دانشگاه کاشان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض (گرایش جبر)

عنوان:

زیرحلقه‌های ارزیابی و شبه ارزیابی از یک دامنه صحیح

استاد راهنما:

دکتر رضا جهانی‌نژاد

به وسیله:

فروغ بیاتی

بهمن‌ماه ۸۸

چکیده

در این پایان‌نامه با معرفی زیرحلقه‌های ارزیابی و شبه ارزیابی از یک دامنه‌ی صحیح، به بررسی و مطالعه خواص آن‌ها می‌پردازیم. سپس تاثیر متقابل بین این دو مفهوم را بر یکدیگر مطالعه می‌کنیم. همچنین ارتباط بین زیرحلقه‌های ارزیابی با ایده‌ال‌های اول منقسم و حلقه‌های ارزیابی را بررسی می‌کنیم. در ادامه، ابتدا زیرحلقه‌ی شبه ارزیابی از یک دامنه‌ی صحیح را تعریف کرده سپس زیرحلقه‌های شبه ارزیابی نوع اول و نوع دوم را معرفی می‌کنیم و شرایطی معادل برای آنها بیان و اثبات می‌کنیم. پس از آن طیف اولی از زیرحلقه‌های شبه ارزیابی از یک دامنه‌ی صحیح را بررسی می‌کنیم. همچنین شرایطی را بیان می‌کنیم که تحت آن معادل بودن زیرحلقه‌ی شبه ارزیابی نوتری R از دامنه‌ی صحیح S با R'، بستار صحیح R در S، که یک حلقه‌ی ارزیابی گسسته از رتبه‌ی یک است، برقرار است. به علاوه مفهوم نمودار بازگشتی را به طور کاربردی‌تر بررسی می‌کنیم تا بتوانیم به طور عملی در اثبات قضایا از آن استفاده کنیم. در نهایت بعد کرول زیرحلقه‌های شبه ارزیابی نوع اول و نوع دوم از یک دامنه‌ی صحیح را محاسبه می‌کنیم.

کلمات کلیدی: حلقه — توسیع حلقه — ایده‌ال اول منقسم — زیرحلقه‌های ارزیابی — زیرحلقه‌های شبه ارزیابی — بعد کرول — نمودار بازگشتی

فهرست مطالب

مقدمه

نظریه‌ی حلقه‌های جابجایی در جبر و هندسه‌ی جبری نقش بسیار مهمی ایفا می‌کند. در این بین بسیاری از این حلقه‌ها نوتری نیستند اما خصوصیات دیگری دارند که با کمک آنها می‌توان این نوع از حلقه‌ها را بررسی کرد. در این پایان‌نامه به بررسی رده‌های مهمی از دامنه‌های صحیح همچون حلقه‌های ارزیابی و شبه ارزیابی می‌پردازیم. حلقه‌های ارزیابی از جمله حلقه‌های خوش تعریف به کاربرده شده در هندسه‌ی جبری هستند. یک کلاس از حلقه‌ها که تعمیمی از حلقه‌های ارزیابی است، با نام دامنه‌های شبه ارزیابی وجود دارد. در سال ۱۹۷۸ هدسترم [۱] و هاستون [۲] در [۱۴]، دامنه‌های شبه ارزیابی را معرفی و مورد بررسی قرار دادند. در این پایان‌نامه به مطالعه‌ی دامنه‌های ارزیابی و شبه ارزیابی از یک دیدگاه جدید می‌پردازیم.

لازم به ذکر است که در این پایان‌نامه حلقه‌ها را جابجایی و یکدار در نظر می‌گیریم. همچنین میدان کسرهای دامنه‌ی صحیح R را با K یا در برخی اثبات‌ها با $qf(R)$ نشان می‌دهیم. علاوه بر این، فرض می‌کنیم یک زیرحلقه‌ی R از S همواره به طور سره مشمول در S باشد. در این پایان‌نامه دامنه‌ی ارزیابی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

فرض کنید R یک دامنه‌ی صحیح با میدان کسرهای $qf(R)$ باشد. R را یک دامنه‌ی ارزیابی می‌گوییم هرگاه برای هر عنصر غیرصفر x از $qf(R)$ داشته باشیم $x \in R$ یا $x^{-1} \in R$.

هدسترم و هاستون در سال ۱۹۷۸ در [۱۴]، دامنه‌ی شبه ارزیابی را به صورت زیر تعریف کردند:

فرض کنید R یک دامنه‌ی صحیح باشد. R را یک دامنه‌ی شبه ارزیابی می‌گوییم هرگاه برای هر ایده‌ال اول P از R و هر عنصر x و y از $qf(R)$، اگر $xy \in P$ آنگاه $x \in P$ یا $y \in P$. به دنبال آن تلاش‌های قابل توجهی طی سالیان بعد روی مطالعه‌ی دامنه‌های شبه ارزیابی انجام

[۱] $Hedstrom$
[۲] $Houston$

گرفت. برای مثال اندرسون [۳] در [۱] و [۲]، بداوی [۴] در [۶]، هدسترم و هاستون در [۱۴] و [۱۵] و دوبز [۵] در [۹] و [۱۰] مقالات ارزشمندی در این زمینه ارائه کردند. هدف اصلی ما مطالعه‌ی زیرحلقه‌های ارزیابی و شبه ارزیابی از یک حلقه است. همچنین اشتراک بین این زیرحلقه‌ها را نیز بررسی می‌کنیم. اکثر مطالب از مراجع [۱]، [۴]، [۵]، [۱۲] و [۱۴] انتخاب شده‌اند.

این پایان نامه مشتمل بر چهار فصل است. فصل اول شامل چهار بخش است. در بخش اول مقدماتی را بیان می‌کنیم که پیشنیاز فصل‌های بعدی است. در بخش دوم به بررسی دامنه‌ی ارزیابی پرداخته و یک کاربرد از این دامنه را در زمینه‌ی ساختار کلاسیک ارائه می‌کنیم. سپس ایده‌ال‌های ماکسیمال مشترک بین دو حلقه‌ی R و S را بررسی می‌کنیم و مثال‌هایی را در این زمینه ارائه می‌دهیم. در بخش چهارم، نمودار بازگشتی را معرفی می‌کنیم و یک گزاره مربوط به ویژگی‌های این نمودار ارائه می‌دهیم که جزو یکی از اساسی‌ترین مطالب این پایان نامه است.

