلسیم می باشد. از طرفی هزینه تهیه هر کیلوگرم سویا **حدود ۰٫۴ واحد پولی** و هزینه تهیه هر کیلوگرم ارزن برابر ۰٫۲ واحد پولی است. باید مشخص شود چطور سویا و ارزن مخلوط شوند بطوریکه ضمن برآورده شدن نیازها، هزینه کل کمینه گردد.

در این مثال کلمه **حدود** یک مفهوم فازی است. برای ساخت مدل این مسأله می توان از مفهوم عدد فازی استفاده کرد. برای نمونه **حدود ۰٫۴** را می توان به صورت عدد فازی $\tilde{0.4}$ نمایش داد (برای دیدن جزئیات بیشتر درباره مفهوم اعداد فازی می توان به [۲] مراجعه نمود). جهت مدل سازی فرض کنید x_1 و x_2 بترتیب مقدار سویا و ارزن لازم روزانه بر حسب کیلوگرم برای تهیه مخلوط باشند. پس مسأله را می توان به صورت زیر فرموله کرد:

$$
\begin{aligned}
\min \quad z = \; & \tilde{0.4}x_1 + 0.2x_2 \\
s.t. \quad & x_1 + x_2 = \tilde{0.25} \times 1000 \\
& \tilde{0.5}x_1 + \tilde{0.09}x_2 \geq \tilde{0.22} \times 1000 \\
& \tilde{0.06}x_1 + \tilde{0.003}x_2 \geq \tilde{0.05} \times 1000 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

به منظور حل اینگونه مسائل برنامه ریزی فازی، ایده ها و روش های متفاوت و متعددی بیان شده است که دو دسته از روش های مهم و اولیه در این خصوص عبارتند از:

الف) استفاده از توابع عضویت فازی:

که در این دسته، از ایده اولیه بلمن و زاده روی تصمیم فازی الهام گرفته شده است [۷].

ب) استفاده از توابع رتبه بندی[1]:

که در این دسته داده های فازی با یک تابع مقایسه ای مناسب مورد مقایسه قرار می گیرند. در ضمن توابع مقایسه ای مختلفی توسط محققان ارائه گردیده است از جمله روش های یاگر، آدامو، چانگ، روبنز[2] و غیره[۴۷].

با توجه به این که بیشتر بحث آتی در این رساله در خصوص کمیت های ناهموار و مسائل برنامه ریزی مربوط به آنهاست، از ذکر مطالب بیشتر درباره کمیتهای فازی صرف نظر می شود. لذا خواننده برای دستیابی به اطلاعات بیشتر و دیدن روشهای مختلف حل مسائل بهینه سازی فازی خصوصاً برنامه ریزی خطی فازی، می تواند به [۷، ۲۵] و تمام مقالات مرتبط به آنها مراجعه نماید.

۴.۱ مدل سازی و بیان مسائل بهینه سازی بازه ای

۱.۴.۱ مقدمه

برنامه ریزی بازه ای یکی دیگر از روشهای برنامه ریزی برای مواجه شدن با عدم قطعیت در مدل های تصمیم گیری و بهینه سازی ریاضی است. این نوع مسائل برنامه ریزی دارای مشخصات قابل توجهی هستند. برای مثال آنها نیاز به تعیین یا فرض توزیع های احتمالی (در برنامه ریزی تصادفی) یا توابع عضویت (در برنامه ریزی فازی) را ندارند. در برنامه ریزی بازه ای تنها فرض این است که اطلاعات درباره دامنه تغییرات تعدادی یا همه پارامترهای مسأله در دسترس است.

در سالهای اخیر روشهای تحلیل بازه ای روی مسائل بهینه سازی با داده های بازه ای توسعه داده شده است. هر چند بیشتر این نوع مسائل در حیطه برنامه ریزی خطی بازه ای ارائه گردیده اند، ولی اخیراً در سال ۲۰۰۸ میلادی جیانگ[3] و همکاران [۲۱] مسائل برنامه ریزی غیر خطی بازه ای را نیز مورد بحث قرار داده اند.

