بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی (گرایش آنالیز عددی)

بررسی وجود جواب برای مسایل مقادیر مرزی متناوب خطی فازی

توسط:

زهره طهماسبی

استاد راهنما:

دکتر امید سلیمانی فرد

استاد مشاور:

دکتر اکبر هاشمی برزآبادی

شهریور ۱۳۹۳

به نام خدا

بررسی وجود جواب برای مسایل مقادیر مرزی متناوب خطی فازی

توسط:

زهره طهماسبی

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ
درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی کاربردی (گرایش آنالیز عددی)

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: عالی

دکتر امید سلیمانی فرد دانشیار ریاضی کاربردی گرایش بهینه سازی و کنترل بهینه دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر اکبر هاشمی برزآبادی دانشیار ریاضی کاربردی گرایش بهینه سازی و کنترل بهینه دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر سید هاشم طبسی استادیار علوم کامپیوتر گرایش علوم کامپیوتر دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور اول)

دکتر علی طهماسبی استادیار ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور دوم)

دکتر مجیب احمدی استادیار آمار گرایش استنباط آماری دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریور ۱۳۹۳

تقدیم به

خدایی که آفرید

جهان را، انسان را، عقل را، علم را، معرفت را، عشق را،

و به کسانی که عشقشان را در وجودم دمید.

تقدیم به پدر مهربانم

که بر سایه بلند و امن او تکیه کرده ام.

تقدیم به مادر عزیزم

که تبسم عاشقانه و گرمای حضورش دلیل زندگی ام است.

تقدیم به خواهران دلسوز و برادران عزیزم :

آنان که لحظات شیرین زندگی ام مدیون آنهاست.

سپاسگزاری

حمد و سپاس پروردگار متعال را که بزرگ ترین و مستحکم ترین تکیه گاه انسان هاست. او که با الطاف بی کران خود درهای علم را بر ما گشود و عمری و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده ضعیف خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید.

سپاس همه ی آنان را که خوشه چین خرمن معرفتشان بوده ام و آموختن را به گونه ای مدیون فضل و کرم آنانم.

صمیمانه ترین سپاس خود را تقدیم استاد راهنمای دلسوز و ارجمندم

جناب آقای دکتر امید سلیمانی فرد

می نمایم که الگوی فروتنی و مهربانی توام با دانش و آگاهی است.

سپاس استاد مشاور گرامی ام جناب آقای دکتر اکبر هاشمی برزآبادی را که زحمت مشاوره این پایان نامه را پذیرفتند.

و سپاس از استادان ارجمند جناب آقای دکتر سید هاشم طبی و جناب آقای دکتر علی طهماسبی برای پذیرش بزرگوارانه ی ارزیابی این پایان نامه.

چکیده

بررسی وجود جواب برای مسایل مقادیر مرزی متناوب خطی فازی

به وسیله‌ی:
زهره طهماسبی

هدف از این پایان نامه بررسی شرایط لازم برای وجود جواب معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول متناوب خطی فازی با استفاده از مشتق تعمیم یافته و نقاط سوییچ است. در فصل اول مقدماتی مربوط به مجموعه های فازی و معادلات دیفرانسیل خطی فازی آورده شده است. در فصل دوم به بررسی وجود جواب برای معادلات دیفرانسیل خطی فازی با تک نقطه سوییچ و در فصل سوم به بررسی وجود جواب و به دست آوردن جواب های معادلات دیفرانسیل خطی فازی با تعداد متناهی نقطه سوییچ و هم چنین چگونگی جواب در این نقاط سوییچ پرداخته ایم.

واژه‌های کلیدی: اعداد فازی، مجموعه های فازی، معادلات دیفرانسیل مرتبه اول فازی، مسایل مقدار مرزی متناوب، مشتق تعمیم یافته

