بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه شیخ‌بهائی

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی

یک روش عملیاتی موجک برای حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی کسری

پژوهشگر

منیر عباس‌زاده ماتک

استاد راهنما

دکتر علی داوری دولت آبادی

مهر ۱۳۹۰

تقدیر و تشکر

سرآغاز به رسم بندگی، خالق بی‌منتها، مبدا حیات، مقصد صراط را سپاس و ستایش می‌نمایم که مرا در سایه رحمت بی‌کران خود "انسان" اشرف مخلوقات آفرید.

سپس کمال قدردانی و سپاسگزاری را از پدر و مادر عزیزم دارم که آموزگاران صبر و شکیبایی‌ام بوده و موفقیت‌هایم را مدیون زحمات ایشان، هستم.

همچنین مراتب تقدیر و تشکر را از استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر رضا اولیایی به‌جای می‌آورم که زمینه‌های علمی مناسبی رابرایم فراهم نمودند تا در این مقطع ادامه تحصیل دهم و موفقیت‌های امروزم را مرهون تلاش‌های دیروز ایشان می‌دانم.

همچنین از استاد راهنمایم جناب آقای دکتر علی داوری نیز بخاطر زحماتی که کشیدند، تشکر می‌نمایم.

همچنین از اساتید محترم آقایان دکتر علی دانایی و دکتر مهدی تاتاری که زحمت داوری این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند، ممنون و سپاسگزارم.

در نهایت از همه اساتید و دوستانی که در این دوره از تحصیل یاری‌ام دادند، تشکر می‌نمایم.

تقدیم به

همه باورم، همه یاورم و همه خاطرم

پدر و مادر عزیزم

که در سایه لطف پروردگار، هرچه دارم،

از آنهاست.

چکیده

حساب کسری، گسترشی از مشتق و انتگرال مرتبه صحیح است. معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی که شامل عملگرهای حساب کسری باشد، کاربردهای زیادی در علوم و مهندسی دارند. اما تعداد محدودی راه حل تحلیلی برای این معادلات وجود دارد و روشهای عددی حل این معادلات نیز بسیار پیچیده و دشوار است. در این پایان‌نامه روش ساختن ماتریس عملیاتی موجک هار به کمک ماتریس عملیاتی توابع بلوک پالس از طریق ماتریس عملیاتی انتگرال مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس با استفاده از ماتریس عملیاتی موجک هار روشی عددی برای حل معادلات دیفرانسیل و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی که مرتبه کسری دارند، ارایه می‌شود. در این روش با استفاده از ماتریس عملیاتی موجک هار، معادلات دیفرانسیل را به معادلات جبری و یا معادله‌ای از نوع لیاپونوف تبدیل می‌کنیم که نه تنها به راحتی حل می‌شوند بلکه جوابی که از این طریق به‌دست می‌آید به جواب دقیق مساله بسیار نزدیک است.

کلید واژه‌ها:

۱. ماتریس عملیاتی (Operational matrix)

۲. معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی کسری (Fractional partial differential equations)

۳. موجک‌های هار (Haar wavelets)

٤. معادله لیاپانوف (Lyapunov equation)

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

فصل۳ : حساب کسری

فصل٤ : سری فوریه و تبدیل فوریه

فصل٥ : مقدماتی درباره موجک

فصل٦ : بسط توابع و ماتریس‌های عملیاتی

فصل۷ : حل عددی معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری به کمک ماتریس عملیاتی موجک هار