فصل دوم شامل دو بخش است. در بخش اول ابتدا ایده‌ال قویاً اول را معرفی کرده سپس دامنه‌ی شبه ارزیابی را تعریف می‌کنیم. در ادامه قضایایی مربوط به دامنه‌ی شبه ارزیابی را بیان می‌کنیم. به عنوان مثال قضیه‌ای را که هدسترم و هاستون در سال ۱۹۷۸ ثابت کردند، بیان می‌کنیم مبنی بر این‌که هرگاه R یک دامنه‌ی شبه ارزیابی با ایده‌ال ماکسیمال M باشد آنگاه حلقه‌ی ارزیابی V شامل R وجود دارد به طوری که دارای ایده‌ال ماکسیمال M است و هر ایده‌ال اول R یک ایده‌ال اول V نیز هست. در بخش دوم مفاهیم دامنه‌های ارزیابی را گسترش داده و تعاریف و قضایایی از زیرحلقه‌های ارزیابی از یک حلقه را بیان می‌کنیم. همین طور مفهوم جفت جبری مانده‌ای را تعریف کرده و به دنبال آن یک مشخصه از زیرحلقه‌های ارزیابی را ارائه می‌دهیم. در واقع، ثابت می‌کنیم هرگاه (R,S) یک جفت جبری مانده‌ای باشد آنگاه برای هر حلقه‌ی $T \in [R,S]$، یک ایده‌ال اول منقسم مانند Q از R وجود دارد به طوری که $T = R_Q$ و $\dfrac{R}{Q}$ یک حلقه‌ی ارزیابی است.

فصل سوم مشتمل بر سه بخش است که آن را به مطالعه‌ی زیرحلقه‌های شبه ارزیابی از یک دامنه‌ی صحیح اختصاص داده‌ایم. در بخش اول، مفهوم دامنه‌ی شبه ارزیابی را گسترش داده و زیرحلقه‌ی شبه ارزیابی از یک دامنه‌ی صحیح را معرفی می‌کنیم. سپس به بیان یک مشخصه از

---

[۳] $Anderson$
[۴] $Badawi$
[۵] $Dobbs$

زیرحلقه‌های شبه ارزیابی می‌پردازیم. به عبارت دیگر، ثابت می‌کنیم اگر R یک دامنه‌ی صحیح شبه موضعی با ایده‌ال ماکسیمال M و S یک حلقه شامل R باشد آنگاه R یک زیرحلقه‌ی شبه ارزیابی S باشد اگر و تنها اگر برای هر $x \in S \setminus R$، $x^{-1}M \subseteq M$. در بخش دوم نوع اول زیرحلقه‌های شبه ارزیابی از یک دامنه‌ی صحیح را معرفی کرده سپس به بیان یک مشخصه از این نوع زیرحلقه‌ها می‌پردازیم. در بخش سوم نوع دوم زیرحلقه‌های شبه ارزیابی از یک دامنه‌ی صحیح را معرفی کرده و همچنین یک مشخصه از زیرحلقه‌های شبه ارزیابی نوع دوم را نیز بیان می‌کنیم. همچنین هادی R در S را وارد قضایا کرده و تاثیر آن را روی زیرحلقه‌های شبه ارزیابی نوع اول و دوم به طور جداگانه بررسی می‌کنیم. به طور کلی، همان قضایای مربوط به زیرحلقه‌های شبه ارزیابی نوع اول را این بار برای زیرحلقه‌های شبه ارزیابی نوع دوم بیان و اثبات می‌کنیم. در نهایت ثابت می‌کنیم که اگر R یک دامنه‌ی صحیح به طور کامل صحیحاً بسته و زیرحلقه‌ی شبه ارزیابی دامنه‌ی صحیح S باشد آنگاه R یک دامنه‌ی ارزیابی با بعد کرول یک است.

فصل چهارم شامل سه بخش است. در بخش اول به بررسی زیرحلقه‌ی شبه ارزیابی R از دامنه‌ی صحیح S همراه با فرض نوتری بودن R می‌پردازیم. به عنوان مثال، شرط تساوی R'، بستار صحیح R در S، با حلقه‌ی $(M :_S M)$ را ارائه می‌کنیم. همچنین شرط معادل بودن زیرحلقه‌ی شبه ارزیابی R با زیرحلقه‌ی شبه ارزیابی R' را بیان می‌کنیم. در بخش دوم قضایایی مربوط به نمودارهای بازگشتی و زیرحلقه‌های شبه ارزیابی را ارائه می‌کنیم. در بخش سوم با بیان مقدماتی از بعد کرول حلقه‌ی چند جمله‌ای و ارتفاع یک ایده‌ال، بعد کرول حلقه‌ی چند جمله‌ای m متغیره، $R[X_1, X_2, \dots, X_m]$، را روی نوع اول و دوم زیرحلقه‌ی شبه ارزیابی R محاسبه می‌کنیم.

فصل ۱

دامنه‌ی ارزیابی و برخی کاربردهای آن

این فصل شامل چهار بخش است. بخش اول مباحثی از جبر جابجایی است که در اثبات مباحث بعدی می‌توان به آنها رجوع کرد. در بخش دوم دامنه‌ی ارزیابی را تعریف کرده و یک کاربرد از این دامنه را در زمینه‌ی ساختار کلاسیک معرفی می‌کنیم.

در بخش سوم ایده‌ال‌های ماکسیمال مشترک بین دو حلقه‌ی R و S، که R زیرحلقه‌ای از S است، را بیان می‌کنیم. در بخش چهارم نمودار بازگشتی را معرفی کرده و به بیان چند ویژگی از این نمودار می‌پردازیم. لازم به ذکر است که برای هر دامنه‌ی صحیح R معمولاً میدان کسرهای R را با نماد K یا در برخی اثبات‌ها با $qf(R)$ نشان می‌دهیم.

۱−۱ مقدماتی از جبر جابجایی

فرض کنید S یک حلقه و R زیرحلقه‌ای از S باشد. در این صورت S را یک توسیع حلقه‌ی R می‌گوییم. فرض کنید S یک توسیع حلقه‌ی R باشد و $s \in S$. هرگاه یک چند جمله‌ای تکین مانند $f(x) \in R[x]$ وجود داشته باشد به طوری که s ریشه‌ای از f باشد آنگاه گوییم s روی R صحیح است. اگر هر عنصر S روی R صحیح باشد، گوییم S یک توسیع صحیح از R است.

