بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (گرایش جبر)

ساختار ضربگر شور $p-$گروه‌های متناهی

توسط:

افسانه محمدپور

استاد راهنما:

دکتر پیمان نیرومند

استاد مشاور:

دکتر محسن پرویزی

شهریور ۱۳۸۹

به نام خدا

ساختار ضربگر شور $p-$گروه‌های متناهی

توسط:

افسانه محمدپور

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم
برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی محض (گرایش جبر)

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه:

دکتر پیمان نیرومند استادیار دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر محسن پرویزی استادیار دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر عبدالعلی بصیری استادیار دانشگاه دامغان (استاد داور)

دکتر اسداله فرامرزی استادیار دانشگاه دامغان (استاد داور)

دکتر اکبر هاشمی برز آبادی استادیار دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریور ۱۳۸۹

تقدیم به

پدر بزرگوار و مادر مهربانم

که دعای آنان قوت قلب و بدرقه راهم است

و

برادر و خواهر عزیزم

که وجودشان گرمی بخش لحظات زندگیم است

// سپاسگزاری

پروردگارا! ای هستی بخش وجود، مرا بر نعمات بی‌کرانت توان شکر نیست، ذره ذره وجودم برای تو و نزدیک شدن به تو می‌تپد. الهی مرا مدد کن تا دانش اندکم، نه نردبانی برای فزونی تکبر و غرور، نه حلقه‌ای برای اسارت و نه دست مایه‌ای برای تجارت، بلکه گامی باشد برای تجلیل از تو و متعالی ساختن زندگی خود و دیگران.

اکنون که به لطف پروردگار بزرگ موفق به اتمام این مقطع از تحصیل گشته‌ام لازم می‌دانم از کسانی که در این مسیر مرا راهنمایی نموده‌اند، تشکر نمایم.

بر خود واجب می‌دانم مراتب سپاس و قدردانی عمیق قلبی خود را به خدمت استاد فرزانه و گرانقدرم جناب آقای دکتر پیمان نیرومند که در طول دوران تحصیل و ارائه پایان‌نامه از چشمه جوشان دانش و اخلاق والایشان به قدر ظرفیت محدود خویش بهره مند گشته‌ام ابراز نمایم.

از استاد ارجمندم جناب آقای محسن پرویزی که مشاوره این پایان‌نامه را بر عهده داشتند کمال تشکر را دارم.

از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر اسداله فرامرزی و جناب آقای دکتر عبدالعلی بصیری که در مقام داور زحمت مطالعه پایان‌نامه را بر عهده داشتند قدرنمایی می‌نمایم.

از تمامی اساتیدی که در طول این مدت افتخار شاگردیشان را داشتم کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از زحمات خانواده عزیزم که سربلندی امروزم را مدیون زحمات دیروز آن‌ها می‌دانم، سپاسگزارم.

در نهایت سپاس و تشکر خود را تقدیم دوستان مهربانم می‌کنم که مرا در سختی‌ها تنها نگذاشتند و همواره در کنارم بودند.

افسانه محمدپور

شهریور ماه ۸۹

چکیده

ساختار ضربگر شور $p-$گروه‌های متناهی

به وسیله‌ی:

افسانه محمدپور

ضربگر شور $M(G)$ گروه G اولین بار توسط ع. شور[۱] در سال ۱۹۰۴ بیان شد. جی. آ. گرین[۲] در سال ۱۹۵۶ ثابت کرد که برای $p-$گروه متناهی از مرتبه p^n داریم $\mid M(G) \mid \leq p^{\frac{1}{2}n(n-1)}$.

ام. ار. جونز[۳] در سال ۱۹۷۲ این کران را بهبود بخشید، در حقیقت وی ثابت کرد که $\mid M(G) \mid\mid G' \mid \leq p^{\frac{1}{2}n(n-1)}$.

بنابراین به ازای $t(G) \geq 0$ خواهیم داشت $\mid M(G) \mid = p^{\frac{1}{2}n(n-1)-t(G)}$.

در این پایان‌نامه ساختار $p-$گروه‌های متناهی G وقتی که $t(G) = 0, 1, 2, 3, 4$ کاملاً مشخص شده است.

واژه‌های کلیدی: $p-$گروه‌های متناهی، ضربگر شور.