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

فصل ۱

مفاهیم پایه

نظریه مجموعه‌های فازی نظریه‌ای برای اقدام در شرایط عدم اطمینان است. این نظریه قادر است بسیاری از مفاهیم و متغیرها و سیستم‌هایی را که نادقیق و مبهم هستند، همان‌گونه که در عالم واقع اکثرا چنین است، صورت‌بندی ریاضی ببخشد و زمینه را برای استدلال، استنتاج، کنترل و تصمیم‌گیری در شرایط عدم اطمینان فراهم آورد. این نظریه کاربردهای گسترده‌ای در زمینه‌های کامپیوتر، تحلیل سیستمی، الکترونیك، برق و اخیرا در علوم اجتماعی و اقتصاد پیدا کرده است.
در نظریه مجموعه‌های کلاسیک هر مجموعه با اعضایش به طور کامل شناخته می‌شود. به عبارتی دیگر، یك مجموعه هنگامی به طور کامل معرفی می‌شود که هر عضو به طور قطعی عضو آن مجموعه باشد یا خارج از آن مجموعه تعریف شود [۲۳].
هر مجموعه یك صفت مشخص کننده‌ی مربوط به خود دارد. معیار عضویت عناصر در مجموعه، صفت مشخص کننده‌ی مجموعه است و هر عنصری که دارای آن صفت باشد، عضو مجموعه است و در صورت دارا نبودن آن صفت، خارج از مجموعه شناخته می‌شود. این معیار عضویت را تابع عضویت می‌نامیم که به صورت زیر بیان می‌شود

$$m(x) = \begin{cases} ۱ & x \in A, \\ ۰ & x \notin A. \end{cases}$$

مجموعه‌های فازی به مفاهیم و متغیرهای زبانی تقسیم می‌شوند. برای مثال "قیمت" یك مفهوم است و "قیمت نسبتاً پایین" یك متغیر زبانی[۱] است. یك مجموعه فازی تابعی از یك مجموعه به بازه [۰, ۱] است. اگر X مجموعه نقاط باشد، مجموعه فازی A درX بوسیله تابع عضویت $f_A(x)$ که برای

[۱] Linguistic variable

هر نقطه در X عدد حقیقی در بازه $[۰, ۱]$ نسبت می‌دهد، شناسایی می‌شود که در آن $f_A(x)$ درجه عضویت x در A خوانده می‌شود [۳۸].

۱-۱ مجموعه های فازی

تعریف ۱.۱.۱. [۳۸، ؟] فرض کنید X یک مجموعه‌ی دلخواه باشد. برد تابع مشخصه هر زیرمجموعه کلاسیکAاز X، مجموعه‌ی $\{۰, ۱\}$ است، یعنی

$$\chi_A(x) = \begin{cases} ۱ & x \in A, \\ ۰ & x \notin A. \end{cases}$$

حال اگر برد تابع مشخصه را از مجموعه دو عضوی $\{۰, ۱\}$ به بازه $[۰, ۱]$ توسعه دهیم، یک تابع خواهیم داشت که به هر عضوxاز X،عددی از بازه $[۰, ۱]$ نسبت می‌دهد. این تابع را تابع عضویت A می‌نامیم.

با توجه با تعریف ۱.۱.۱، اکنون دیگرA یک مجموعه کلاسیک نیست بلکه مجموعه‌ای است که آن را یک مجموعه فازی می‌نامیم. بنابراین یک مجموعه فازی Aمجموعه‌ای است که درجه عضویت اعضا آن می‌تواند در بازه $[۰, ۱]$اختیار شود. اگر تابع A را با $A(x)$ نشان دهیم، مشخص می‌شود که $A(x)$ تابعی است که به هر عضو X یک عدد از بازه $[۰, ۱]$ به عنوان درجه عضویت آن عنصر در مجموعه فازی A نسبت می‌دهد. نزدیکی مقدار $A(x)$ به عدد یک نشان دهنده تعلق بیشتر به مجموعه‌ی فازی A است و برعکس.

تعریف ۲.۱.۱. [۲۱] فرض کنید X یک مجموعه مرجع باشد و A یک زیرمجموعه‌ی فازی از آن باشد. بستار مجموعه نقاطی از X که برای آن نقاط $A(x) > ۰$، تکیه‌گاه A نامیده می‌شود و با $suppA$ نشان داده می‌شود.

