دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

مقدمه‌ای بر اندازه‌ی پاره‌خط و زاویه در یک هندسه‌ی مطلق عام

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض ریاضی محض (هندسه)

الهام یاوری

استاد راهنما

دکتر سید قهرمان طاهریان

۱۳۸۷

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض ریاضی محض (هندسه)الهام یاوری

تحت عنوان

مقدمه‌ای بر اندازه‌ی پاره‌خط و زاویه در یک هندسه‌ی مطلق عام

در تاریخ   توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱ — استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر سید قهرمان طاهریان
۲— استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر اعظم اعتماد
۳— استاد داور ۱	دکتر محمد مهدی ابراهیمی (گروه ریاضی دانشگاه شهید بهشتی)
۴— استاد داور ۲	دکتر منصور آقاسی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده   دکتر رسول نصراصفهانی

فهرست مطالب

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا به بررسی خواص صفحات مطلق $(E, L, \equiv, \alpha)$ با رهیافت اصل موضوعی می‌پردازیم. سپس زیرگروه ویژه‌ای از خودریختی‌های آن به نام حرکت‌ها را معرفی کرده و مجموعه‌ی حرکت‌های سره را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در ادامه به هر صفحه‌ی مطلق مانند $(E, L, \equiv, \alpha)$ ، یک گروه مرتب جابجایی $(W, +, <)$ نظیر می‌شود که $(W, +)$ یک زیرگروه از $K-$لوپ $(E, +)$ نظیرصفحه‌ی مطلق است.
به کمک رابطه‌ی ترتیب روی صفحه‌ی مطلق، مفاهیمی چون نیم‌خط، زاویه، اندازه‌ی زاویه و مجموع اندازه‌ی زاویه‌ها تعریف خواهند شد. همچنین یک گروه مرتب دوری جابه‌جایی مانند $(E_1, \cdot, \zeta)$ به دست می آید که$(E_1, \cdot)$ یکریخت با گروه دوران‌های با یک نقطه‌ی ثابت است.
به کمک $(W, +, <)$ و $(E_1, \cdot, \zeta)$ به ترتیب مفهوم فاصله‌ی λ برای توصیف هم‌نهشتی با ویژگی مثلث و مفهوم اندازه‌ی μ برای زاویه‌ها تعریف می‌شود که هم‌نهشتی و تزویج زاویه‌ها به کمک آن توصیف می‌شود.
در پایان نتیجه می‌گیریم مجموعه‌ی حرکت‌های سره را می‌توان به صورت حاصل ضرب شبه مستقیم نشان داد.
رده‌بندی موضوعی: اولیه ۵۱F۰۵، ثانویه ۲۰N۰۵
کلمات کلیدی: صفحه‌ی مطلق، تابع فاصله، اندازه‌ی زاویه، گروه، لوپ.

فصل ۱

مقدمه

۱—۱ مقدمه

کتاب «**اصول**» **اقلیدس** در ۳۰۰ سال قبل از میلاد، هندسه‌ی یونان باستان را به اوج خود رسانید. اقلیدس در سیزده رساله، ۴۶۵ گزاره تدوین کرد که نتایج آن دوران را در هندسه، نظریه‌ی اعداد و جبرمقدماتی خلاصه می‌کرد.

اصول اقلیدس به دلیل غنای مفاهیم ریاضی حائز اهمیت زیادی است و قدیمی‌ترین نمونه‌ی تاریخ ریاضی در استفاده از روش بنداشتی می‌باشد. اقلیدس پی برده بود که همه‌ی گزاره‌های ریاضی را نمی‌توان ثابت کرد و به طور قطع باید گزاره‌هایی به عنوان مفروضات پایه پذیرفته شوند. وی این گزاره‌ها رابه دو دسته‌ی «**اصول متعارف**» و «**اصول موضوعه**» تقسیم کرده است. امروزه این گزاره‌ها را «**بُنداشت**» می‌نامیم.

شاهکار اقلیدس در زمان او طوری به رسمیت شناخته شد که کارهای قبلی در هندسه تقریباً به طور کامل فراموش شد و غیر از کتاب «**اصول**» چیز قابل توجهی از ریاضیات آن دوره در دست نیست. در اهمیت این کار همین بس که اصول اقلیدس قرن‌ها به عنوان کتاب استاندارد درس هندسه به شکلی تغییر ناپذیر مورد استفاده بوده است.