فهرست شکل‌ها

عنوان	صفحه

فهرست جدول‌ها

پیش‌گفتار

حساب کسری، در سالهای اخیر زمینه مطالعات بسیاری از ریاضیدانان قرار گرفته است. مشتق و انتگرال مرتبه کسری کاربردهای فراوانی در فیزیک و مکانیک، از جمله فیزیک پلاسما، مکانیک کوانتومی و دینامیک آشفتگی پیدا کرده‌اند. همچنین معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی که شامل عملگرهای کسری باشند، کاربردهای زیادی در علوم مهندسی دارند. با این‌حال روشهای تحلیلی که برای حل این معادلات وجود دارند اغلب پیچیده و دشوار هستند. الگوریتم‌های محدودی نیز برای حل عددی این معادلات پیشنهاد شده‌اند. پدلوبنی از روش تبدیل لاپلاس، با استفاده از فرمول ریمان- لیوویل برای حل معادلات دیفرانسیل با مرتبه کسری و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی مرتبه کسری که ضرایب ثابتی دارند، استفاده نموده است [۳٦]. مرشرت و تادجران به کمک روش تفاضلات متناهی راه حلی برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات مرتبه کسری ارایه نموده‌اند [۲۸]. جوماریه نیز به کمک سریهای تیلور کسری و تعریف ریمان- لیوویل نتایجی را به‌دست آورد [۱۹, ۲۰]. بیومرا از عملگر ترتیبی برای حل معادلاتی که مشتقات آنها مرتبه کسری دارند، استفاده نموده است [۷]. با این‌حال روشهای فوق اغلب تقریبی از دو تعریف مشتقات جزیی گرونوالد - لتنیکوف و ریمان - لیوویل هستند[۳۵, ۳٦]. این روشها پیچیده‌اند و برای حل معادلات باید زمان زیادی صرف شود. امروزه مطالعات زیادی برای گسترش روشهای جبری انجام می‌پذیرد که معادلات با مشتقات مرتبه کسری را مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهد، تا الگوریتم‌های مناسبی برای حل آنها ارایه

گردد. بیشتر این تلاشها بر پایه چندجمله‌ایها و توابع متعامد بنا شده‌اند. این روشهای عملیاتی براساس توابع والش [۱۱]، توابع بلوک پالس [۱٤]، چندجمله‌ایهای لاگر [۷]، چندجمله‌ایهای لژاندر [٤۳]، چندجمله‌ایهای چبیشف [۳۲]، سری تیلور [۳۰]، سری فوریه [۳۳]، و موجک هار [۱۲] انجام شده است. موجک‌ها در ادامه تحقیقات فوریه مربوط به سیگنالها که به طور همزمان قادر به نگهداری اطلاعات مربوط به زمان و فرکانس نبودند وارد عرصه علم شدند. موجک‌ها دارای انواع متعددی از جمله هار، لژاندر، چبیشف، هرمیت و ... هستند. موجک هار اولین وساده‌ترین آنها است.

مشخصه اصلی روشهای عملیاتی، ایجاد ماتریس عملیاتی برای تبدیل معادلات دیفرانسیل با مشتقات مرتبه کسری به یک معادله جبری یا معادلاتی از نوع لیاپانوف است. برای ساختن این ماتریس‌های عملیاتی از ماتریس عملیاتی توابع بلوک پالس استفاده می‌گردد.

این پایان‌نامه در ۷ فصل تنظیم شده است. در فصل ۱ به بیان تعاریف و قضایای مورد نیاز پرداخته می‌شود. در فصل ۲ مطالبی در مورد توابع گاما ؛ بلوک پالس و تبدیل لاپلاس بیان می‌شود. در فصل ۳ به حساب کسری و در فصول ٤ و ٥ به سری فوریه و موجک پرداخته می‌شود. در فصل ٦ ماتریس‌های عملیاتی بیان می‌شوند. فصل ۷ نیز مثالهایی از حل عددی معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری به کمک ماتریس عملیاتی موجک هار را در بر می‌گیرد.

فصل ۱

تعاریف و قضایای اولیه

در این فصل تعاریف و قضایایی بیان شده است که در فصول بعد مورد نیاز است.