همچنین فرض کنید R زیرحلقه‌ای از S باشد. به سادگی می‌توان ثابت کرد که زیرمجموعه‌ی

$$R' = \{s \in S \mid \text{صحیح است } R \text{ روی } s\}$$

از S زیرحلقه‌ای از S، شامل R است که بستار صحیح R در S نام دارد. گوییم R در S صحیحاً بسته است هرگاه $R' = R$. علاوه بر این اگر R یک دامنه‌ی صحیح با میدان کسرهای K باشد و R در K صحیحاً بسته باشد آنگاه می‌گوییم R صحیحاً بسته است.

گزاره: فرض کنید T یک حلقه و R و S زیرحلقه‌هایی از T باشند به طوری که $R \subset S$. اگر S روی R صحیح و T روی S صحیح باشد آنگاه T روی R صحیح است.

اثبات. به نتیجه‌ی ۲۳.۱۳ از [۲۰] مراجعه شود. □

با توجه به این مطالب، واضح است که R' در S صحیحاً بسته است.

تذکر: فرض کنید R زیرحلقه‌ای از حلقه‌ی S باشد. اگر J ایده‌الی از S باشد آنگاه $I = J \cap R$ ایده‌الی از R است. همریختی حلقه‌ای مرکب $\varphi : R \hookrightarrow S \longrightarrow \frac{S}{J}$ را در نظر می‌گیریم. به وضوح هسته‌ی این همریختی I است و در نتیجه بنا بر قضیه‌ی همریختی، یک تکریختی از حلقه‌ی $\frac{R}{I}$ به توی حلقه‌ی $\frac{S}{J}$ وجود دارد و لذا می‌توان $\frac{R}{I}$ را به عنوان زیرحلقه‌ای از $\frac{S}{J}$ در نظر گرفت. حال اگر S روی R صحیح باشد آنگاه $\frac{S}{J}$ نیز روی $\frac{R}{I}$ صحیح است.

تعریف ۱.۱ فرض کنید F یک توسیع میدان K باشد و $u \in F$. گوییم عنصر u روی K جبری است هرگاه u ریشه‌ی یک چند جمله‌ای غیرصفر مانند $f \in K[x]$ باشد. در غیر این صورت گوییم u روی K متعالی است.

اگر هر عنصر F روی K جبری باشد آنگاه F را توسیع جبری K می‌نامیم. واضح است که هر توسیع جبری از میدان K یک توسیع صحیح K است.

هرگاه F یک توسیع میدان K باشد آنگاه می‌توان F را به عنوان یک فضای برداری روی K در نظر گرفت و لذا دارای یک پایه است. چنانچه پایه‌ی F روی K متناهی باشد F را توسیع متناهی K می‌نامیم. به وضوح، هر توسیع متناهی K یک توسیع جبری K است ولی عکس این مطلب برقرار نیست. در ادامه پایه‌ی تعالی را معرفی خواهیم نمود، اما قبل از آن تعریف زیر را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۲.۱ فرض کنید F یک توسیع میدان K و $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ زیرمجموعه‌ای از F باشد. در این صورت گوییم S روی K وابسته‌ی جبری است هرگاه چند جمله‌ای غیرصفر $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ وجود داشته باشد به طوری که $f(s_1, \dots, s_n) = 0$.

زیرمجموعه‌ی S از F را مستقل جبری می‌نامیم هرگاه شامل هیچ زیرمجموعه‌ی وابسته‌ی جبری نباشد. به وضوح، هر زیرمجموعه‌ی یک مجموعه‌ی مستقل جبری، مستقل جبری است.

تعریف ۳.۱ فرض کنید F یک توسیع میدان K باشد. یک پایه‌ی تعالی F روی K زیرمجموعه‌ای مانند S از F است به طوری که روی K مستقل جبری بوده و در مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های مستقل جبری F ماکسیمال باشد.

تذکر: استقلال جبری را می‌توان تعمیمی از مفهوم استقلال خطی در نظر گرفت زیرا هر مجموعه‌ی مستقل جبری، مستقل خطی نیز هست. اما عکس آن درست نیست. به مثال زیر توجه کنید.

مثال: فرض کنید K یک میدان باشد و $F = K(t)$. برای هر دو عنصر $f(t), g(t) \in K(t)$ به طوری که $g(t) \neq 0$، چند جمله‌ای غیرصفر $h(x,y) = g(x)y - f(x) \in K[x,y]$ را در نظر می‌گیریم. به وضوح $h(t, \frac{f(t)}{g(t)}) = g(t)\frac{f(t)}{g(t)} - f(t) = 0$ و لذا عناصر t و $\frac{f(t)}{g(t)}$ از F روی K وابسته‌ی جبری هستند. بنابراین $\{t\}$ یک پایه‌ی تعالی F روی K است در حالی که $\{t\}$ یک پایه‌ی F به عنوان فضای برداری روی K نیست.

در قضایای ۸.۱ و ۹.۱ از فصل ٦ [١٦] ثابت می‌شود که اگر X یک پایه‌ی تعالی F روی میدان K باشد آنگاه $|X|$ (عدد اصلی X) مستقل از انتخاب پایه است. بنابراین می‌توانیم تعریف زیر را ارائه کنیم.

تعریف ۴.۱ فرض کنید F یک توسیع میدان K باشد. اگر X یک پایه‌ی تعالی F روی میدان K باشد آنگاه عدد اصلی X را درجه‌ی تعالی F روی K می‌نامیم و با نماد $tr.deg[F:K]$ نشان می‌دهیم.

نمادگذاری: اگر R و S دامنه‌های صحیح و S یک توسیع R باشد آنگاه درجه‌ی تعالی میدان $qf(S)$ روی میدان $qf(R)$ را با $tr.deg[S:R]$ نمایش می‌دهیم.