---

[۱] I. Schur

[۲] J. A. Green

[۳] M. R. Jones

فهرست مطالب

پیشگفتار

ع. شور در سال ۱۹۰۴، در حال مطالعه روی نمایش تصویری گروه‌ها دومین کوهمولوژی [۴] گروه‌ها با ضرایب در $\mathbb{C}^*$ را ضربگر شور[۵] نامید و نماد $M(G)$ را برای آن در نظر گرفت.
برای هر نمایش آزاد $1 \to R \to F \to G \to 1$ برای گروه G با توجه به قضیه هاپف[۶] ضربگر شور با $(F' \cap R)/[F,R]$ یکریخت است، در حقیقت ضربگر شور به نمایش آزاد بستگی ندارد.
پیدا کردن ساختار ضربگر شور برای گروه‌های متفاوت کار ساده‌ای نمی‌باشد. بنابراین در این میان، ریاضیدانانی سعی کرده‌اند که برای دسته خاصی از گروه‌ها خواصی روی $M(G)$ بدست آورند. در این میان کلاس $p-$گروه‌های متناهی به خاطر نتایج بسیاری که روی آن به دست آمده است، از اهمیت خاصی برخوردار است.
جی. آ. گرین در سال ۱۹۵۶ به ازای هر $p-$گروه متناهی از مرتبه p^n کران بالای $p^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ را برای مرتبه ضربگر شور ارائه کرد. بعداً در سال ۷۲ و ۱۹۷۳ ام. ار. جونز طی مقالاتی به بررسی بیشتری از ضربگر شور $p-$گروه‌ها پرداخت. وی ثابت کرد که برای هر $p-$گروه از مرتبه p^n،

$$| M(G) || G' | \leq p^{\frac{1}{2}n(n-1)}.$$

بنابراین عدد صحیح مانند $t(G)$ وجود دارد به طوری که $| M(G) |= p^{\frac{1}{2}n(n-1)-t(G)}$.
پیدا کردن ساختار $p-$گروه‌های متناهی که ضربگر شور آنها مشخص است، مورد توجه برخی از نویسندگان قرار گرفته است. مساله ای که در این میان حائز اهمیت است پاسخ به این سوال است که با توجه به رابطه بالا، آیا می‌توان به ازای $t(G)$ معلوم ساختار تمام $p-$گروه‌های متناهی از مرتبه p^n را مشخص کرد؟ پاسخ به این سوال به ازای برخی از $t(G)$ ها مشخص شده است. یا. جی. برکویچ[۷] در سال ۱۹۹۱ ساختار تمام $p-$گروه‌های متناهی از مرتبه p^n با $t(G)=0$ را به دست آورد در حقیقت وی ثابت کرد که $t(G)=0$ اگر و فقط اگر G

[۴] Second cohomology

[۵] Schur multiplier

[۶] Hapf

[۷] Ya. G. Berkovich

آبلی مقدماتی باشد. ایکس.زو[8] در سال ۱۹۹۴ ساختار تمام $p-$گروه‌هایی که $t(G) = ۱, ۲$ را به دست آورد.
در این پایان‌نامه سعی شده که شرایط لازم و کافی برای ساختار $p-$گروه متناهی G را به دست آورد که در آن $t(G) = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴$. در حالاتی که $t(G) = ۰, ۱, ۲$ نتایج مشابه اما با اثباتی کوتاهتر و متفاوت از دو مقاله برکویچ و زو می‌باشد، در ادامه حالت‌های $t(G) = ۳$, $t(G) = ۴$ مورد بررسی قرار می‌گیرد. این نتایج به ترتیب بر گرفته از مقالات [۸] و [۱۹] و [۱۷] است.
این پایان‌نامه شامل ۴ فصل است، در فصل اول که با عنوان پیش نیازها مطرح شده است، به بیان قضایا و تعاریفی می‌پردازیم که در فصول بعدی مورد نیازند.
در فصل دوم که با عنوان رده بندی تمام $p-$گروه‌های متناهی با شرط $t(G) = ۰, ۱, ۲, ۳$ مطرح شده، به بررسی مقاله جی. الیس [۸] که در سال ۱۹۹۹ ارائه کرد، می‌پردازیم .
در فصل سوم که تحت عنوان رده بندی برخی $p-$گروه‌های متناهی با شرط $t(G) = ۴$ بیان شده، مقاله سالمکار [۱۹] را که در سال ۲۰۰۷ ارائه کرد، مورد بحث قرار می‌دهیم.
در فصل آخر با روشی متفاوت از الیس و سالمکار، ساختار تمام $p-$گروه‌های متناهی غیرآبلی با $t(G) = ۴$ را به دست خواهیم آورد. در حقیقت در این فصل حالت‌هایی از ساختار گروه‌ها که در فصل سوم در قضیه اصلی بیان نشده، تکمیل می‌شود. این فصل بر اساس مقاله نیرومند [۱۷] که در سال ۲۰۱۰ ارائه کرد، می‌باشد.