۲-۱ اعداد فازی

تعریف ۱.۲.۱. [۲۶] مجموعه فازی u روی $\mathbb{R}$ را عدد فازی گوییم هرگاه:

(۱) u نرمال باشد،یعنی وجود دارد $s_۰ \in \mathbb{R}$ به طوری که $u(s_۰) = ۱$؛

(۲) u محدب فازی باشد، یعنی

$$u(ts + (1-t)r) \geq min\{u(s), u(r)\}$$

برای هر $t \in [0,1]$ و $s, r \in \mathbb{R}$؛

(۳) u نیمه پیوسته بالایی در $\mathbb{R}$ است، به این معنی که $u(x) \neq +\infty$ و $u(x) \geq \lim\limits_{t\to x} u(t)$؛

(۴) $cl\{s \in \mathbb{R}|u(s) > 0\}$ فشرده باشد که در آن cl بستار یک زیر مجموعه است.

در واقع α - برش‌ها مانند پلی، مجموعه های فازی و کلاسیک را به هم متصل می‌کنند. آن‌ها در روابط بین مجموعه های فازی و مجموعه های کلاسیک نقش اصلی را ایفا می‌کنند.

تعریف ۱.۲.۲. [؟] زیرمجموعه کلاسیک عناصری از X که درجه عضویت آن‌ها در مجموعه فازی A حداقل به بزرگی α $(\alpha > 0)$ است، α- برش A، نامیده می‌شود و با نماد A^α نمایش داده می‌شود. به عبارت دیگر،

$$A^\alpha = [A]^\alpha = A[\alpha] = \{x \in X|A(x) \geq \alpha\}.$$

A^α یک مجموعه کلاسیک است.

مجموعه اعداد فازی روی $\mathbb{R}$ را با $\mathbb{R}_F$ نمایش می‌دهیم. با توجه به تعریف، هر α-برش از یک عدد فازی u بازه ای بسته و کراندار است و با $u^\alpha = [\underline{u}^\alpha, \overline{u}^\alpha]$ نشان می‌دهیم و قطر آن از $diam[u]^\alpha = \overline{u}^\alpha - \underline{u}^\alpha$ به دست می‌آید.
$\overline{u}$ و $\underline{u}$ به ترتیب حدود بالایی و پایینی u هستند. می‌توانیم از نماد $u_{\alpha r}$ و $u_{\alpha l}$ به ترتیب به جای $\overline{u}$ و $\underline{u}$ استفاده کنیم.

فرض کنیم $0 < \alpha \leq 1$ تعریف می‌کنیم

$$[u]^\alpha = \{s \in \mathbb{R}|u(s) \geq \alpha\}$$

و

$$[u]^\circ = cl\{s \in \mathbb{R}|u(s) > 0\}.$$

لم زیر بعضی از خاصیت‌های $a^l(\alpha)$ و $a^r(\alpha)$ از یک عدد فازی $a \in \mathbb{R}_\mathbb{F}$ را نشان می‌دهد.

لم ۳.۲.۱. [۲۱] *اگر $a^l : [0,1] \to R$ و $a^r : [0,1] \to R$ در شرایط زیر صدق کنند:*

(۱) $a^l : [0,1] \to R$ یک تابع صعودی کراندار باشد.

(۲) $a^r : [0,1] \to R$ یک تابع نزولی کراندار باشد.

(۳) $a^l(1) \le a^r(1)$.

(۴) به ازای همه‌ی $0 < k \le 1$,

$$\lim_{\alpha \to k^-} a^l(\alpha) = a^l(k),$$
$$\lim_{\alpha \to k^-} a^r(\alpha) = a^r(k).$$

(۵)

$$\lim_{\alpha \to 0^+} a^l(\alpha) = a^l(0),$$
$$\lim_{\alpha \to 0^+} a^r(\alpha) = a^r(0).$$

پس $a : R \to [0,1]$ که به وسیله $a(x) = \sup\{\alpha : a^l(\alpha) \le x \le a^r(\alpha)\}$ مشخص می‌شود یک عدد فازی است. همچنین اگر $a : R \to [0,1]$ یک عدد فازی باشد که $(a[\alpha] = [a^l(\alpha), a^r(\alpha)])$، تابع‌های $a^l(\alpha)$ و $a^r(\alpha)$ در شرایط ۱ تا ۵ صدق می‌کنند.