می‌دانیم اگر R یک حلقه و I ایده‌الی از R باشد آنگاه یک تناظر دوسویی حافظ ترتیب بین ایده‌ال‌های حلقه‌ی خارج قسمتی $\frac{R}{I}$ و ایده‌ال‌های حلقه‌ی R شامل I وجود دارد. در واقع برای هر ایده‌ال J از R که $I \subseteq J$، $\frac{J}{I}$ ایده‌ال $\frac{R}{I}$ است و هر ایده‌ال $\frac{R}{I}$ نیز به همین صورت است. علاوه بر این، ایده‌ال‌های اول $\frac{R}{I}$ نیز متناظر با ایده‌ال‌های اول R شامل I هستند.

در این پایان‌نامه برای هر زیرمجموعه‌ی ضربی بسته S از حلقه‌ی R، حلقه‌ی کسرهای R نسبت به S را با نماد $S^{-1}R$ یا R_S نمایش خواهیم داد. به سادگی می‌توان ثابت کرد که اگر S یک زیرمجموعه‌ی ضربی بسته‌ی حلقه‌ی T و Q ایده‌ال اولی از T باشد آنگاه

$$\overline{S} = \{a + Q \mid a \in S\}$$

یک زیرمجموعه‌ی ضربی بسته‌ی $\frac{T}{Q}$ است و لذا می‌توانیم حلقه‌ی کسرهای $\overline{S}^{-1}(\frac{T}{Q})$ را بسازیم. همریختی $T \longrightarrow \frac{T}{Q} \longrightarrow \overline{S}^{-1}(\frac{T}{Q})$ را در نظر می‌گیریم.

به وضوح، تصویر هر عنصر S در $\overline{S}^{-1}(\frac{T}{Q})$ معکوس‌پذیر است لذا بنا به قضیه‌ای از [۲۰]، این همریختی به همریختی $S^{-1}T \longrightarrow \overline{S}^{-1}(\frac{T}{Q})$ گسترش می‌یابد. به سادگی می‌توان ثابت کرد که این همریختی پوشا با هسته‌ی $S^{-1}Q$ است. در نتیجه $\frac{S^{-1}T}{S^{-1}Q} \cong \overline{S}^{-1}(\frac{T}{Q})$. از طرفی چون $qf(\overline{S}^{-1}(\frac{T}{Q})) = qf(\frac{T}{Q})$ پس $qf(\overline{S}^{-1}(\frac{T}{Q})) = qf(\frac{S^{-1}T}{S^{-1}Q})$.

همچنین توجه می‌کنیم که اگر S مجموعه‌ی همه‌ی عناصر منظم حلقه‌ی R باشد آنگاه R_S را حلقه‌ی کلی کسرهای R می‌نامیم و برای هر ایده‌ال اول P از حلقه‌ی R، حلقه‌ی موضعی شده‌ی R در P را با نماد R_P نشان می‌دهیم. به سادگی می‌توان ثابت کرد که برای هر ایده‌ال I از R، اگر $I \subseteq P$، آنگاه $\frac{R_P}{IR_P} \cong (\frac{R}{I})_{\frac{P}{I}}$ به خصوص $\frac{R_P}{PR_P} \cong qf(\frac{R}{P})$، یعنی میدان خارج قسمتی حلقه‌ی شبه موضعی R_P با میدان کسرهای دامنه‌ی صحیح $\frac{R}{P}$ یکریخت است. همچنین برای زیرمجموعه‌ی ضربی بسته S از R، اگر $P \cap S = \emptyset$ آنگاه $(R_S)_{PR_S} \cong R_P$.

حال فرض کنید R یک دامنه‌ی صحیح با میدان کسرهای K باشد. در این صورت زیرمجموعه‌ی I از K را یک ایده‌ال کسری R می‌نامیم هرگاه I یک R–زیرمدول K باشد و عنصر غیرصفر $r \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $rI \subseteq R$. واضح است که هر ایده‌ال I از دامنه‌ی صحیح R، یک ایده‌ال کسری R است و برعکس، هر ایده‌ال کسری R که مشمول در R باشد یک ایده‌ال معمولی R است. همچنین فرض کنید R یک دامنه‌ی صحیح با میدان کسرهای K و I و J ایده‌ال‌هایی کسری از R باشند به طوری که $J \neq ۰$. در این صورت زیرمجموعه‌ی

$$\{x \in K \mid xJ \subseteq I\}$$

یک ایده‌ال کسری از R است که آن را با نماد $(I :_K J)$ نمایش خواهیم داد. ایده‌ال کسری I از دامنه‌ی صحیح R را معکوس‌پذیر می‌نامیم هرگاه ایده‌ال کسری J از R وجود داشته باشد به طوری که $IJ = R$. در این صورت J را معکوس I می‌نامیم. به سادگی می‌توان ثابت کرد که اگر I یک ایده‌ال کسری معکوس‌پذیر از دامنه‌ی صحیح R باشد و $IJ = R$ آنگاه $J = (R :_K I)$. بنابر این معکوس ایده‌ال کسری معکوس‌پذیر I منحصر به فرد بوده و برابر با $(R :_K I)$ می‌باشد. با توجه به این نکته به ازای هر ایده‌ال کسری I از R، ایده‌ال کسری $(R :_K I)$ را با نماد $I^{-۱}$ نمایش می‌دهیم و آن را دوگان I می‌نامیم. لذا اگر ایده‌ال کسری I معکوس‌پذیر باشد آنگاه $I^{-۱}$ معکوس I است. پس ایده‌ال I معکوس‌پذیراست اگر و تنها اگر $II^{-۱} = R$.

گزاره ۵.۱ فرض کنید I یک ایده‌ال کسری غیرصفر و متناهیاً تولید شده از دامنه‌ی صحیح R و R' بستار صحیح R باشد. در این صورت $(I : I) \subseteq R'$.