---
[8] X. Zhou

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل مفاهیم و قضایایی که در فصل‌های بعدی مورد نیاز است را بیان می‌کنیم. این فصل شامل سه بخش است، بخش اول با عنوان معرفی برخی نمادگزاری‌ها، بخش دوم با عنوان $p-$گروه‌های متناهی و بخش سوم با عنوان آشنایی با مفهوم ضربگر شور می‌باشد.

۱-۱ معرفی برخی نمادگزاری‌ها

در این بخش به معرفی نمادهایی که در این پایان‌نامه مورد استفاده قرار می‌گیرند، می‌پردازیم و در فصول بعدی صرفاً از نماد این گروه‌ها استفاده خواهیم کرد.

G^{ab} نمایش گروه خارج قسمتی G/G'،

$C_{p^m}{}^{(n)}$ حاصلضرب مستقیم[۱] $n-$نسخه از گروه دوری C_{p^m}،

D_8 نمایش گروه دو وجهی[۲] از مرتبه ۸،

Q_8 نمایش گروه چهارگان[۳] از مرتبه ۸،

E_1 نمایش گروه از مرتبه p^3 با نمای p

$$E_1 =< a, b, c \mid a^p = b^p = c^p = 1, [a, c] = [b, c] = 1, [a, b] = c >,$$

E_2 نمایش گروه از مرتبه p^3 با نمای p^2

$$E_2 =< a, b, c \mid a^{p^2} = b^p = 1, c^p = a^p, [a, b] = a^p, [a, c] = b, [b, c] = 1 >,$$

E_3 نمایش گروه از مرتبه p^4 با نمای p^2

$$E_3 =< a, b, c \mid a^{p^2} = b^p = c^p = 1, [a, c] = a^p, [a, b] = [b, c] = 1 > .$$

۲-۱ $p-$گروه‌های متناهی

در این بخش به بیان تعاریف و قضایایی در مورد $p-$گروه‌های متناهی می‌پردازیم.

تعریف ۱.۲.۱. گروه متناهی G، $p-$گروه بسیار ویژه[۴] نامیده می‌شود اگر آبلی مقدماتی باشد یا

$$Z(G) = G' \cong C_p.$$

به عنوان مثال $p-$گروه‌های D_8، Q_8، E_1 و E_2 گروه‌های بسیار ویژه هستند.

[۱] Direct product

[۲] Dihedral group

[۳] Quaterninon group

[۴] Extra special

قضیه ۲.۲.۱. *هر $p-$گروه متناهی پوچ توان[۵] است.*

اثبات. به صفحه ۱۱۸ از [۱۸] مراجعه شود. □

قضیه ۳.۲.۱. *اگر G یک گروه پوچ توان و $G \triangleright N \neq 1$ آنگاه $N \cap Z(G) \neq 1$.*

اثبات. به صفحه ۱۲۴ از [۱۸] رجوع شود. □

نتیجه ۴.۲.۱. *هر گاه N یک زیرگروه نرمال مینیمال از گروه پوچ توان G باشد، در این صورت $N \leq Z(G)$.*

اثبات. از قضیه (۳.۲.۱) نتیجه می‌شود. □

نتیجه ۵.۲.۱. *گروه‌های پوچ توان مرکز نابدیهی دارند.*

اثبات. از قضیه (۳.۲.۱) نتیجه می‌شود. □

نتیجه ۶.۲.۱. *هر $p-$گروه متناهی مرکز نابدیهی دارد.*

اثبات. به آسانی از (۲.۲.۱) و (۵.۲.۱) نتیجه می‌شود. □

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنید Gگروه دلخواهی باشد، در این صورت زیرگروه فراتینی[۶] G با نماد $\phi(G)$ و به صورت $\phi(G) = \bigcap M$، که M زیرگروه ماکسیمال G است، تعریف می‌شود. اگر گروه G دارای زیرگروه ماکسیمال نباشد، آنگاه $\phi(G) = G$.

