دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ریاضی
گرایش جبر

حلقه هایی که روی آنها کلاس مدولهای یکدست گرنشتاین تحت توسیع ها بسته است

استاد راهنما :
دکتر فیروزه جهانشاهی

دانشجو :
وجیهه شریفی داورانی

اسفند ۱۳۸۸

[اُ ِ] [اُ ِ] [اُ ِ] [اُ ِ] [اُ ِ]

بسمه تعالی

چکیده

حلقه R ، $GF-$بسته چپ نامیده می شود اگرکلاس همه$R-$ مدولهای چپ یکدست گرنشتاین تحت توسیع ها بسته باشد. کلاس حلقه های $GF-$بسته چپ اکیداً شامل حلقه های منسجم راست وحلقه های ازبعدضعیف متناهی است . دراین پایان نامه به بررسی بعد یکدست گرنشتاین روی حلقه های $GF-$بسته چپ پرداخته واین حقیقت ،که کلاس $R-$مدولهای چپ یکدست گرنشتاین روی حلقه های منسجم راست به طورتصویری حل پذیراست ، به حلقه های $GF-$بسته چپ تعمیم داده وهمچنین خواص $R-$مدولهای چپ یکدست گرنشتاین روی حلقه های منسجم راست را به گونه‌ای تقریباً مشابه روی حلقه های $GF-$بسته چپ بیان می کنیم .

پیش گفتار

درجبر همولوژی پایه ، بعد یکدست ، تزریقی وتصویری مدولهانقشی مهم و بنیادی را ایفا می کند . اسلاندر[1]اولین کسی بودکه درسال ۱۹۶۶ به معرفی ومطالعهٔ یک کلاس مهم ازمدولهای متناهی مولد روی حلقه های نوتری بانام G−کلاس $(G-class)$ پرداخت.

مدولهای G−کلاس خواص مشترک زیادی با مدولهای تصویری متناهی دارند . به همین دلیل بعد ها قرار شد کهاین مدولها را مدولهای G−تصویری (تصویری گرنشتاین) بنامند .

امانکته مهم ، تعریف مدولهای تصویری گرنشتاین غیرمتناهی بود. درسال ۱۹۹۰ ،ایناکس[2] وجندا[3] مدولهای تصویری گرنشتاین غیرمتناهی را روی حلقه های دلخواه تعریف کردندودوگان این تعریف رامدولهای تزریقی گرنشتاین نام نهادند.

مدولهای یکدست گرنشتاین روی حلقه های گرنشتاین ، توسط ایناکس وجندا وتورسیلاز[4]در [۵] به عنوان تعمیمی از مدولهای یکدست معرفی ومطالعه شده اند .(درواقع یک R−مدول یکدست است اگروتنهااگر یکدست گرنشتاین از بعد یکدست متناهی باشد) . در [۳] چن[5] ودینگ[6] توصیفهای شناخته شدهٔ مدولهای یکدست گرنشتاین (وبنابراین بعدمدولهای یکدست گرنشتاین) روی حلقه های گرنشتاین را به حلقه های $n-FC$ (حلقه های منسجم

[1] Auslander

[2] Enochs

[3] Jenda

[4] Torrecillas

[5] Chen

[6] Ding

بابعدخود $FP-$تزریقی متناهی) تعمیم دادند. در [٦] هولم [7] ازمدولهای مشخص روی حلقه های منسجم برای انتقال نتایج مدولهای تزریقی گرنشتاین به مدولهای یکدست گرنشتاین استفاده کرد . بنابراین مطالعه بعدهای یکدست گرنشتاین رابه حلقه های منسجم تعمیم داده است .

دراین پایان نامه ، ما به بررسی مدولهای (بعدهای)یکدست گرنشتاین روی یک کلاس جدید ازحلقه هابانام حلقه های $GF-$بسته چپ پرداخته و ثابت می کنیم کلاس مدولهای یکدست گرنشتاین روی این حلقه ها بطور تصویری حل پذیر است .عمده مطالب این پایان نامه ، از[١] انتخاب شده که توسط بنیس [8] درسال ٢٠٠٨ ارائه شده است .