اثبات. فرض می‌کنیم I یک ایده‌ال کسری غیرصفر و تولید شده توسط $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ باشد. همچنین فرض می‌کنیم $r \in (I : I)$. در این صورت $rI \subseteq I$ و لذا عناصر $r_{ij} \in R$، $۱ \leq i, j \leq n$، وجود دارند به طوری که

$$\begin{aligned} ra_۱ &= r_{۱۱}a_۱ + \ldots + r_{۱n}a_n \\ ra_۲ &= r_{۲۱}a_۱ + \ldots + r_{۲n}a_n \\ &\vdots \\ ra_n &= r_{n۱}a_۱ + \ldots + r_{nn}a_n \end{aligned}$$

حال چون یک دستگاه همگن زمانی جواب غیرصفر دارد که دترمینان ضرایب آن برابر صفر باشد پس با تشکیل دترمینان ضرایب این دستگاه همگن و برابر با صفر قرار دادن آن به‌دست می آوریم $r^n + b_{n-1}r^{n-1} + \ldots + b_1 r + b_0 = 0$ که b_i ها جمع جبری حاصلضرب r_{ij} هاست. در نتیجه r ریشه‌ی یک چند جمله‌ای تکین با ضرایب در R است و لذا $r \in R'$. $\square$

حال فرض کنید I ایده‌الی از دامنه‌ی صحیح R باشد. I را یک ایده‌ال رادیکالی می‌نامیم هرگاه $I = \sqrt{I}$. واضح است که هر ایده‌ال اول، ایده‌ال رادیکالی نیز هست. همچنین فرض کنید R یک حلقه و I ایده‌الی سره از R باشد. در این صورت ایده‌ال اول P از R را یک ایده‌ال اول مینیمال روی I می‌نامیم هرگاه $I \subseteq P$ و هیچ ایده‌ال اولی از R وجود نداشته باشد که شامل I و اکیداً مشمول در P باشد. همچنین رادیکال جیکبسن R را اشتراک همه‌ی ایده‌ال‌های ماکسیمال R تعریف می‌کنیم و آن را با $Jac(R)$ نشان می‌دهیم. لذا $Jac(R)$ یک ایده‌ال R است. توجه می‌کنیم که اگر R یک حلقه‌ی شبه موضعی باشد، آنگاه $Jac(R)$ ایده‌ال ماکسیمال منحصر به فرد R است. در ادامه زنجیره‌ای از ایده‌ال‌های اول حلقه‌ی R را تعریف می‌کنیم.

فرض کنید R حلقه‌ای غیرصفر و $P_0, P_1, \ldots, P_n$ ایده‌ال‌های اول متمایز از R باشد. در این صورت عبارت $P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_n$ را یک زنجیره از ایده‌ال‌های اول R می‌نامیم. طول این زنجیره تعداد علامت‌های $\subset$ یعنی یکی کمتر از تعداد ایده‌ال‌های اول موجود در آن است. بنابراین طول زنجیره فوق برابر n می‌باشد.

برای هر ایده‌ال اول P از حلقه‌ی R، P را زنجیره‌ای به طول صفر می‌نامیم. علاوه بر این، بعد کرول حلقه‌ی R را برابر با

$$Sup\{n \in N_0 \mid \text{زنجیره‌ای به طول } n \text{ از ایده‌ال‌های اول } R \text{ وجود داشته باشد.}\}$$

تعریف می‌کنیم و آن را با $dimR$ نشان می‌دهیم. همچنین برای هر ایده‌ال اول P از حلقه‌ی R، ارتفاع P را برابر با

$$Sup\{n \mid \text{زنجیره‌ای از ایده‌ال‌های اول } R \text{ به طول } n \text{ ختم به } P \text{ وجود داشته باشد.}\}$$

تعریف می‌کنیم و آن را با htP نشان می‌دهیم.

حال فرض کنید R یک حلقه و M یک $R-$مدول باشد. در این صورت M را نوتری می‌نامیم اگر هر زنجیر صعودی $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \ldots \subseteq N_n \subseteq \ldots$ از زیرمدول‌های R متوقف شود. یعنی اینکه عدد طبیعی k وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر i، $i \geq k$، $N_i = N_k$. هرگاه

حلقه‌ی R به عنوان R —مدول، نوتری باشد آنگاه R را حلقه‌ی نوتری می‌نامیم.

قضیه ۶.۱ فرض کنید R یک حلقه‌ی نوتری باشد. در این صورت هر R—مدول متناهی مولد نوتری است.

اثبات. به قضیه‌ی ۲۲.۷ از [۲۰] مراجعه شود. □

قضیه ۷.۱ فرض کنید x یک عنصر غیریکال از حلقه‌ی نوتری R و P یک ایده‌ال اول مینیمال روی $\langle x\rangle$ باشد. در این صورت ارتفاع P، حداکثر یک است.

اثبات. به قضیه‌ی ۱۴۲ از [۱۷] مراجعه شود. □

قضیه ۸.۱ فرض کنید R یک حلقه و $J_1, J_2, \dots, J_n$ که $n \geq 2$ ایده‌ال‌هایی از R باشند به طوری که حداکثر دو تا از آنها اول نیستند. همچنین فرض کنید S زیرگروهی از گروه جمعی R باشد که نسبت به ضرب بسته است و $S \subseteq J_1 \cup \ldots \cup J_n$. در این صورت به ازای k ای، $1 \leq k \leq n$، $S \subseteq J_k$.

اثبات. به قضیه‌ی ۸۱ از [۱۷] مراجعه شود. □

قضیه ۹.۱ فرض کنید $P \subset Q$ ایده‌ال‌های اول از یک حلقه‌ی نوتری باشند. اگر یک ایده‌ال اول به طور سره بین آنها وجود داشته باشد آنگاه تعداد نامتناهی ایده‌ال اول بین آنها وجود دارد.

اثبات. ابتدا فرض کنیم $P = 0$ و $P_1, P_2, \dots, P_n$ تنها ایده‌ال‌های اول سره بین P و Q باشند. در این صورت بنا به قضیه‌ی ۸.۱، $Q \nsubseteq P_1 \cup \ldots \cup P_n$. از این‌رو فرض می‌کنیم $x \in Q$ و به ازای هر i، $1 \leq i \leq n$، $x \notin P_i$. لذا Q روی $\langle x\rangle$ مینیمال است و چون حداقل یک ایده‌ال اول بین P و Q وجود دارد پس $htQ \geq 2$. این یک تناقض است زیرا با توجه به قضیه‌ی ۷.۱، $htQ \leq 1$. پس فرض خلف باطل و لذا تعداد نامتناهی ایده‌ال اول بین P و Q وجود دارد. در حالت کلی، حلقه $\frac{R}{P}$ را در نظر می‌گیریم. بنا بر استدلال فوق، تعداد نامتناهی ایده‌ال اول از $\frac{R}{P}$ بین $\{0\}$ و $\frac{Q}{P}$ وجود دارد. با توجه به تناظر دوسویی بین ایده‌ال‌های اول R شامل P و ایده‌ال‌های اول $\frac{R}{P}$ نتیجه مطلوب حاصل می‌گردد. □

یادآوری می‌کنیم که هر گاه R یک دامنه صحیح با میدان کسرهای K باشد در این صورت منظور از یک حلقه شامل R حلقه‌ای است بین R و K. بنابراین اگر S یک حلقه شامل R باشد

آنگاه به وضوح K میدان کسرهای S نیز هست.