قضیه ۸.۲.۱. *فرض کنید G یک گروه متناهی باشد، در این صورت*

الف) اگر $G \triangleright N$ آنگاه $\phi(\frac{G}{N}) \geq \frac{\phi(G)N}{N}$.

ب) اگر $N \leq \phi(G)$ آنگاه $\phi(\frac{G}{N}) = \frac{\phi(G)}{N}$.

اثبات. به صفحه ۱۳۱ از [۱۸] مراجعه شود. □

تعریف ۹.۲.۱. عنصر $g \in G$ را نامولد[۷] گوییم هر گاه

$$\forall X;\ \ G =< X, g > \Longrightarrow G =< X > .$$

قضیه ۱۰.۲.۱. *زیرگروه فراتینی G مجموعه تمام عناصر نامولد G است.*

اثبات. به صفحه ۱۳۰ از [۱۸] رجوع شود. □

---

[۵] Nilpotent

[۶] Faratini subgroup

[۷] Non-generator

قضیه ۱۱.۲.۱ (قضیه پایه برنساید[8]). *فرض کنید G یک $p-$گروه متناهی باشد، در این صورت*

الف) $\phi(G) = G'G^p$

ب) اگر $[G:\phi(G)] = p^r$ *، آنگاه هر مجموعه از مولدهای G دارای زیر مجموعه‌ای r عضوی است که G را تولید می‌کند.*

اثبات. به صفحه ۱۳۰ از [۱۸] مراجعه شود. □

لم ۱۲.۲.۱. *فرض کنید G یک $p-$گروه متناهی باشد، در این صورت داریم که*

$$[G:\phi(G)] = [G^{ab}:\phi(G^{ab})].$$

اثبات. با توجه به قضیه پایه برنساید داریم $G' \leq \phi(G)$ حال بنابر قضیه (۸.۲.۱) می‌توان نوشت

$$\phi(G^{ab}) = \frac{\phi(G)}{G'}.$$

از طرفی بنابر قضیه سوم یکریختی گروه‌ها نتیجه می‌شود که

$$[G^{ab}:\frac{\phi(G)}{G'}] = [G:\phi(G)].$$

بنابراین

$$[G:\phi(G)] = [G^{ab}:\phi(G^{ab})].$$

□

قضیه ۱۳.۲.۱. *فرض کنید G گروهی متناهی باشد، در این صورت G پوچ توان است اگر وفقط اگر هر زیرگروه ماکسیمال G نرمال باشد.*

اثبات. به صفحه ۱۲۶ از [۱۸] مراجعه شود. □

تعریف ۱۴.۲.۱. گروه متناهی G گروهی با $d-$مولد نامیده می‌شود، اگر نتواند با کمتر از $d-$ عنصر تولید شود.

لم ۱۵.۲.۱. *فرض کنید G یک $p-$گروه متناهی با $d-$ مولد باشد، در این صورت $G/\phi(G)$ گروه آبلی مقدماتی از مرتبه p^d است.*

اثبات. اگر M زیرگروه ماکسیمال G باشد، آنگاه

$$[G:M] = p$$

---

[8] Burnside

و از آنجایی که G یک $p-$گروه متناهی است، بنابر قضیه (۲.۲.۱) گروه G پوچ توان است لذا با استفاده از قضیه (۱۳.۲.۱) می‌توان نتیجه گرفت که $M \triangleleft G$. از آنجایی که $[G:M]=p$ پس گروه G/M آبلی می‌باشد و در نتیجه $G' \subseteq M$ و از طرفی برای هر x در M داریم $x^p \in M$ لذا $\mid G/M \mid = p$. حال از آنجایی که این روابط برای هر زیرگروه ماکسیمال M از G برقرار است، برای هر x در G نتیجه می‌دهد که $x^p \in \phi(G)$ و $G' \subseteq \phi(G)$ بنابراین $G/\phi(G)$ آبلی مقدماتی است. قرار می‌دهیم

$$[G:\phi(G)] = p^r$$

چون $G/\phi(G)$ آبلی مقدماتی است پس

$$r = d(G/\phi(G)).$$

بنابر فرض G مجموعه مولدی شامل d عضو دارد بنابراین $d \geq r$. از طرف دیگر، اگر X مجموعه مولدی از $\phi(G)$ و