۱-۳ حساب فازی

لم ۱.۳.۱. [۱] اگر u و v دو عدد فازی باشند آن گاه برای $\alpha \in [0,1]$ داریم

$$(u \oplus v)^\alpha = [\underline{u}^\alpha + \underline{v}^\alpha, \overline{u}^\alpha + \overline{v}^\alpha]$$

$$(u - v)^\alpha = [\underline{u}^\alpha - \overline{v}^\alpha, \overline{u}^\alpha - \underline{v}^\alpha]$$

$$(u \odot v)^\alpha = [min\{\underline{u}^\alpha \underline{v}^\alpha, \underline{u}^\alpha \overline{v}^\alpha, \overline{u}^\alpha \underline{v}^\alpha, \overline{u}^\alpha \overline{v}^\alpha\}, max\{\underline{u}^\alpha \underline{v}^\alpha, \underline{u}^\alpha \overline{v}^\alpha, \overline{u}^\alpha \underline{v}^\alpha, \overline{u}^\alpha \overline{v}^\alpha\}]$$

$$(u/v)^\alpha = [min\{\underline{u}^\alpha/\underline{v}^\alpha, \underline{u}^\alpha/\overline{v}^\alpha, \overline{u}^\alpha/\underline{v}^\alpha, \overline{u}^\alpha/\overline{v}^\alpha\}, max\{\underline{u}^\alpha/\underline{v}^\alpha, \underline{u}^\alpha/\overline{v}^\alpha, \overline{u}^\alpha/\underline{v}^\alpha, \overline{u}^\alpha/\overline{v}^\alpha\}], \underline{v}^\alpha.\overline{v}_\alpha \neq 0$$

اگر $u, v \in \mathbb{R}_F$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ می‌توانیم جمع $(u+v)$ وضرب λu را به صورت $[u+v]^\alpha = [u]^\alpha + [v]^\alpha$

و $[\lambda u]^\alpha = \lambda [u]^\alpha$ برای هر $\alpha \in [۰, ۱]$ تعریف کنیم.
ساختار متری $\mathbb{R}_F$ از متر هاسدورف به دست می‌آید که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$D : \mathbb{R}_F \times \mathbb{R}_F \to \mathbb{R}_+ \cup \{۰\}$$

$$D(u, v) = sup_{\alpha \in [۰,۱]} max\{|\underline{u}^\alpha - \underline{v}^\alpha|, |\overline{u}^\alpha - \overline{v}^\alpha|\}$$

$(\mathbb{R}_F, D)$ یک فضای متریک کامل است. [۲۶]

تعریف ۱.۳.۲. فرض کنیم $x, y \in \mathbb{R}_F$ اگر $z \in \mathbb{R}_F$ وجود داشته باشد به طوری که $x = y + z$ در این صورت z تفاضل هوکوهارای(H-تفاضل) x و y نامیده می‌شود و با $x \ominus y$ نمایش داده می‌شود.

در حالت کلی

$$x \ominus y \neq x + (-۱)y.$$

۱-۴ مشتق تابع فازی

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنید I یک بازه حقیقی و $\mathbb{R}_F$ مجموعه همه اعداد فازی باشد، یک تابع فازی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$f : I \to \mathbb{R}_F$$

$$f(t)[\alpha] = [\underline{f}^\alpha(t), \overline{f}^\alpha(t)], t \in I, ۰ < \alpha \leq ۱$$

که

$$\underline{f}^\alpha(t) = min\{f(t)\},$$

و

$$\overline{f}^\alpha(t) = max\{f(t)\}.$$

بنابراین هر تابع مقداری فازی f به ازای هر $\alpha \in [۰, ۱]$ به وسیله‌ی $\overline{f}^\alpha(t), \underline{f}^\alpha(t)$ مشخص می‌شود که به ترتیب تابع صعودی کراندار نسبت به α و تابع نزولی کراندار نسبت به α هستند. هم چنین به ازای هر $\alpha \in [۰, ۱]$ ، $\underline{f}^\alpha(t) \leq \overline{f}^\alpha(t)$ است.

تعریف ۱.۴.۲. [۲۱] تابع $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_F$ در نقطه ی $x \in S$ پیوسته است اگر به ازای هر $\alpha \in [۰, ۱]$ و $x \in S$ ، $\underline{f}^\alpha(t), \overline{f}^\alpha(t)$ تابع های پیوسته‌ای باشند.