قضیه ۱۰.۱ فرض کنید R یک دامنه‌ی نوتری با بعد یک، K میدان کسرهای R و S یک حلقه شامل R باشد. در این صورت S نیز نوتری با بعد کرول حداکثر یک است.

اثبات. به قضیه‌ی ۹۳ از [۱۷] مراجعه شود. □

۱—۲ دامنه‌ی ارزیابی

در این بخش با فرض اینکه R یک دامنه‌ی صحیح با میدان کسرهای K است دامنه‌ی ارزیابی را معرفی کرده سپس به بررسی ارزیابی وابسته به دامنه‌ی ارزیابی R می‌پردازیم. همچنین ضمن معرفی رتبه‌ی دامنه‌ی ارزیابی R، رابطه‌ی آن را با بعد کرول R مشخص می‌کنیم.

تعریف ۱۱.۱ فرض کنید R یک دامنه‌ی صحیح با میدان کسرهای K باشد. R را یک دامنه‌ی ارزیابی می گوییم هرگاه برای هر عنصر غیرصفر x از K، $x \in R$ یا $x^{-1} \in R$.

قضیه ۱۲.۱ فرض کنید R یک دامنه‌ی صحیح با میدان کسرهای K باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:

۱) R یک دامنه‌ی ارزیابی است.

۲) ایده‌ال‌های R تحت رابطه‌ی شمول کاملاً مرتب اند.

۳) ایده‌ال‌های اصلی R تحت رابطه‌ی شمول کاملاً مرتب اند.

اثبات. به گزاره‌ی ۵.۲ از [۱۸] مراجعه شود. □

نتیجه: هر دامنه‌ی ارزیابی، شبه موضعی است.

قضیه ۱۳.۱ فرض کنید R یک دامنه‌ی ارزیابی با میدان کسرهای K باشد به طوری که R میدان نیست و I ایده‌ال سره‌ای از R است. در این صورت $\cap_{n=1}^{\infty} I^n$ یک ایده‌ال اول از R است.

اثبات. فرض می‌کنیم $P_\circ = \cap_{n=1}^{\infty} I^n$. به وضوح $P_\circ$ ایده‌الی از R است. حال فرض می‌کنیم a و b عناصری از R باشند به طوری که $a \notin P_\circ$ و $b \notin P_\circ$. بنابراین اعداد طبیعی n و m وجود دارند به طوری که $a \notin I^n$ و $b \notin I^m$. حال چون هر دو ایده‌ال R قابل مقایسه هستند پس $I^n \subsetneqq \langle a \rangle$ و

$I^m \subsetneqq \langle b \rangle$. بنابراین $I^{n+m} = I^n I^m \subsetneqq \langle a \rangle \langle b \rangle = \langle ab \rangle$. از این‌رو $ab \notin I^{n+m}$ و لذا $ab \notin P_\circ$. در نتیجه $P_\circ$ یک ایده‌ال اول R است. $\square$

تعریف: گروه آبلی $(G,+)$ را یک گروه آبلی مرتب می‌نامیم هرگاه یک رابطه‌ی ترتیب کلی $\leq$ روی G وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $a,b,c \in G$، اگر $a \leq b$ آنگاه $a+c \leq b+c$.

حال فرض کنید K یک میدان و G یک گروه آبلی مرتب باشد. تابع پوشای $v : K \longrightarrow G \cup \{\infty\}$ را یک ارزیابی روی K می‌نامیم هرگاه

۱) $v(a) = \infty \Longleftrightarrow a = \circ$

۲) $v(ab) = v(a) + v(b)$

۳) $v(a+b) \geq min\{v(a), v(b)\}$

در این صورت G را گروه ارزیاب v می‌نامیم. همچنین زیرمجموعه‌ی $\{a \in K \mid v(a) \geq \circ\}$ زیرحلقه‌ای از K و یک دامنه‌ی ارزیابی است. آن را حلقه‌ی ارزیابی v می‌نامیم.

قضیه ۱۴.۱ فرض کنید R یک دامنه‌ی ارزیابی با میدان کسرهای K باشد. در این صورت یک ارزیابی v روی K وجود دارد به طوری که $R = \{a \in K \mid v(a) \geq \circ\}$.

اثبات. به گزاره‌ی ۵.۱۳ از [۱۸] مراجعه شود. $\square$

تعریف: فرض کنید G یک گروه آبلی مرتب و H زیرگروهی از G باشد. H را زیرگروه منفرد می‌گوییم هر گاه برای هر عنصر نامنفی $a \in H$ و برای هر عنصر $b \in G$ که $\circ \leq b \leq a$ داشته باشیم $b \in H$. یک زیرگروه منفرد H از G را سره می‌گوییم هرگاه $H \neq G$.

تعریف: اگر گروه آبلی مرتب G دارای تنها تعداد متناهی زیرگروه منفرد باشد آنگاه تعداد زیرگروه‌های سره و منفرد G را رتبه‌ی G می‌نامیم.

حال فرض کنید v یک ارزیابی روی میدان K، G گروه ارزیاب v و R حلقه‌ی ارزیابی v باشد. در این صورت

۱) اگر رتبه‌ی G برابر n باشد آنگاه می‌گوییم v و R دارای رتبه‌ی n هستند. رتبه‌ی R را با نماد $rankR$ نمایش می‌دهیم.

۲) اگر G دوری باشد آنگاه v را ارزیابی گسسته و R را حلقه‌ی ارزیابی گسسته می‌نامیم.

در قضیه‌ی زیر رابطه‌ی بین بعد کرول و رتبه‌ی حلقه‌ی ارزیابی R را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱۵.۱ فرض کنید v یک ارزیابی روی میدان K، G گروه ارزیاب v و R حلقه‌ی ارزیابی v باشد. در این صورت یک تناظر دو سویی و عکس کننده‌ی رابطه‌ی ترتیب بین زیرگروه‌های منفرد G و ایده‌ال‌های اول حلقه‌ی ارزیابی R وجود دارد.