$$g_1\phi(G), \cdots, g_r\phi(G).$$

مجموعه مولدی از $G/\phi(G)$ باشد، آنگاه

$$X \cup \{g_1, \cdots, g_r\}.$$

مجموعه مولدی از G است. اما همه اعضای $\phi(G)$ می‌توانند از هر مجموعه مولد G حذف شوند، بنابراین

$$G = < g_1, \cdots, g_r > .$$

بنابراین $d \leq r$ در نتیجه

$$[G:\phi(G)] = p^d.$$

□

قضیه ۱۶.۲.۱. *فرض کنید G یک $p-$گروه باشد، در این صورت تعداد مولدهای G^{ab} با تعداد مولدهای G برابر است.*

اثبات. فرض می‌کنیم d_1 تعداد مولدهای گروه G و d_2 تعداد مولدهای گروه G^{ab} باشد در این صورت باید ثابت کنیم $d_1 = d_2$. می‌دانیم که $d_2 \leq d_1$. کافی است ثابت کنیم که $d_1 \leq d_2$. چون تعداد مولدهای G^{ab} برابر d_2 است با توجه به لم (۱۵.۲.۱) می‌توان نوشت

$$[G^{ab}:\phi(G^{ab})] = p^{d_2}.$$

و از طرفی بنابر لم (۱۲.۲.۱) نتیجه می‌شود

$$[G:\phi(G)] = p^{d_2}.$$

پس با استفاده از قضیه پایه برنساید داریم که $d_1 \leq d_2$ لذا اثبات کامل است. □

لم ۱.۲.۱۷. *فرض کنید G یک $p-$گروه متناهی باشد، در این صورت اگر G^{ab} دوری باشد، آنگاه G نیز دوری است.*

اثبات. فرض می‌کنیم G^{ab} دوری باشد، دراین صورت عنصر $g \in G$ وجود دارد به طوری که

$$G^{ab} =< gG' > .$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$G =< G', g > .$$

از طرفی بنابر قضیه پایه برنساید داریم که

$$G' \leq \phi(G).$$

و با توجه به قضیه (۱.۲.۱۰) خواهیم داشت $G =< g >$ و این اثبات را کامل می‌کند. □

تعریف ۱.۲.۱۸. فرض کنید G یک گروه و $\{G_i\}_{i=1}^{n}$ زیرگروه‌های نرمال G باشند، G حاصلضرب مرکزی[۹] $\{G_i\}$ نامیده می‌شود اگر

الف) $G = G_1 \cdots G_n$،

ب) به ازای هر $i \neq j$، $[G_i, G_j] = 1$،

ج) به ازای هر i، $G_i \cap \prod_{i \neq j} G_j \subseteq Z(G)$.

لم ۱.۲.۱۹. *فرض کنید G یک $p-$گروه متناهی از مرتبه p^n باشد به طوری که G^{ab} آبلی مقدماتی از مرتبه p^{n-1}، در این صورت G حاصلضرب مرکزی $p-$گروه بسیار ویژه H و $Z(G)$ است، به طوری که $H \cap Z(G) = G'$.*

اثبات. به [۱۴] مراجعه شود. □

[۹] Central product

۱-۳ آشنایی با مفهوم ضربگر شور

در این بخش به بیان مفاهیم و قضایای مقدماتی در مورد ضربگر شور می‌پردازیم.

قضیه ۱.۳.۱. *هر گروه دلخواه تصویر همریخت یک گروه آزاد است.*

اثبات. به صفحه ۶۶ از [۱۲] مراجعه شود. $\square$

قضیه ۲.۳.۱. *فرض کنیم G گروهی دلخواه و دارای نمایش آزاد $G \cong F/R$ باشد، در این صورت گروه خارج قسمتی $(F' \cap R)/[F, R]$ ضربگر شور G نامیده می‌شود، و با $M(G)$ نمایش داده می‌شود.*