درفصل اول ، به بیان تعاریف وقضایایی می پردازیم که درپیشبرد اهداف این پایان نامه مؤ ثر می با شند . دراین فصل به جزسه لم درمورد مدولهای جلوبرنده و عقب کشنده ، که به دلیل اهمیت ، بااثبات آورده شده اند; مابقی قضایاازکتابهای معروف همولوژی انتخاب شده اند . بنابراین ازآوردن اثبات این قضایا خودداری شده است . فصل دوم به دلیل مهم بودن قضایا به سه بخش تقسیم شده است .دربخش اول ، عمدهٔ مطالب مربوط به حلقه های $GF-$بسته چپ است . بخش دوم به توصیف مدولهای یکدست گرنشتاین روی حلقه های $GF-$بسته چپ می پردازیم . دربخش سوم ، به اثبات تشابه جالب مدولهای تصویری گرنشتاین ومدولهای یکدست گرنشتاین پرداخته و سپس بااستفاده ازاین مطلب ، برهانی جدید برای قضیه ٢.٥ از [٦] ارائه می دهیم، که درنوع خود جالب وشگفت انگیز است .در فصل سوم ، مهمترین فصل این پایان نامه به بررسی بعدیکدست گرنشتاین روی حلقه های $GF-$بسته چپ خواهیم پرداخت .قضایای این فصل عمدتاً تعمیمی ازقضایای مشابه در [٦] هستند.دراین

[7] Holm

[8] Bennis

فصل به بیان مهمترین قضیه این پایان نامه ، یعنی قضیه۴.۱.۳ ،خواهیم پرداخت ،که قبلاً توسط ایناکس وجندا ، روی حلقه های گرنشتاین بیان شده است .درپایان ، این فصل رابابررسی رفتاربعدیکدست گرنشتاین دریک دنباله دقیق کوتاه به پایان می رسانیم .

فهرست مندرجات

فصل ۱

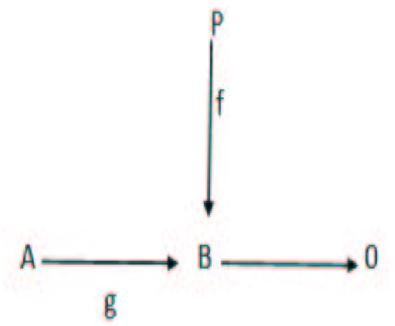
مقدمه‌ای برهمولوژی جبری

در این فصل می‌کوشیم مقدماتی را که در این پایان‌نامه به آن‌ها نیاز داریم، بیان نماییم. بخش اول به تعاریف وقضایای پیش نیاز اختصاص دارد. دربخش دوم به تعریف مدولهای جلوبرنده ومدولهای عقب کشنده پرداخته وبه اثبات لمهایی درموردآنها می پردازیم که درفصلهای آتی به آنهانیازپیداخواهیم کرد.

۱.۱ پیش‌نیازها

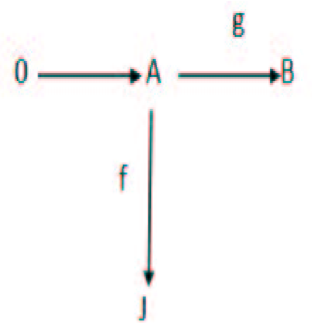
در این بخش به معرفی نمادها و بیان تعاریف و قضایایی می‌پردازیم، که در ادامه به آن‌ها نیاز داریم. منظورازR یک حلقه‌یکدار وM به عنوان نمادیک $R-$ مدول چپ (راست) درنظرگرفته می شود.

تعریف ۱.۱.۱ : گوییم مدول P روی حلقه R تصویری است ،اگربه ازای هرنمودار



ازهمریختیهای $R-$مدولی که درآن g بروریختی باشد،یک همریختی$R-$مدولی مانند$h : P \longrightarrow A$ وجودداشته باشدبه طوریکه نمودارفوق تعویضپذیرباشدیعنی $gh = f$.کلاس همهٔ $R-$مدولهای تصویری رابا$P(R)$ نمایش می دهیم .

تعریف ۲.۱.۱ : گوییم مدول J روی حلقه R تزریقی است ،اگربه ازای هرنمودار



ازهمریختیهای R−مدولی که درآن g تکریختی باشد،یک همریختیR−مدولی مانند $h : B \longrightarrow J$ وجودداشته باشدبه طوریکه نمودارفوق تعویضپذیرباشدیعنی $hg = f$.

تعریف ۳.۱.۱ : گوییم R−مدول B یکدست است اگروفقط اگر نگاشت $1_B \otimes_R f$ برای تکریختی $f : M \longrightarrow N$ ازR−مدولها ،یک به یک باشد.