۱– ۱ فضای برداری

تعریف ۱– ۱– ۱ یک فضای برداری متشکل است از:

۱) یک میدان F از اسکالرها؛

۲) یک مجموعه V از اشیایی به نام بردار؛

۳) یک عمل به نام جمع برداری که به هر جفت بردار v_1 و v_2 از V بردار v_1+v_2 (حاصل جمع v_1 و v_2)

در V را وابسته می‌سازد، با این شرط که:

الف) خاصیت جابجایی $v_1+v_2=v_2+v_1$

ب) خاصیت شرکت‌پذیری $(v_1+v_2)+v_3=v_1+(v_2+v_3)$

پ) بردار یکتای صفر در V موجود است که به ازای هر v در V، $v+0=v$

ت) به ازای هر بردار v در V بردار یکتای $-v$ در V موجود است که $v+(-v)=0$

٤) یک عمل به نام ضرب اسکالر که برای هر بردار v از V و هر اسکالر c از F، بردار cv (حاصل ضرب c و v) در V را وابسته می‌سازد، با این شرط که:

الف) به ازای هر v در V، $1v=v$؛

ب) $c(v_1+v_2)=cv_1+cv_2$ ؛

پ) $(c_1c_2)v=c_1(c_2v)$؛

ت) $(c_1+c_2)v=c_1v+c_2v$؛

تعریف ۱– ۱– ۲ اگر V یک فضای برداری بر روی میدان F باشد، هر زیرمجموعه W از V که خود با اعمال جمع برداری و ضرب اسکالری روی V یک فضای برداری روی F باشد، یک زیرفضای برداری نامیده می‌شود.

تعریف ۱– ۱– ۳ اگر V یک فضای برداری بر روی میدان F باشد، زیرمجموعه S از V وابسته خطی نامیده می‌شود، هرگاه اسکالرهای $c_1,...,c_n$ در F که همگی صفر نیستند و بردارهای متمایز $v_1,...,v_n$ در S یافت شوند به‌طوریکه

$$c_1v_1+c_2v_2+...+c_nv_n=0.$$

هر مجموعه که وابسته خطی نباشد مستقل خطی نامیده می‌شود.

تعریف ۱– ۱– ۴ اگر V یک فضای برداری بر روی میدان F باشد، یک پایه برای V مجموعه‌ای مستقل خطی از بردارهای V است که فضای V را پدید می‌آورد.

فضای V را با بعد متناهی گوییم هرگاه یک پایه متناهی داشته باشد.

۱– ۲ نرم برداری

تعریف ۱– ۲– ۱ فرض کنید x یک بردار در $\mathbb{R}^n$ باشد. نرم x که با نماد $\|x\|$ نمایش داده می‌شود یک تابع حقیقی و پیوسته روی $\mathbb{R}^n$ است، اگر در خواص زیر صدق کند:

۱) $\|x\| \geq 0 \;\; , \;\; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

۲) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|; \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

۳) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|; \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

چند مثال از نرم‌های معروف:

(نرم یک یا نرم مجموع) $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$

(نرم دو یا نرم اقلیدسی) $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$

(نرم ماکزیمم یا نرم بی‌نهایت) $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

۱– ۳ ضرب داخلی

تعریف ۱– ۳– ۱ اگر $Z = (z_1, \ldots, z_n)$ و $W = (w_1, \ldots, w_n)$ دو بردار در $\mathbb{C}^n$ باشند، ضرب داخلی آنها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle Z, W \rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w_i} .$$

تعریف ۱– ۳– ۲ فرض کنید توابع مختلط f و g بر بازه $[a,b]$ تعریف شده باشند و تابع حقیقی w بر بازه (a,b) تعریف شده و مثبت باشد. ضرب داخلی f و g نسبت به تابع وزن w برابر است با:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b w(x) f(x) \overline{g(x)} dx .$$

۱– ۳– ۱ فضای ضرب داخلی

تعریف ۱– ۳– ۳ ضرب داخلی روی فضای برداری V (حقیقی یا مختلط) یک تابع

$$\langle \cdot,\cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \text{ یا } \mathbb{C}$$