اثبات. به صفحه ۵۰ از [۱۳] مراجعه شود. $\square$

قضیه ۳.۳.۱. *فرض کنیم A و B دو گروه دلخواه باشند، در این صورت*

$$M(A \times B) \cong M(A) \oplus M(B) \oplus (A^{ab} \otimes B^{ab}).$$

اثبات. به صفحه ۳۷ از [۱۳] مراجعه شود. $\square$

قضیه ۴.۳.۱. *فرض کنید G یک گروه دوری باشد، در این صورت $M(G) = ۱$.*

اثبات. بنابر قضیه (۱.۳.۱) گروه آزاد F روی G موجود است به طوری که $F =< x >$، اگر $\alpha : F \to G$ حال قرار می‌دهیم $\ker \alpha = R$ آنگاه $G = F/R$ از آنجایی که F دوری است، F' گروه بدیهی است و در نتیجه

$$M(G) = \frac{R \cap F'}{[R, F]} = ۱.$$

$\square$

نتیجه ۵.۳.۱. *فرض کنید $G \cong {C_p}^{(n)}$ در این صورت*

$$\mid M(G) \mid = p^{\frac{۱}{۲}n(n-۱)}.$$

اثبات. به آسانی از قضایای (۳.۳.۱) و (۴.۳.۱) نتیجه می‌شود. $\square$

قضیه ۶.۳.۱. *فرض کنید G گروهی آبلی باشد به طوری که $G \cong C_{p^{n_۱}} \times C_{p^{n_۲}} \times \cdots \times C_{p^{n_k}}$ و $n_۱ \geq n_۲ \geq \cdots \geq n_k$، در این صورت*

$$M(G) \cong C_{p^{n_۲}} \times C^{(۲)}_{p^{n_۳}} \times \cdots \times C^{(k-۱)}_{p^{n_k}}.$$

اثبات. به صفحه ۳۷ از [۱۳] مراجعه شود. $\square$

قضیه ۷.۳.۱. *فرض کنید G یک $p-$گروه و $G/Z(G)$ گروهی با $\delta-$ مولد باشد، در این صورت*

$$| M(G) | \leq | M(G^{ab}) || G' |^{\delta-1}.$$

اثبات. به [۱۰] مراجعه شود. □

قضیه ۸.۳.۱. *فرض کنید G یک $p-$گروه از مرتبه p^n با $d-$مولد، G' از مرتبه p^c و $G/Z(G)$ یک گروه با $\delta-$ مولد باشد، در این صورت*

$$| M(G) | \leq p^{\frac{1}{2}\{d(2n-2c-d-1)+2(\delta-1)c\}}.$$

اثبات. ابتدا فرض می‌کنیم گروه G آبلی باشد، در این صورت G' بدیهی است، لذا باید ثابت کنیم که

$$| M(G) | \leq p^{\frac{1}{2}d(2n-d-1)}.$$

چون G آبلی است، پس می‌توان یکریختی زیر را در نظر گرفت

$$G \cong C_{p^{m_1}} \times C_{p^{m_2}} \times \cdots \times C_{p^{m_d}}.$$

به طوری که $m_1 \leq m_2 \leq \cdots \leq m_d$ و $m_1 + m_2 + \cdots + m_d = n$ در این صورت بنابر قضیه (۶.۳.۱) داریم که

$$\begin{aligned} | M(G) | &= p^{m_1(d-1)+m_2(d-2)+\cdots+m_{d-1}} \\ &= p^{m_1+\cdots+m_{d-1}+m_1+\cdots+m_{d-2}+\cdots+m_1} \\ &= p^{(n-m_d)+(n-m_d-m_{d-1})+\cdots+(n-m_d-\cdots-m_2)} \\ &\leq p^{n-1+n-2+\cdots+n-(d-1)} \\ &= p^{(d-1)n-\frac{1}{2}d(d-1)} \\ &\leq p^{\frac{1}{2}d(2n-d-1)}. \end{aligned}$$

بنابراین اثبات این حالت کامل می‌شود.
حال فرض می‌کنیم گروه G غیرآبلی باشد، در این صورت G^{ab} بنابر (۱۶.۲.۱) دارای $d-$مولد است و

$$| G^{ab} | = p^{n-c}$$

حال از آنجایی که G^{ab} آبلی است داریم

$$| M(G^{ab}) | \leq p^{\frac{1}{2}d(2(n-c)-d-1)}.$$

در نتیجه

$$| M(G^{ab}) | \leq p^{\frac{1}{2}d(2n-2c-d-1)}.$$

حال با توجه به قضیه (۷.۳.۱) اثبات این حالت نیز کامل می‌شود و به این ترتیب اثبات قضیه کامل است. □