اثبات. به قضیه‌ی ۵.۱۷ از [۱۸] مراجعه شود. $\square$

نتیجه: فرض کنید R یک حلقه‌ی ارزیابی از رتبه‌ی n با ایده‌ال ماکسیمال M و v ارزیابی متناظر با R با گروه ارزیاب G باشد. چون ایده‌ال‌های R، به خصوص ایده‌ال‌های اول R یک زنجیر هستند و از طرفی بنا به قضیه‌ی ۱۵.۱، تعداد زیرگروه‌های منفرد G برابر با تعداد ایده‌ال‌های اول R است لذا R دارای $n+1$ ایده‌ال اول است که $\{0\} = P_0 \subsetneqq P_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq P_n = M$ و بنابراین $dimR = n$. همین‌طور نتیجه می‌شود که زیرگروه‌های منفرد G نیز یک زنجیر هستند و $\{0\} \subsetneqq H_1 \subsetneqq H_2 \subsetneqq \ldots \subsetneqq H_n = G$.

تعریف: فرض کنید S یک حلقه و R زیرحلقه‌ای از S باشد. عنصر $s \in S$ را روی R تقریباً صحیح می‌گوییم هرگاه عنصر غیرصفر $r \in R$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر عدد طبیعی n، $rs^n \in R$.

واضح است که هر عنصر R روی R تقریباً صحیح است. مجموعه‌ی همه‌ی عناصری از S که روی R تقریباً صحیح می‌باشند را بستار صحیح کامل R در S می‌نامیم. اگر بستار صحیح کامل دامنه‌ی صحیح R در میدان کسرهایش برابر با خودش باشد آنگاه می‌گوییم R به طور کامل صحیحاً بسته است.

قضیه ۱۶.۱ فرض کنید R یک دامنه‌ی ارزیابی با میدان کسرهای K باشد به طوری که R میدان نیست. در این صورت R به طور کامل صحیحاً بسته است اگر و تنها اگر R دارای رتبه‌ی یک باشد.

اثبات. فرض می‌کنیم R به طور کامل صحیحاً بسته و M ایده‌ال ماکسیمال R باشد. اگر P ایده‌ال اولی از R باشد که $P \neq M$ نشان می‌دهیم $P = \{0\}$. برای هر $x \in M \setminus P$، چون ایده‌ال‌های R مرتب خطی‌اند پس $P \subsetneqq \langle x \rangle$. لذا برای هر عدد طبیعی n، از اول بودن P نتیجه می‌شود که $x^n \notin P$ و مشابهاً $P \subsetneqq \langle x^n \rangle$. در نتیجه $P \subseteq \cap_{n=1}^{\infty} \langle x^n \rangle$. حال اگر

$0 \neq r \in \cap_{n=1}^{\infty} \langle x^n \rangle$ آنگاه برای هر عدد طبیعی n، $r \in \langle x^n \rangle$ و لذا برای یک $s \in R$، $r = sx^n$ و یا $rx^{-n} = s \in R$. بنابراین برای هر عدد طبیعی n، $r(x^{-1})^n = rx^{-n} \in R$. پس x^{-1} روی R تقریباً صحیح است و لذا بنا به فرض، $x^{-1} \in R$. در نتیجه $1 = x^{-1}x \in M$ که یک تناقض است. بنابراین $\cap_{n=1}^{\infty} \langle x^n \rangle = \{0\}$ و لذا $P = \{0\}$. پس M تنها ایده‌ال اول غیرصفر R است و لذا $dimR = 1$. در نتیجه $rankR = 1$.

برعکس، فرض می‌کنیم رتبه‌ی R برابر یک باشد و $x \in K \setminus R$. در این صورت چون R یک دامنه‌ی ارزیابی است و $x \notin R$ پس $x^{-1} \in R$. فرض می‌کنیم $P = \cap_{n=1}^{\infty} \langle x^{-n} \rangle$. لذا با توجه به قضیه‌ی ۱.۱۳، P یک ایده‌ال اول R است. حال چون رتبه‌ی R یک است لذا $dimR = 1$. پس $P = \{0\}$ یا P ایده‌ال ماکسیمال R است. اگر P ایده‌ال ماکسیمال R باشد آنگاه $\left\langle x^{-1} \right\rangle = \left\langle x^{-2} \right\rangle = \ldots = P$ و لذا $x^{-1} \in \left\langle x^{-2} \right\rangle$. در این صورت عنصر $a \in R$ وجود دارد به طوری که $x^{-1} = ax^{-2}$. در نتیجه $x = x^2x^{-1} = x^2(ax^{-2}) = a \in R$ و این متناقض با انتخاب x است. پس P ایده‌ال ماکسیمال R نمی‌باشد و از این‌رو $P = \{0\}$ یعنی $\cap_{n=1}^{\infty} \langle x^{-n} \rangle = \{0\}$.

حال اگر x روی R تقریباً صحیح باشد آنگاه $0 \neq r \in R$ وجود دارد که برای هر عدد طبیعی n، $s_n = rx^n \in R$. در نتیجه برای هر عدد طبیعی n، $r = s_nx^{-n} \in \langle x^{-n} \rangle$. پس $r \in \cap_{n=1}^{\infty} \langle x^{-n} \rangle = \{0\}$. این تناقض نشان می‌دهد که x روی R تقریباً صحیح نیست و لذا R به طور کامل صحیحاً بسته است. □

یکی از ساختارهای مرتبط با زیرحلقه‌های ارزیابی، ساختار کلاسیک است که در زیر آن را توضیح می‌دهیم.

فرض کنید V یک دامنه‌ی صحیح به صورت $K + M$ باشد که در آن K یک میدان و M یک ایده‌ال ماکسیمال غیرصفر از V است. همچنین فرض کنید D یک زیرحلقه‌ی سره از میدان K باشد. در این صورت $D + M$ زیرحلقه‌ای از V می‌باشد اگر آن را با R نشان دهیم هدف ما بررسی ساختار R است هرگاه V یک دامنه‌ی ارزیابی و D نیز یک زیرحلقه‌ی ارزیابی از K باشد. دقت کنید همواره $K \cap M = \{0\}$ زیرا اگر $0 \neq a \in K \cap M$ آنگاه $a^{-1} \in K \subseteq V$ پس $1 = aa^{-1} \in M$ که این متناقض با سره بودن ایده‌ال M است.