درادامه به ذکرقضایایی می پردازیم که درفصلهای بعدی به آنهانیازخواهیم داشت .

قضیه ۴.۱.۱ [۸, ۳.۴۵]: فرض کنید $\{B_k : k \in K\}$ یک خانواده ازR−مدولها باشد.آنگاه $\oplus_{k\in K} B_k$ یکدست است اگروفقط اگر هر B_k یکدست باشد.

قضیه ۵.۱.۱ [۸, ۳.۱۸] : هرجمعوند مستقیم D ازیک مدول تزریقی E ،تزریقی است .

قضیه ۶.۱.۱ [۸, ۳.۵۲] : R –مدول راست B یکدست است اگروفقط اگر $B^* =$ $Hom_Z(B, \frac{Q}{Z})$ یک R –مدول چپ تزریقی باشد.

قضیه ۷.۱.۱ [۸, ۳.۵۱] : یک دنباله از R –مدولهای راست به شکل

$$\circ \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow \circ$$

دقیق است اگروفقط اگردنباله

$$\circ \longrightarrow C^* \xrightarrow{\beta^*} B^* \xrightarrow{\alpha^*} A^* \longrightarrow \circ$$

دقیق باشد ، بطوریکه

$$A^* = Hom_Z(A, \frac{Q}{Z}) \quad , B^* = Hom_Z(B, \frac{Q}{Z}) \qquad , C^* = Hom_Z(C, \frac{Q}{Z})$$

تعریف ۸.۱.۱ : منظورازهمبافت A ،دنباله ای ازمدولهاوهمریختی هابه صورت زیراست، به طوریکه درآن برای هر $n \in Z$ ، $d_n d_{n+۱} = \circ$.

$$A = \ldots \longrightarrow A_{n+۱} \xrightarrow{d_{n+۱}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-۱} \longrightarrow \ldots$$

همبافت A رابه صورت (A, d) نیزنشان می دهند.

تعریف ۹.۱.۱ :یک رزولوشن از R –مدولهای چپ (راست)، دنباله ای دقیق به صورت زیراست ،به طوریکه درآن برای هر $i \in Z$ ، M_i یک R –مدول چپ (راست)باشد.

$$\ldots \longrightarrow M_{-۲} \longrightarrow M_{-۱} \longrightarrow M_\circ \longrightarrow M_۱ \longrightarrow M_۲ \longrightarrow \ldots$$

تعریف ۱۰.۱.۱ : فرض کنید B یک R –مدول چپ باشد.یک رزولوشن تصویری از B ،دنباله‌ای دقیق از R –مدولها به شکل زیراست که درآن هر P_i تصویری است .

$$p : \ldots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} \ldots \longrightarrow P_۱ \xrightarrow{d_۱} P_\circ \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow \circ \qquad .$$

تعریف ۱۱.۱.۱ : فرض کنید C یک $R-$مدول چپ باشد .یک رزولوشن تزریقی ازC ،دنباله‌ای دقیق ازR —مدولها به شکل زیراست که درآن هر E_i تزریقی است .

$$e : 0 \longrightarrow C \xrightarrow{i} E_0 \xrightarrow{d_1} E_1 \xrightarrow{d_2} E_2 \longrightarrow \dots \qquad .$$

تعریف ۱۲.۱.۱ : فرض کنیدM یک $R-$مدول چپ باشد .یک رزولوشن یکدست از M ،دنباله‌ای دقیق ازR —مدولها به شکل زیراست که درآن هر F_i یکدست است .

$$f : \dots \longrightarrow F_n \xrightarrow{d_n} \dots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0 \qquad .$$

تعریف ۱۳.۱.۱ : فرض کنید(A,d) یک همبافت باشد.

منظوراز $n-$امین همولوژی ازA، $\frac{Kerd_n}{Imd_{n+1}}$ است ،که بانماد$H_n(A)$ مشخص می شود.

تعریف ۱۴.۱.۱ : فرض کنیدC,B دو$R-$مدول باشند.منظوراز$Ext^n(B,C)$ ، $n-$ امین همولوژی ازدنباله $Hom(p,C)$ است که درآن p یک رزولوشن تصویری ازB باشد و$Hom(B,C)$ ازدنباله حذف شده باشد. یعنی

$$Ext^n(B,C) = \frac{Kerd'_{n+1}}{Imd'_n} \qquad .$$

که درآن $d'_i : Hom(P_{i-1},C) \longrightarrow Hom(P_i,C)$ تعریف می شود .