---

[1] Ranking functions

[2] Yager-Adamo-Chang-Roubens

[3] Jiang

در این رساله یکی از بحث ها پیرامون مسائل برنامه ریزی خطی بازه ای است و مطالب اساسی آنها جهت بکارگیری در فصلهای بعد بیان می شوند. در ضمن یکی از مهمترین مباحث منتشر شده درباره این موضوع، مسائل برنامه ریزی خطی با ضرایب بازه ای[۱] است که اولین بار در سال ۱۹۸۹ توسط ایشیبوچی و تاناکا[۲] مطرح شد [۱۹] که در مسأله آنها فقط ضرایب تابع هدف بازه ای بودند. اما مناسب ترین نتایج برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با ضرایب بازه ای بوسیله شاوچنگ[۳] در سال ۱۹۹۴ میلادی فراهم آمد [۳۸] که در مدل های پیشنهادی وی نه تنها ضرایب تابع هدف بلکه ضرایب تمام قیود هم بازه ای بودند. سپس در سال ۲۰۰۰ میلادی چینک و رمدان[۴] روش شاوچنگ را بیشتر توسعه دادند [۱۰]. آنها مسأله برنامه ریزی خطی با ضرایب بازه ای را که توسط شاوچنگ در یک مدل خاص کمینه سازی با قیود بزرگتر یا مساوی مورد حل و بررسی قرار گرفته بود، در فرم کلی و با هر نوع قید و هر نوع متغیر، به دو مسأله برنامه ریزی خطی کلاسیک با ضرایب معین و دقیق تبدیل کردند.

در ادامه ابتدا یک مثال کاربردی از مسائل برنامه ریزی خطی با ضرایب بازه ای ارائه می شود و پس از تعریف و مدل سازی آن به حل و بحث کلی مسائل برنامه ریزی خطی با ضرایب بازه ای خواهیم پرداخت. این مثال فرم دیگری از مثال ۱.۳.۱ می باشد که در آن ضرایب مسأله به جای عدد فازی بصورت بازه ای هستند.

مثال ۱.۴.۱. در یک مرغداری تعداد ۱۰۰۰ جوجه نگهداری می شود. غذای این جوجه ها بوسیله مخلوطی از ارزن و سویای روغنی تأمین می گردد. هر جوجه روزانه **بین ۰/۲۳ تا ۰/۲۷ کیلوگرم** از این مخلوط و حداقل **بین ۰/۲۱ تا ۰/۲۳ کیلوگرم** پروتئین و **بین ۴ تا ۶ گرم** کلسیم نیاز دارد. فرض کنید در هر کیلوگرم سویا **بین ۴۸ تا ۵۲ درصد** پروتئین و **بین ۰/۵ تا ۰/۸ درصد** کلسیم وجود دارد.

---

[۱] Linear programming with interval coefficients

[۲] Ishibuchi-Tanaka

[۳] Shaocheng

[۴] Chinneck-Ramadan

در ضمن میزان پروتئین موجود در هر کیلوگرم ارزن **بین ۸/۵ تا ۱۱/۵ درصد** و میزان کلسیم موجود در هر کیلوگرم ارزن به مقدار دقیق ۰/۳ درصد می باشد. اگر هزینه تهیه هر کیلوگرم سویا **بین ۰/۳۸ تا ۰/۴۲ واحد پولی** و هزینه تهیه هر کیلوگرم ارزن دقیقاً برابر ۰/۲ واحد پولی باشد. مشخص کنید به چه میزان مخلوط سویا و ارزن بایستی تهیه شود بطوریکه ضمن برآورده شدن نیازها، حداقل هزینه کل بدست آید.