گزاره ۱۷.۱ ساختار کلاسیک $D+M$ را با همان مفروضات بالا در نظر بگیرید. در این صورت $\mathrm{Spec}(D+M)=\mathrm{Spec}(K+M)$ اگر و تنها اگر D یک میدان باشد.

اثبات. به گزاره‌ی ۱.۲ از [۱] مراجعه شود. □

۱—۳ ایده‌ال‌های اول مشترک بین دو حلقه‌ی R و S

در این بخش جفت حلقه‌های R و S را که دارای ایده‌ال‌های اول مشترک هستند بررسی و چند ویژگی از آنها را بیان می‌کنیم. می‌توانیم تعریف ایده‌ال کسری $(I:_K J)$ از R را در حالت کلی، برای مجموعه‌ی هادی $(I:_K J)$ به فرم زیر بیان کنیم.

نمادگذاری: فرض کنید R یک حلقه، K حلقه‌ی کلی کسرهای R و I یک R—زیرمدول K باشد. در این صورت مجموعه‌ی هادی $\{x\in K \mid xJ\subseteq I\}$ را با $(I:_K J)$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۱۸.۱ فرض کنید S یک توسیع حلقه‌ی R و I یک ایده‌ال غیرصفر مشترک R و S باشد. در این صورت اگر I شامل یک عنصر منظم از R باشد آنگاه S مشمول در K، حلقه‌ی کلی کسرهای R است، به علاوه $S\subseteq (I:_K I)$.

اثبات. فرض می‌کنیم $y\in I$ عنصر منظمی از R باشد. چون I یک ایده‌ال S است لذا برای هر $t\in S$، $x=ty\in I$. بنابراین $t=\dfrac{x}{y}$ متعلق به حلقه‌ی کلی کسرهای R است. چون I ایده‌ال S است پس $S\subseteq (I:_K I)$. □

گزاره ۱۹.۱ اگر R یک زیرحلقه‌ی سره از حلقه‌ی S باشد آنگاه R و S حداکثر یک ایده‌ال ماکسیمال مشترک دارند.

اثبات. فرض می‌کنیم N و M ایده‌ال‌های ماکسیمال متمایز مشترک R و S باشند. چون N و M ایده‌ال‌های متباین R هستند پس $M+N=R$. به طور مشابه، چون N و M در S نیز متباین هستند لذا $M+N=S$. بنابراین $R=S$، که متناقض با فرض است. □

حال با ترکیب گزاره‌های ۱۸.۱ و ۱۹.۱، گزاره‌ی زیر را به‌دست می‌آوریم:

گزاره ۲۰.۱ فرض کنید S یک توسیع حلقه‌ی R باشد به طوری که $R\neq S$ و $\mathrm{Spec}(R)=\mathrm{Spec}(S)$. در این صورت R و S شبه موضعی هستند. به علاوه اگر R یک دامنه‌ی

صحیح با ایده‌ال ماکسیمال M باشد به طوری که میدان نیست آنگاه $S \subseteq (M :_K M)$.

گزاره ۲۱.۱ فرض کنید R یک دامنه‌ی صحیح شبه موضعی با ایده‌ال ماکسیمال M باشد به طوری که R میدان نیست. در این صورت برای هر ایده‌ال اول P از R، $(M :_K M) \subseteq (P :_K P)$.

اثبات. فرض می‌کنیم $x \in (M :_K M)$. نشان می‌دهیم برای هر $a \in P$، $xa \in P$. چون $x^۲ \in (M :_K M)$ و $a \in M$ پس $x^۲a \in M$. بنابراین $(xa)^۲ = (x^۲a)a \in MP \subseteq P$. حال چون $ax \in M \subseteq R$ و P یک ایده‌ال اول R است پس $xa \in P$. □

گزاره ۲۲.۱ فرض کنید S یک توسیع حلقه‌ی R باشد به طوری که $\mathrm{Spec}(R) = \mathrm{Spec}(S)$. در این صورت اگر R یک دامنه‌ی صحیح باشد آنگاه برای هر ایده‌ال اول غیرماکسیمال P از R، $R_P = S_P$.

اثبات. اگر $R = S$ آنگاه حکم واضح است. پس فرض می‌کنیم $R \neq S$. به وضوح $R_P \subseteq S_P$. از طرفی چون $\mathrm{Spec}(R) = \mathrm{Spec}(S)$ پس بنا به گزاره‌ی ۲۰.۱، R و S شبه موضعی هستند. لذا فرض می‌کنیم M ایده‌ال ماکسیمال R باشد و $m \in M \setminus P$. به ازای هر $t \in S$ و $s \in S \setminus P$، $\frac{t}{s}$ را عنصر دلخواهی از S_P در نظر می‌گیریم. لذا از این‌که $tm \in M \subseteq R$ و $sm \in R \setminus P$ به‌دست می‌آوریم $\frac{t}{s} = \frac{tm}{sm} \in R_P$. بنابراین $S_P \subseteq R_P$. □

گزاره ۲۳.۱ فرض کنید S یک توسیع حلقه‌ی R باشد. اگر $J(R)$ یک ایده‌ال S باشد آنگاه $J(R) \subseteq J(S)$.

اثبات. کافی است نشان دهیم برای هر ایده‌ال ماکسیمال N از S، $J(R) \subseteq N$. فرض می‌کنیم برای یک ایده‌ال ماکسیمال N از S، $J(R) \nsubseteq N$. از این‌رو $J(R) + N = S$. بنابراین عناصر $r \in J(R)$ و $n \in N$ وجود دارند به طوری که $r + n = ۱$. پس $n = ۱ - r \in R$. حال چون $n \in ۱ + J(R)$ پس n در R یکال است و لذا n در S نیز یکال است. اما این یک تناقض است زیرا $n \in N$. پس فرض خلف باطل و برای هر ایده‌ال ماکسیمال N از S، $J(R) \subseteq N$. □

نتیجه ۲۴.۱ فرض کنید R یک حلقه‌ی شبه موضعی با ایده‌ال ماکسیمال M و S یک توسیع حلقه‌ی R باشد. اگر M یک ایده‌ال S باشد آنگاه $M \subseteq J(S)$.