به طورمشابه $Ext^n(B,C)$ به صورت $n-$ امین همولوژی ازدنباله $Hom(B,e)$ تعریف می شود که درآن e یک رزولوشن تزریقی ازC باشدو$Hom(B,C)$ ازدنباله حذف شده باشد.

تعریف ۱۵.۱.۱ : فرض کنیدB,A دو$R-$مدول باشند.منظوراز$Tor_n(A,B)$ ، $n-$ امین همولوژی ازدنباله $A \otimes_R p$ است که درآن p یک رزولوشن تصویری ازB باشد و$A \otimes B$ ازدنباله حذف شده باشد.یعنی

$$Tor_n(A,B) = \frac{Ker(A\otimes d_n)}{Im(A\otimes d_{n+1})} \qquad .$$

که در آن $A \otimes d_i : A \otimes P_i \longrightarrow A \otimes P_{i-1}$ تعریف می شود .

به طورمشابه $Tor_n(A,B)$ به صورت $n-$ امین همولوژی ازدنباله $f \otimes_R B$ تعریف می شود که در آن f یک رزولوشن یکدست از A باشدو $A \otimes B$ ازدنباله حذف شده باشد.

قضیه ۱۶.۱.۱ [۷,۳.۴] : فرض کنید $0 \longrightarrow A'' \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow 0$ یک دنباله دقیق کوتاه از$R-$مدولهای راست باشد. آنگاه برای هرR $-$مدول چپ B،دنبالهٔ دقیق طولانی زیروجوددارد:

$$\ldots \longrightarrow Tor_1(A,B) \longrightarrow Tor_1(A',B) \longrightarrow Tor_1(A'',B) \longrightarrow A \otimes B \longrightarrow A' \otimes B \longrightarrow A'' \otimes B \longrightarrow 0$$

قضیه ۱۷.۱.۱ [۷,۳.۴] : فرض کنید $0 \longrightarrow C'' \longrightarrow C' \longrightarrow C \longrightarrow 0$ یک دنباله دقیق کوتاه از$R-$مدولهای چپ باشد. آنگاه برای هرR $-$مدول چپ B،دنبالهٔ دقیق طولانی زیروجوددارد:

$$0 \longrightarrow Hom(B,C) \longrightarrow Hom(B,C') \longrightarrow Hom(B,C'') \longrightarrow Ext^1(B,C) \longrightarrow Ext^1(B,C') \longrightarrow Ext^1(B,C'') \longrightarrow \ldots$$

قضیه ۱۸.۱.۱ [۷,۳.۱۳]: فرض کنید $0 \longrightarrow B'' \longrightarrow B' \longrightarrow B \longrightarrow 0$ یک دنباله دقیق کوتاه از$R-$مدولهای چپ باشد. آنگاه برای هرR $-$مدول چپ C،دنبالهٔ دقیق طولانی زیروجوددارد:

$$0 \longrightarrow Hom(B'',C) \longrightarrow Hom(B',C) \longrightarrow Hom(B,C) \longrightarrow Ext^1(B'',C) \longrightarrow Ext^1(B',C) \longrightarrow Ext^1(B,C) \longrightarrow \ldots$$

قضیه ۱۹.۱.۱ [۷,۳.۱۷]: فرض کنید $\circ \longrightarrow B \longrightarrow B' \longrightarrow B'' \longrightarrow \circ$ یک دنباله دقیق کوتاه‌باشد. آنگاه برای هر R –مدول A،دنبالهٔ دقیق طولانی زیروجوددارد:

$$\ldots \longrightarrow Tor_1(A,B) \longrightarrow Tor_1(A,B') \longrightarrow Tor_1(A,B'') \longrightarrow A\otimes B \longrightarrow A\otimes B' \longrightarrow A\otimes B'' \longrightarrow \circ$$

تعریف ۲۰.۱.۱ : فرض کنید R یک حلقه باشد .وارون (معکوس)حلقه R که باR^{op} نشان داده می شود،حلقهR است که درآن عمل ضرب معکوس شده باشد.یعنی برای هر $a,b\in R^{op}$ داشته باشیم: $a.b=ba$.