جهت مدل سازی این مسأله فرض کنید $x_۱$ و $x_۲$ بترتیب مقدار سویا و ارزن لازم روزانه بر حسب کیلوگرم برای تهیه مخلوط باشند. پس مسأله را می توان بصورت زیر فرموله کرد:

$$\begin{aligned}
\min \quad z = \ & [۰/۳۸, ۰/۴۲]x_۱ + ۰/۲x_۲ \\
s.t. \qquad & x_۱ + x_۲ = [۰/۲۳, ۰/۲۷] \times ۱۰۰۰ \\
& [۰/۴۸, ۰/۵۲]x_۱ + [۰/۰۸۵, ۰/۱۱۵]x_۲ \geq [۰/۲۱, ۰/۲۳] \times ۱۰۰۰ \\
& [۰/۰۰۵, ۰/۰۰۸]x_۱ + ۰/۰۰۳x_۲ \geq [۰/۰۰۴, ۰/۰۰۶] \times ۱۰۰۰ \\
& \quad x_۱, x_۲ \geq ۰
\end{aligned}$$

همانطور که مشاهده می شود مدل مسأله کاربردی فوق یک برنامه ریزی خطی با ضرایب بازه ای است. در ضمن ضرایب دقیق را هم می توان بصورت یک بازه با کران بالا و پایین یکسان نوشت، بعنوان نمونه برای ضریب $x_۲$ در تابع هدف داریم: $[۰/۲, ۰/۲] = ۰/۲$.

۲.۴.۱ حل مسائل برنامه ریزی خطی با ضرایب بازه ای

نظر به اینکه مسائل برنامه ریزی خطی با ضرایب بازه ای برای ارائه مطالب فصل بعد مورد نیاز خواهند بود، جهت بیان و درک بیشتر آنها بدون کاستن از کلیت، این نوع از مسائل را به فرم کلی زیر با n

متغیر تصمیم و m قید می توان در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} \max \quad z = & \sum_{j=1}^{n} [\underline{c}_j, \bar{c}_j] x_j \\ s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} [\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}] x_j \leq [\underline{b}_i, \bar{b}_i] \quad i = 1, \ldots, m, \\ & x_j \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{2.1}$$

که در آن برای تمام اندیسهای i, j ضرایب $[\underline{c}_j, \bar{c}_j]$، $[\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}]$و $[\underline{b}_i, \bar{b}_i]$ بازه های بسته روی مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ هستند.

در ادامه برای حل مسأله (۲.۱) برخی تعاریف و قضایای مهم از [۱۰] آورده شده اند. این تعاریف و قضایا در [۱۰] بطور مفصل برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با ضرایب بازه ای از نوع کمینه سازی بیان شده اند. در ضمن خلاصه ای از مهمترین مطالب مربوط به آنها در [۱۶] برای مسأله بیشینه سازی (۲.۱) بیان شده اند که جهت بکارگیری در فصل های بعد مورد بحث قرار خواهند گرفت.

نامعادله $i-$ام از مسأله (۲.۱) را به شرح ذیل در نظر بگیرید:

$$\sum_{j=1}^{n} [\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}] x_j \leq [\underline{b}_i, \bar{b}_i]. \tag{3.1}$$

فرض کنید نامعادله (۳.۱) دارای p ضریب بازه ای در سمت چپ و یا راست داشته باشد. آنگاه نامعادله (۳.۱) می تواند با قرار دادن ضرایب بازه ای در ترکیب های مناسب از مقادیر مرزی دامنه خود، به 2^p نامساوی مرزی[1] مختلف تبدیل گردد. بعبارت دیگر با ثابت نگه داشتن ضرایب بازه ای در ترکیبات مختلف از مرز بالا و پایین هر بازه، می توان نامساوی های متعدد مرزی بدست آورد. اگر S_k مجموعه جواب برای k-امین نمونه نامساوی از 2^p نامساوی مرزی باشد، آنگاه دو مجموعه $\bar{S}$ و

[1] Extrem inequality