تعریف ۱.۴.۳. [۱] فرض کنیم $f:(a,b)\to\mathbb{R}_{\mathbb{F}}$ گوییم f، H - مشتق پذیر روی $x_\circ\in(a,b)$ است اگر برای $h>\circ$ به اندازه کافی کوچک H - تفاضل‌های $f(x_\circ+h)\ominus f(x_\circ)$، $f(x_\circ)\ominus f(x_\circ-h)$ و عنصر $f'(x_\circ)\in F$ وجود داشته باشد به طوری‌که

$$\lim_{h\to\circ} D(\frac{f(x_\circ+h)\ominus f(x_\circ)}{h}, f'(x_\circ)) = \lim_{h\to\circ} D(\frac{f(x_\circ)\ominus f(x_\circ-h)}{h}, f'(x_\circ)) = \circ,$$

که h در مخرج، $\frac{۱}{h}\odot$ معنی می‌دهد.

تعریف ۱.۴.۴. [۱] فرض کنید $f:(a,b)\to\mathbb{R}_{\mathbb{F}}$ و $x_\circ\in(a,b)$ گوییم f مشتق‌پذیر تعمیم‌یافته قوی روی $x_\circ$ است، اگر یک عنصر $f'(x_\circ)\in\mathbb{R}_{\mathbb{F}}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

(۱) برای همه $h>\circ$ به اندازه کافی کوچک، $f(x_\circ+h)\ominus f(x_\circ)$ و $f(x_\circ)\ominus f(x_\circ-h)$ و حدهای

$$\lim_{h\to\circ}\frac{f(x_\circ+h)\ominus f(x_\circ)}{h} = \lim_{h\to\circ}\frac{f(x_\circ)\ominus f(x_\circ-h)}{h} = f'(x_\circ),$$

(در متر D) وجود داشته باشند؛

یا

(۲) برای همه $h>\circ$ به اندازه کافی کوچک، $f(x_\circ)\ominus f(x_\circ+h)$ و $f(x_\circ-h)\ominus f(x_\circ)$ و حدهای

$$\lim_{h\to\circ}\frac{f(x_\circ)\ominus f(x_\circ+h)}{-h} = \lim_{h\to\circ}\frac{f(x_\circ-h)\ominus f(x_\circ)}{-h} = f'(x_\circ),$$

(در متر D) وجود داشته باشند؛

یا

(۳) برای همه $h>\circ$ به اندازه کافی کوچک، $f(x_\circ+h)\ominus f(x_\circ)$ و $f(x_\circ-h)\ominus f(x_\circ)$ و حدهای

$$\lim_{h\to\circ}\frac{f(x_\circ+h)\ominus f(x_\circ)}{h} = \lim_{h\to\circ}\frac{f(x_\circ-h)\ominus f(x_\circ)}{-h} = f'(x_\circ),$$

(در متر D) وجود داشته باشند؛

یا

(۴) برای همه $h > \circ$ به اندازه کافی کوچک، $f(x_\circ) \ominus f(x_\circ - h)$ و $f(x_\circ) \ominus f(x_\circ + h)$ و حدهای

$$\lim_{h\to\circ} \frac{f(x_\circ) \ominus f(x_\circ + h)}{-h} = \lim_{h\to\circ} \frac{f(x_\circ) \ominus f(x_\circ - h)}{h} = f'(x_\circ),$$

(در متر D) وجود داشته باشند؛

(h و $-h$ در مخرجشان به ترتیب $\frac{۱}{h}\odot$ و $-\frac{۱}{h}\odot$ را معنی می‌دهند.)

ذکر این نکته لازم است که اگر برای f، $x_\circ$، حداقل دو تا از موارد (۴) $-$ (۱) همزمان برقرار باشند، در حقیقت تناقضی به دست نمی‌آوریم. به عنوان مثال فرض کنید که (۱) و (۳) برقرارند. پس $A,\ B,\ C$ وجود دارند که $f(x_\circ) = f(x_\circ - h) \oplus B$، $f(x_\circ + h) = f(x_\circ) \oplus A$، $f(x_\circ - h) = f(x_\circ) \oplus C$، بنابراین به دست می‌آوریم $f(x_\circ) = f(x_\circ) \oplus [B \oplus C]$، و به عبارت دیگر $B \oplus C = \circ$، که ایجاب می‌کند $B = C = \circ$، این مورد به ازای $f'(x_\circ) = \circ$، و یا $B, C \in R$، و $B = -C$، واین حالت برای $f'(x_\circ) \in \mathbb{R}$ است.