گزاره ۹.۳.۱. *فرض کنید G یک $p-$گروه متناهی با مرکز $Z(G)$ و سری مرکزی پایینی زیر باشد*

$$۱ = \gamma_{c+۱}G \trianglelefteq \gamma_c G \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq \gamma_۱ G = G$$

قرار می‌دهیم $\overline{G} = G/Z(G)$، در این صورت

$$| M(G) || \gamma_۲ G | \leq | M(G^{ab}) || \overline{G}^{ab} \otimes \frac{\gamma_۲ G}{\gamma_۳ G} || \overline{G}^{ab} \otimes \frac{\gamma_۳ G}{\gamma_۴ G} | \cdots | \overline{G}^{ab} \otimes \gamma_c G | .$$

اثبات. به [۷] مراجعه شود. □

قضیه ۱۰.۳.۱. *فرض کنید G یک گروه بسیار ویژه از مرتبه $p^{۲m+۱}$ باشد، در این صورت*

الف) اگر $m \geq ۲$، آنگاه $M(G)$ یک $p-$گروه آبلی مقدماتی از مرتبه $p^{۲m^۲-m-۱}$ است ؛

ب) اگر $m = ۱$ و p یک عدد اول فرد باشد، آنگاه داریم که

$$M(G) \cong \begin{cases} C_p \times C_p & \text{اگر } G \text{ از نمای } p \text{ باشد} \\ ۱ & \text{اگر } G \text{ از نمای } p^۲ \text{ باشد} \end{cases}$$

ج) اگر $m = ۱$ و $p = ۲$ آنگاه $Q_۸$ یا $G \cong D_۸$ و $M(D_۸) \cong C_۲$ و $M(Q_۸) \cong ۱$.

اثبات. به صفحه ۱۳۸ از [۱۳] مراجعه شود. □

تعریف ۱۱.۳.۱. دنباله $\cdots \longrightarrow A_{n-۱} \xrightarrow{f_{n-۱}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+۱} \longrightarrow \cdots$ را در A_n دقیق گوییم هرگاه $\ker f_n = Img\ f_{n-۱}$. دنباله را دقیق گوییم هرگاه در هر جمله دقیق باشد.
دنباله $۱ \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow ۱$ را دنباله دقیق کوتاه[۱۰] گوییم هرگاه $\ker g = Img\ f$ و همچنین f یک به یک و g پوشا باشد.

قضیه ۱۲.۳.۱. *فرض کنید Z یک زیرگروه مرکزی از گروه متناهی G باشد، در این صورت دنباله زیر دقیق است*

$$Z \otimes G \xrightarrow{\alpha} M(G) \xrightarrow{\beta} M(G/Z) \xrightarrow{\gamma} G' \cap Z \longrightarrow ۱.$$

اثبات. قرار می‌دهیم $G = F/R$ و $Z = T/R$ برای گروه آزاد F و زیرگروه‌های نرمال T و R از F از آنجایی که Z زیرگروه مرکزی است، ما باید داشته باشیم $[T, F] \subseteq R$. نگاشت‌های شمول $R \cap F' \to T \cap F'$ و $T \cap F' \to T \cap F'R$ دنباله‌ای از همریختی‌ها را القا می‌کند

$$(R \cap F')/[R, F] \xrightarrow{\beta} (T \cap F')/[T, F] \xrightarrow{\gamma} (T \cap F'R)/R \longrightarrow ۱.$$

مشاهده می‌کنیم که

$$G' \cap Z = F'R/R \cap T/R = (T \cap F'R)/R$$

[۱۰] Short exact sequence

با توجه به قضیه (۲.۳.۱) داریم

$$(R\cap F')/[R,F]\cong M(G) \quad , \quad (T\cap F')/[T,F]\cong M(G/Z).$$

با استفاده از قانون مدولی داریم

$$R(F'\cap T)=F'R\cap T$$

و بنابراین γ پوشاست. حال داریم

$$\ker\gamma=(T\cap F'\cap R)/[T,F]=(R\cap F')/[T,F]=Img\,\beta,$$

مشاهده می‌کنیم که

$$\begin{cases} T/R\times F/RF'\to(R\cap F')/[R,F] \\ (xR,yRF')\mapsto[x,y][R,F] \end{cases}$$