قضیه ۲۱.۱.۱ [۸,۸.۵]: برای $n\geq \circ$ ومدولهای A,B

$$Tor_n^R(A,B)\cong Tor_n^{R^{op}}(B,A)$$

قضیه ۲۲.۱.۱ [۲,۵.۱]: مدولهای C,B,A رابه صورت $(A_\Lambda, {}_\Lambda B_\Gamma, C_\Gamma)$ درنظر بگیرید . اگر C ،Γ–تزریقی باشد،آنگاه نگاشت ρ به صورت

$$\rho: Ext_\Lambda(A, Hom_\Gamma(B,C)) \longrightarrow Hom_\Gamma(Tor^\Lambda(A,B),C)$$

یکریختی است .

تعریف ۲۳.۱.۱ : دنباله دقیق کوتاه

$$\circ \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C \longrightarrow \circ$$

شکافتنی است اگرنگاشت $j: C\longrightarrow B$ وجودداشته باشدکه $\pi j = 1_C$.

قضیه ۲۴.۱.۱ [۸, ۷.۱۱]: اگر $Ext^{1}(C,A)=0$ آنگاه دنباله دقیق کوتاه

$$0\longrightarrow A\longrightarrow B\longrightarrow C\longrightarrow 0$$

شکافته خواهدشد.

قضیه ۲۵.۱.۱ [۷, ۳.۸]: اگر B یک $R-$مدول چپ باشد آنگاه :

B تصویری است اگروفقط اگر $Ext^{n}(B,C)=0$ برای همه $R-$مدولهای چپ C و $n\geq 1$.

قضیه ۲۶.۱.۱ [۷, ۳.۱۵]: اگر C یک $R-$مدول چپ باشد آنگاه :

C تزریقی است اگروفقط اگر $Ext^{n}(B,C)=0$ برای همه $R-$مدولهای چپ B و $n\geq 1$.

قضیه ۲۷.۱.۱ : ۱)اگر A یک $R-$مدول راست باشد آنگاه :

A یکدست است اگروفقط اگر $Tor_{n}(A,B)=0$ برای همه $R-$مدولهای چپ B و $n\geq 1$.

۲)اگر B یک $R-$مدول چپ باشد آنگاه :

B یکدست است اگروفقط اگر $Tor_{n}(A,B)=0$ برای همه $R-$مدولهای راست A و $n\geq 1$.

اثبات : ۱)به نتیجه ۳.۱۸ ازمرجع[۷] رجوع شود.

۲)به نتیجه ۳.۱۹ ازمرجع[۷] رجوع شود.

تعریف ۲۸.۱.۱ : فرض کنیدA یک $R-$مدول چپ باشد. گوییم A بعدتصویری حداکثرn رادارد‌ومی نویسیم $pd(A)\leq n$ اگردنباله ای دقیق به صورت زیر موجودباشدکه درآن هرP_i تصویری است .

$$0\longrightarrow P_n\longrightarrow P_{n-1}\longrightarrow\ldots\longrightarrow P_1\longrightarrow P_0\longrightarrow A\longrightarrow 0 \qquad .$$

اگرچنین دنباله ای درحالت متناهی وجودنداشته باشد، گوییم $pd(A)=\infty$.درصورتی که اگرn کوچکترین عددصحیح بااین شرط باشد، گوییم $pd(A)=n$.

مثال ۲۹.۱.۱ به وضوح باانتخاب دنباله $0 \longrightarrow P \longrightarrow P \longrightarrow 0$ ، P تصویری است اگروفقط اگر $pd(P) = 0$.

تعریف ۳۰.۱.۱ : فرض کنید B یک R−مدول چپ باشد. گوییم B بعد تزریقی حداکثر n رادار دومی نویسیم $id(B) \leq n$ اگردنباله ای دقیق به صورت زیر موجودباشدکه درآن هر E^i تزریقی است .

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow E^n \longrightarrow 0 \qquad .$$

اگرچنین دنباله ای درحالت متناهی وجودنداشته باشد،می گوییم $id(B) = \infty$. درصورتی که اگر n کوچکترین عددصحیح بااین شرط باشد، گوییم $id(B) = n$.

مثال ۳۱.۱.۱ : به وضوح ، E تزریقی است اگروفقط اگر $id(E) = 0$.

تعریف ۳۲.۱.۱ : فرض کنید A یک R−مدول راست باشد . گوییم A بعدیکدست حداکثر n رادار دومی نویسیم $fd(A) \leq n$ اگردنباله ای دقیق به صورت زیر موجودباشدکه درآن هر F_i یکدست است .