اینجا $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}_F$ به صورت $\mathbb{R} = \{\chi_{\{x\}} :$ عدد حقیقی معمولی است $x\}$ است.

توجه شود که در همه‌ی این موارد، همه حدها در تعریف ۴.۴.۱ مساوی هستند. حکم مشابه برای هر ترکیب دیگر از (۴) $-$ (۱) نتیجه می‌شود.

در اینجا ما فقط دو مورد اول در تعریف ۴.۴.۱ را در نظر می‌گیریم. در واقع دو مورد دیگر مشتق‌های بدیهی هستند یا به عبارت دیگر در این حالت ها $f' \in \mathbb{R}$ است.

تعریف ۵.۴.۱. در نظر بگیرید $f : I \to \mathbb{R}_F$، اگر f مشتق‌پذیر نوع (۱) در تعریف ۴.۴.۱ باشد آن‌گاه f را (۱) مشتق‌پذیر روی I گوییم و به طور مشابه اگر f مشتق‌پذیر نوع (۲) در تعریف ۴.۴.۱ باشد آن‌گاه f را (۲) مشتق‌پذیر روی I گوییم. و به طور مشابه اگر f مشتق‌پذیر نوع (۳) یا (۴) در تعریف ۴.۴.۱ باشد آن‌گاه f را (۳) مشتق‌پذیر یا (۴) مشتق‌پذیر روی I گوییم.

تعریف ۶.۴.۱. فرض کنیم $f : (a,b) \to \mathbb{R}_F$ باشد. نقطه $x \in (a,b)$ را نقطه سوییچ [۲] گوییم هرگاه مشتق پذیری تابع در این نقطه از حالت (۱) به (۲) یا برعکس تغییر کند. معمولا در مشتق

[۲] Swich point

تعمیم یافته قوی نقاط سوییچ وجود دارند.

گوییم f در شرط H_1 به ازای $x \in (a,b)$ صدق می‌کند اگر تفاضل‌های $f(x+h) \ominus f(x)$ و $f(x) \ominus f(x-h)$ برای h به اندازه کافی کوچک، موجود باشد.
گوییم f در شرط H_2 به ازای $x \in (a,b)$ صدق می‌کند اگر تفاضل‌های $f(x) \ominus f(x+h)$ و $f(x-h) \ominus f(x)$ برای h به اندازه کافی کوچک، موجود باشد.

۱-۵ انتگرال‌پذیری یک تابع فازی

تعریف ۱.۵.۱. [۲۱] تابع $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}_F$ را نسبت به x انتگرال پذیر گوییم هرگاه $\underline{f}^\alpha(x)$ و $\overline{f}^\alpha(x)$ برای همه $\alpha \in [0,1]$ و $x \in I$ انتگرال پذیر لبگ باشند و $[\int \underline{f}^\alpha(x)dx, \int \overline{f}^\alpha(x)dx]$ مجموعه‌ی α -برش های یک عدد فازی باشد.
انتگرال تابع فازی f را نسبت به x به صورت زیر نمایش می‌دهیم

$$\int f(x)[\alpha]dx = [\int \underline{f}^\alpha(x)dx, \int \overline{f}^\alpha(x)dx], \quad \forall \in [0,1].$$

با توجه به لم ۳.۲.۱ شرایط کافی که انتگرال f نسبت به x وجود داشته باشند عبارتند از:

(۱) $\underline{f}^\alpha(x)$ و $\overline{f}^\alpha(x)$ برای همه‌ی $\alpha \in [0,1]$ نسبت به x انتگرال پذیر لبگ باشند.

(۲) $\int \underline{f}^\alpha(x)dx$ نسبت به α یک تابع صعودی پیوسته باشد.

(۳) $\int \overline{f}^\alpha(x)dx$ نسبت به α یک تابع نزولی پیوسته باشد.

(۴) $\int \underline{f}^1(x)dx \leq \int \overline{f}^1(x)dx$.