یک نگاشت دوخطی خوش تعریف است. در نتیجه تصویر همریختی

$$T/R\otimes F/RF'\to(R\cap F')/[R,F]$$

$[T,F]/[R,F]$ است که این $\ker\beta$ نیز می‌باشد. در آخر از آنجایی که $T/R=Z$ و $F/F'R=G/G'$ اثبات کامل می‌شود. □

قضیه ۱۳.۳.۱. *فرض کنید G یک گروه متناهی با زیرگروه نرمال N و $H=G/N$. در این صورت یک گروه متناهی L با یک زیرگروه نرمال M وجود دارد به طوری که*

الف) $G'\cap N\cong L/M$

ب) $M\cong M(G)$

ج) $M(H)$ *تصویر همریخت L است.*

اثبات. به صفحه ۵۷ از [۱۳] مراجعه شود. □

تعریف ۱۴.۳.۱. گروه G را توانا[۱۱] گوییم هرگاه گروهی مانند H موجود باشد، به طوری که $G\cong H/Z(H)$.

تعریف ۱۵.۳.۱. مرکز بیرونی[۱۲] گروه G که با نماد $Z^*(G)$ نمایش می‌دهیم، کوچکترین زیرگروهی مانند N است به طوری که G/N توانا باشد.

---

[۱۱] Capable

[۱۲] Exterior Center

قضیه ۱.۳.۱۶. *فرض کنید* $G \cong < a > \rtimes < b >$ *و اعداد طبیعی* α, β, γ *با شرط* $\beta \geq \gamma \geq 1, \alpha \geq 2\gamma$ *موجود باشند به طوری که* $o(b) = p^{\beta}$ *,* $o(a) = p^{\alpha}$ *,* $[a,b] = a^{p^{\alpha-\gamma}}$ *در این صورت*

$$Z^*(G) =< a^{p^{\beta}}, b^{p^{\alpha}} > .$$

اثبات. به [۱] رجوع شود. □

قضیه ۱.۳.۱۷. *فرض کنید* G *یک گروه دلخواه باشد و* $K \subseteq Z^*(G)$ *در این صورت دنباله زیر دقیق است*

$$1 \rightarrow M(G) \rightarrow M(G/K) \rightarrow K \cap G' \rightarrow 1.$$

اثبات. به [۶] مراجعه شود. □

نتیجه ۱.۳.۱۸. *فرض کنید* G *یک گروه متناهی و* N *زیرگروهی نرمال باشد و فرض کنید* $H = G/N$. *در این صورت*

$$| M(H) | \mid | M(G) || G' \cap N | .$$

اثبات. با توجه به قضیه (۱.۳.۱۳) داریم $| L |=| M(G) || G' \cap N |$، بنابراین نتیجه خواسته شده با توجه به قسمت (ج) قضیه (۱.۳.۱۳) حاصل می‌شود. □

لم ۱.۳.۱۹. *فرض کنید* G *یک گروه متناهی و* F/R *یک نمایش از* G *به صورت گروه خارج قسمت از گروه آزاد متناهیاً تولید شده* F *باشد. فرض کنید* B *زیرگروهی از* $Z(G)$ *با* $B = S/R$ *به طوری که* $A = G/B \cong F/S$. *در این صورت* $[F,S]/[F,R]S'$ *تصویر همریخت* $A \otimes B$ *است.*

اثبات. به صفحه ۵۷ از [۱۳] مراجعه شود. □

قضیه ۱.۳.۲۰. *فرض کنید* G *یک گروه متناهی باشد و* B *زیرگروهی مرکزی باشد و فرض کنید* $A = G/B$. *در این صورت*

$$| M(G) || G' \cap B | \mid | M(A) || M(B) || A \otimes B | .$$

اثبات. فرض کنید $G = F/R$ یک نمایش از گروه G به صورت خارج قسمتی از گروه آزاد F باشد و فرض کنید $B = S/R$ به طوری که $A \cong F/S$. در این صورت داریم $[F,S] \subseteq R$. با توجه به قضیه (۱.۳.۱۳)،

$$| M(G) || G' \cap B |=| L |=| M(A) || [F,S]/[F,R] | .$$

از آنجایی که

$$([F,S]/[F,R])/([F,R]S'/[F,R])$$

با $[F,S]/[F,R]S'$ یکریخت است، داریم

$$| M(G) || G' \cap B |=| M(A) || [F,R]S'/[F,R] || [F,S]/[F,R]S' | .$$