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0 \qquad .$$

اگرچنین دنباله ای درحالت متناهی وجودنداشته باشد، گوییم $fd(A) = \infty$. درصورتی که اگر n کوچکترین عددصحیح بااین شرط باشد، گوییم $fd(A) = n$.

مثال ۳۳.۱.۱ : به وضوح ، A یکدست است اگروفقط اگر $fd(A) = 0$.

تعریف ۳۴.۱.۱ : اگر A یک R−مدول باشد آنگاه :

$$fd(A) = inf\{n \geq 0 \mid Tor_{n+1}(-, A) \equiv 0\}. \qquad .$$

تعریف ۳۵.۱.۱ : فرض کنید R یک حلقه باشد.بعدضعیف حلقه R را با$Wdim(R)$ نمایش داده وبه صورت زیرتعریف می کنیم .

$$Wdim(R) = sup\{fd(M) \mid M \text{ یک } R-\text{مدول باشد}\}$$

قضیه ۳۶.۱.۱ [۷, ۴.۲]: فرض کنید

$$\circ \longrightarrow D \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow L_n \longrightarrow D' \longrightarrow \circ$$

یک دنباله دقیق ازR−مدولهای چپ باشدو $d \geq \circ$

۱.اگر $pd(L_j) \leq d$ ، برای هر $1 \leq j \leq n$ ، آنگاه $Ext^k(D,C) \cong Ext^{k+n}(D',C)$ برای همه R−مدولهای چپ C و $k > d$.

۲.اگر $id(L_j) \leq d$ ، برای هر $1 \leq j \leq n$ ، آنگاه $Ext^k(B,D') \cong Ext^{k+n}(B,D)$ برای همه R−مدولهای چپ B و $k > d$.

۳. اگر $fd(L_j) \leq d$ ، برای هر $1 \leq j \leq n$ ، آنگاه $Tor_k(A,D) \cong Tor_{k+n}(A,D')$ برای همه R−مدولهای راست A و $k > d$.

۲.۱ مدولهای جلوبرنده وعقب کشنده

دراین بخش پس ازتعریف مدولهای جلوبرنده وعقب کشنده ،به اثبات لم هایی درمورد آنهامی پردازیم که درمطالب بعدی بسیارکاربردخواهندداشت .

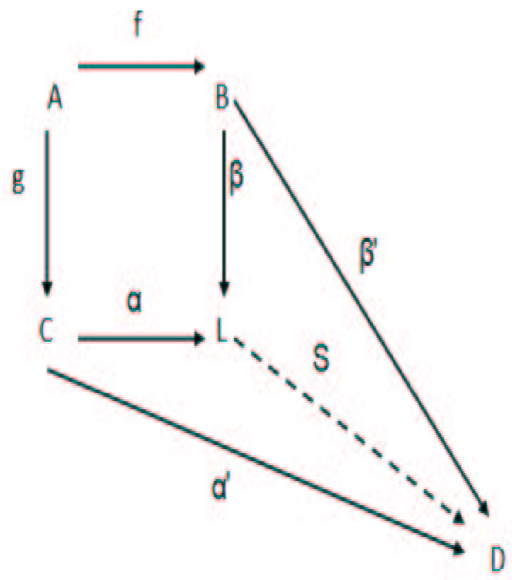
تعریف ۱.۲.۱ : فرض کنید مدولهای C, B, A ونگاشتهای $f : A \longrightarrow B$ و $g : A \longrightarrow C$ داده شده باشند.دراینصورت منظوراز مدول جلوبرنده[1] ،مدول L است همراه با نگاشتهای α, β

[1] pushout

به طوریکه نمودارزیرجابه جاشود.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ C \arrow[r, "\alpha"'] & L \end{tikzcd}$$

وهرگاه نگاشتهای دیگر α', β' به صورت زیرموجودباشندکه نمودارراجابه جا کنند،آنگاه نگاشت منحصر به فردδ به صورت زیرموجودباشدکه نمودارزیر را جابه جاکند:



منظوراز نمودارجلوبرنده ،نموداریست که درآن مدول جلوبرنده وجودداشته باشد.

تعریف ۲.۲.۱ : فرض کنید مدولهای C, B, A ونگاشتهای $f : B \longrightarrow A$ و $g : C \longrightarrow A$ داده شده باشند.دراینصورت منظوراز مدول عقب کشنده[۲] ،مدول L است همراه بانگاشتهای α, β به طوریکه نمودارزیرجابه جاشود.

[۲] pullback