۱-۶ معادلات دیفرانسیل فازی تحت مشتق تعمیم یافته

در صورتی که دو معادله دیفرانسیل معمولی ومعادل $y' = -y_0$ و $y' + y_0 = 0$ را فازی کنیم معادلات دیفرانسیل فازی متفاوتی حاصل می‌شود. به بیان دیگر مساله مقدار اولیه فازی

$$\begin{cases} y'(x) = a(x) \odot y(x) \oplus b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{۱.۱}$$

را در نظر بگیرید که $a : (x_\circ, \infty) \to \mathbb{R}$ و $y_\circ \in \mathbb{R}_\mathbb{F}$ و $b : (x_\circ, \infty) \to \mathbb{R}_\mathbb{F}$ است به طور کلی در حسابان فازی این مساله با دو مساله،

$$\begin{cases} y'(x) \oplus (-a(x)) \odot y(x) = b(x) \\ y(x_\circ) = y_\circ \end{cases} \tag{۲.۱}$$

و

$$\begin{cases} y'(x) \oplus (-b(t)) = a(x) \odot y(x) \\ y(x_\circ) = y_\circ \end{cases} \tag{۳.۱}$$

معادل نیست. هم چنین در حالت کلی مساله های (۱ .۲) و (۱ .۳) نیز معادل هم نیستند. در اینجا ممکن است این پرسش مطرح شود که کدامیک از معادلات (۱ .۱) - (۱ .۳) را باید به عنوان معادله دیفرانسیل خطی فازی متناظر در نظر گرفت؟ در حقیقت، معمولا یک سیستم دینامیکی غیر قطعی با فازی کردن معادلات دیفرانسیل سیستم حاصل می‌شود. بنابر این با توجه به این که چگونه سه معادله قطعی را بنویسیم و سپس چگونه آن‌ها را فازی کنیم سه نتیجه متفاوت به دست می‌آید که این یک تناقض با اصلی ترین نیاز یک مدل است یعنی رفتار جواب باید رفتار حقیقی را منعکس کند و نه اینکه یک فرم ویژه از یک معادله را ارایه دهد. بنابراین معادلات (۱ .۱) - (۱ .۳) مدل‌های فازی از معادلات دیفرانسیل معمولی معادل هستند و با توجه به رفتار حقیقی سیستم دینامیکی غیرقطعی یکی از جواب‌های این معادلات انتخاب می‌شود. بنابراین نظریه معادلات دیفرانسیل فازی بسیار غنی‌تر از معادلات دیفرانسیل معمولی است. مثال ۱ .۶ .۲ که در ادامه می‌آوریم نشان دهنده این مطلب است. قبل از بیان این مثال با بیان قضیه زیر، روش تغییر ثابت‌ها را برای معادلات دیفرانسیل فازی ارایه می‌کنیم.

قضیه ۱ .۶ .۱. [۱] فرض کنید

$$y_۱(x) = e^{\int_{x_\circ}^{x} a(t)dt}(y_\circ \oplus \int_{x_\circ}^{x} b(t) \odot e^{-\int_{x_\circ}^{t} a(u)du} dt) \tag{۴.۱}$$

و

$$y_۲(x) = e^{\int_{x_\circ}^{x} a(t)dt}(y_\circ \ominus \int_{x_\circ}^{x} (-b(t)) \odot e^{-\int_{x_\circ}^{t} a(u)du} dt) \tag{۵.۱}$$

به شرط این‌که H- تفاضل

$$y_\circ \ominus \int_{x_\circ}^{x} (-b(t)) \odot e^{-\int_{x_\circ}^{t} a(u)du} dt$$

موجود باشد، در این صورت:

(۱) *اگر برای $x \in (x_\circ, x_1)$، $a(x) > \circ$ باشد، y_1 ، (۱) مشتق‌پذیر است و یک جواب برای مساله (۱.۱) در بازه $(x_\circ, x_1)$ است.*

(۲) *اگر برای $x \in (x_\circ, x_1)$، $a(x) < \circ$ و H- تفاضل $y_\circ \ominus \int_{x_\circ}^{x} (-b(t)) \odot e^{-\int_{x_\circ}^{t} a(u)du} dt$ موجود باشد، آن‌گاه y_2، (۲) مشتق‌پذیر است و یک جواب برای مساله (۱.۱) در بازه $x \in (x_\circ, x_1)$ است.*

(۳) *اگر برای $x \in (x_\circ, x_1)$، $a(x) < \circ$ و y_1 به ترتیب در شرط H_1 یا H_2 صدق کند، آن‌گاه y_1 به ترتیب یک جواب برای مساله (۲.۱) و (۳.۱) است.*