است که در خواص زیر صدق می‌کند:

۱) مثبت بودن $\langle v, v \rangle > 0; \quad \forall v \in V, v \neq 0$

۲) تقارن مزدوج $\overline{\langle v, w \rangle} = \langle w, v \rangle; \quad \forall v, w \in V$

۳) همگن بودن $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle; \quad \forall v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R} \text{ یا } \mathbb{C}$

٤) جمع پذیری $\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle; \quad \forall u, v, w \in V$

یک فضای برداری با یک ضرب داخلی، فضای ضرب داخلی نامیده می‌شود. برای تاکید بر فضای برداری V گاهی ضرب داخلی روی V را با نماد $\langle \cdot,\cdot \rangle_V$ نمایش می‌دهند.

خواص دو و چهار بر دو خطی بودن دلالت می‌کنند؛ یعنی:

$$\langle u, v+w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle; \qquad \forall u, v, w \in V$$

همچنین خواص دو و سه نیز ایجاب می‌کنند که اسکالر مولفه دوم با یک مزدوج خارج شود،

$$\langle v, cw \rangle = \overline{\langle cw, v \rangle} = \bar{c}\, \overline{\langle w, v \rangle} = \bar{c} \langle v, w \rangle; \qquad \forall v, w \in V$$

تعریف ۱– ۳– ۴ فرض کنید H یک فضای ضرب داخلی باشد، نرم در این فضا به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|v\| = (\langle v, v \rangle)^{\frac{1}{2}}; \qquad \forall v \in H$$

قضیه ۱– ۳– ۱ اگر V یک فضای ضرب داخلی باشد، آنگاه به ازای هر دو بردار u و w در V و اسکالر c در $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ داریم:

۱) مثبت بودن $\|u\|>0; \quad \forall u\neq 0$

۲) همگن بودن $\|cu\|=|c|\|u\|$

۳) نامساوی مثلثی $\|u+w\|\leq\|u\|+\|w\|$

تساوی فقط و فقط زمانی برقرار است که u یا w مضربی نامنفی از دیگری باشند.

۴) نامساوی کوشی – شوارتز[۱] $|\langle u,w\rangle|\leq\|u\|\|w\|$

تساوی فقط و فقط زمانی برقرار است که u و w مستقل خطی باشند.

اثبات: [۲] .

۱– ۳– ۲ فضای L^2 و ℓ^2

تعریف ۱– ۳– ۵ فضای $L^2([a,b])$، مجموعه همه توابع مربع انتگرال‌پذیر روی $a\leq t\leq b$ است. به عبارتی

$$L^2([a,b])=\left\{f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}(\mathbb{C})\,;\int_a^b|f(t)|^2\,dt<\infty\right\}.$$

فضای L^2 از بعد نامتناهی است. به عنوان مثال، اگر $a=0$ و $b=1$ مجموعه توابع 1، t، t^2 و ... به $L^2([0,1])$ تعلق دارند. اما تابع $f(t)=\dfrac{1}{t}$ به $L^2([0,1])$ تعلق ندارد، زیرا $\int_0^1\left(\dfrac{1}{t}\right)^2dt=\infty$.

تعریف ۱– ۳– ۶ ضرب داخلی روی $L^2([a,b])$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle f,g\rangle_{L^2}=\int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt;\qquad \forall f,g\in L^2$$

۱ –Cauchy- Schwartz

تعریف ۱– ۳– ۷ فضای ℓ^2 مجموعه همه دنباله‌های $X=\dots,x_{-1},x_0,x_1,\dots$ است که $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x_n|^2<\infty$.

تعریف ۱– ۳– ۸ ضرب داخلی روی ℓ^2 برای دو دنباله $X=\dots,x_{-1},x_0,x_1,\dots$ و $Y=\dots,y_{-1},y_0,y_1,\dots$ به صورت $\langle X\,,\,Y\,\rangle=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_n\bar{y}_n$ تعریف می‌شود.