(۴) *اگر برای $x \in (x_\circ, x_1)$، $a(x) > \circ$ و H- تفاضل $y_\circ \ominus \int_{x_\circ}^{x} (-b(t)) \odot e^{-\int_{x_\circ}^{t} a(u)du} dt$ موجود باشد و برای $x \in (x_\circ, x_1)$، y_2 به ترتیب در شرط H_1 یا H_2 صدق کند، آن‌گاه y_2 به ترتیب یک جواب برای مساله (۳.۱) یا (۲.۱) است.*

اثبات. مرجع [۱] را ملاحظه کنید. □

مثال ۲.۶.۱. مساله مقدار اولیه فازی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} y'(x) = (-1) \odot y(x) \oplus x \\ y(\circ) = (1, 2, 3) \end{cases} \qquad (6.1)$$

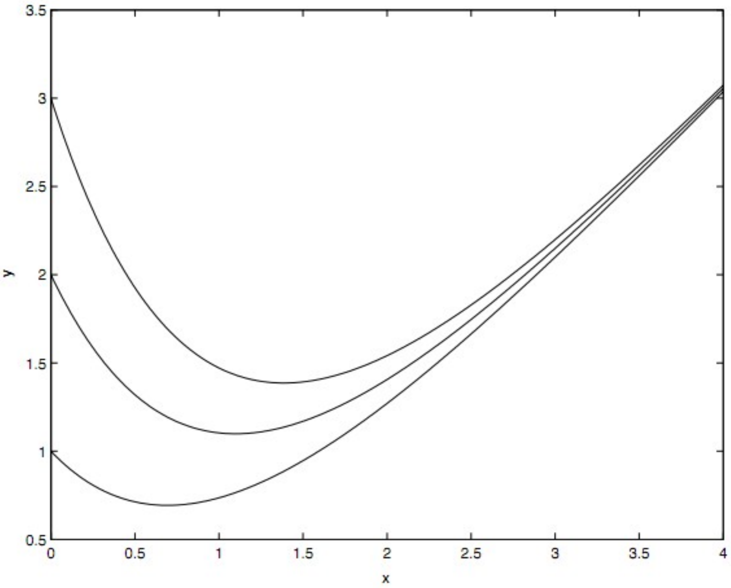
چون H تفاضل $y_\circ \ominus \int_{x_\circ}^{x} (-t).e^t dt$ برای هر $x \in (x_\circ, \infty)$ وجود دارد طبق قضیه ۱.۶.۱

$$y_2(x) = e^{-x}((1, 2, 3) \ominus \int_{\circ}^{x} (-t).e^t dt) = (x - 1).\tilde{1} + (2e^{-x}, 3e^{-x}, 4e^{-x})$$

که $\tilde{1} = \chi_{\{1\}}$. این جواب در شکل (۱-۱) نمایش داده شده است.
در این حالت $D(y_2(x), (x-1).\tilde{1}) \leq 4e^{-x}$ که نتیجه می‌دهد

$$\lim_{x \to \infty} D(y_2(x), (x-1).\tilde{1}) = \circ$$

رفتار سیستم به گونه ای است که به طور مجانبی، عدم قطعیت سیستم از بین می‌رود.



شکل ۱-۱: نمودار جواب مساله(۱.۶)

۱-۷ نگاشت انقباض و برخی خواص آن

تعریف ۱.۷.۱. [۲] فرض کنیم X یک فضای متریک کامل باشد. در این صورت نگاشت $\mathcal{A} : X \to X$ یک نگاشت انقباض است اگر ثابت c، $0 \leq c < 1$، وجود داشته باشد که برای هر $x, y \in X$

$$d(\mathcal{A}(x), \mathcal{A}(y)) \leq cd(x, y).$$

تعریف ۲.۷.۱. [۲] فرض کنیم X یک مجموعه باشد و نگاشت $f : X \to X$ تعریف شده باشد در این صورت اگر برای $x \in X$ داشته باشیم $f(x) = x$ آن گاه x را نقطه ثابت f گوییم.

قضیه ۳.۷.۱. (*قضیه نقطه ثابت باناخ*) *اگر (X, d) یک فضای متریک کامل غیر تهی باشد و $f : X \to X$ یک نگاشت انقباض باشد آن گاه f یک نقطه ثابت منحصر به فرد دارد.*

اثبات. مرجع [۲] را ببینید. □