۱– ۳– ۳ تعامد

تعریف ۱– ۳– ۹ فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی باشد. در این‌صورت:

۱) بردارهای x و y متعامدند، هرگاه $\langle x\,,\ y\rangle=0$

۲) دو زیرفضای V_1 و V_2 متعامدند، اگر هر بردار در V_1 بر هر یک از بردارهای V_2 عمود باشد.

۳) گردایه بردارهای e_i، $i=1,2,\dots,N$، متعامد یکه‌اند، هرگاه هر e_i دارای طول واحد باشد؛ یعنی، $\|e_i\|=1$ و $\langle e_i\,,e_j\,\rangle=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$.

٤) یک پایه متعامد یکه یا یک دستگاه متعامد یکه برای V، یک پایه از بردارهای V است که متعامد یکه‌اند.

تعریف ۱– ۳– ۱۰ دو تابع f و g را نسبت به تابع وزن w بر بازه (a,b) متعامد گویند، هرگاه: $\langle\, f\,,g\,\rangle=0$.

حالت خاص: هرگاه $a<x<b$، $w\,(x\,)=1$ و $\langle\, f\,,g\,\rangle=0$ باشد، دو تابع f و g نسبت به هم متعامد ساده نامیده می‌شود.

تعریف ۱– ۳– ۱۱ دنباله توابع $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ را دنباله توابع متعامد یا یک مجموعه از توابع متعامد می‌نامند، هرگاه:

$$\langle f_n\,,f_m\,\rangle=\begin{cases}d_n>0 & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases}\qquad n,m=0,1,2,\dots$$

و آن را متعامد یکه نامند، هرگاه $d_n=1$، برای $n=0,1,2,\dots$.

۱– ۳– ۴ تصاویر متعامد

تعریف ۱– ۳– ۱۲ فرض کنید V_0 زیر فضایی با بعد متناهی از فضای ضرب داخلی V باشد. برای هر بردار $v \in V$، تصویر متعامد v بر روی V_0، بردار یکتای $v_0 \in V_0$ است که نزدیک‌ترین بردار به v می‌باشد؛ یعنی:

$$\|v - v_0\| = \min_{w \in V_0} \|v - w\|.$$

قضیه ۱– ۳– ۲ فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی باشد و V_0 یک زیرفضای با بعد متناهی از V باشد. اگر v عضو دلخواهی از V_0 باشد، آنگاه تصویر متعامد آن، یعنی v_0 ،دارای ویژگی زیر است:

$v - v_0$ بر هر بردار در V_0 عمود است.

اثبات: [۱] .

قضیه ۱– ۳– ۳ فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی و V_0 یک زیرفضای N- بعدی با پایه متعامد یکه $\{e_1, e_2, ..., e_N\}$ باشد. تصویر متعامد بردار $v \in V$ بر روی V_0 با $v_0 = \sum_{j=1}^{N} a_j e_j$ که $a_j = \langle v, e_j \rangle$ داده می‌شود.

اثبات: [۱] .

تعریف ۱– ۳– ۱۳ فرض کنید V_0 یک زیرفضا از فضای ضرب داخلی V باشد. متمم متعامد V_0 که با $V_0^{\perp}$ نمایش داده می‌شود، مجموعه همه بردارهای V است که بر V_0 عمودند. یعنی:

$$V_0^{\perp} = \{v \in V : \langle v, w \rangle = 0,\ \forall w \in V_0\}$$

قضیه ۱– ۳– ۴ فرض کنید V_0 زیرفضایی با بعد متناهی از فضای ضرب داخلی V باشد. هر بردار $v \in V$ را می‌توان به طور یکتا به صورت $v = v_0 + v_1$ نوشت که $v_0 \in V_0$ و $v_1 \in V_0^{\perp}$ است؛ یعنی:

$$V = V_0 \oplus V_0^{\perp}.$$

اثبات: [۱] .