یک نکته‌ی مهم که ظاهراً خود اقلیدس نیز می‌دانست این بود که اصل پنجم بسیار پیچیده‌تر از اصول دیگر است. وی استفاده از این اصل را تا جای ممکن به تأخیر انداخته بود. اصل پنجم معادل این گزاره

است که «**برای یک خط l و نقطه‌ی دلخواه A غیر واقع بر آن یک و تنها یک خط گذرنده از A وجود دارد که l را قطع نمی‌کند**» . پیچیدگی اصل پنجم این سوءظن را در هندسه‌دانان برانگیخت که شاید این اصل از اصول دیگر مستقل نیست و اثبات آن توسط اصول دیگر امکان‌پذیر می‌باشد. اثبات‌های نادرست برای اثبات این اصل حجم عظیمی از وقت و انرژی عام وخاص را به هدر داد. سرانجام درسال ۱۸۲۹ **لباچفسکی** در مقاله‌ای با شجاعت تمام ادعا کرد که اصل پنجم اقلیدس نتیجه‌ی منطقی سایر اصول دیگر اقلیدس نیست و نمی‌تواند به کمک آنها اثبات شود. هنگامی که اثر او منتشر شد چندان مورد توجه قرار نگرفت. تا این‌که در سال ۱۸۴۰ مقاله‌ای به زبان آلمانی منتشر کرد که مورد توجه **گاوس** واقع شد. گاوس در نامه‌ای به **شوماخر** از آن مقاله ستایش و در عین حال تقدم خود را در کشف این حقیقت تکرار کرد. گاوس در واقع قصد مجادله و درگیری با برخی از اذهان خشک و انعطاف‌ناپذیر آن دوران را نداشته است.

لباچفسکی برای اثبات ادعای خود هندسه‌ی جدیدی ساخت که در آن اصل پنجم اقلیدس تغییر داده شده است. او قبول کرد که «**برای یک خط l و نقطه‌ی دلخواه A غیر واقع بر آن بیش از یک خط گذرنده از A وجود دارد که l را قطع نمی‌کند.**»

تا وقتی که مکاتبات گاوس پس از مرگ او در ۱۸۵۵ منتشر نشده بود، جهان ریاضی هندسه‌ی نااقلیدسی را جدی نگرفته بود. تا اینکه برخی از ریاضیدانان مانند **بلترامی**، **پوانکاره** و **ریمان** موضوع را جدی گرفتند و آن را در شاخه‌های دیگر ریاضیات، به ویژه در نظریه‌ی توابع مختلط به کار بردند.

هر هندسه غیر از هندسه‌ی اقلیدس را « **هندسه‌ی نااقلیدسی**» می‌نامیم. بسیاری از این گونه هندسه‌ها تاکنون ساخته شده‌اند. هندسه‌ی خاصی که توسط **گاوس**، **بولیایی** و **لباچفسکی** کشف شد «**هندسه‌ی هذلولوی**» نامیده می‌شود. از جمله نتایج قابل توجه در هندسه‌ی هذلولوی این است که مجموع زوایای هر مثلث کمتر از دو قائمه است و هیچ مستطیلی وجود ندارد. همچنین اگر دو مثلث متشابه باشند آنگاه قابل انطباق هستند. به عبارت دیگر ملاک «ززز» برای قابلیت انطباق درست است. علاوه براین در هندسه‌ی هذلولوی یک پاره‌خط می‌تواند به کمک یک زاویه مشخص شود. یعنی یک زاویه از مثلث متساوی‌الساقین، طول ضلع آن را به طور منحصر به فرد معین می‌کند. علاوه بر این هندسه‌ی هذلولوی واحد مطلق طول دارد. پس اگر هندسه‌ی جهان مادی هندسه‌ی هذلولوی بود، لازم نبود واحد طول با دقت در دفتر استانداردها نگهداری شود. در هندسه‌ی اقلیدسی، تقسیم هر زاویه به سه قسمت مساوی به وسیله‌ی خط‌کش غیر مدرج و پرگار نشدنی است. در هندسه‌ی هذلولوی، علاوه بر آن‌که این تقسیم نشدنی است، تقسیم هر پاره‌خط به سه قسمت برابر نیز به وسیله‌ی خط‌کش نامدرج و پرگار نشدنی است. در اندازه‌گیری بین فواصل، اختلاف بین هندسه‌ی لباچوسکی و هندسه‌ی اقلیدسی ناچیز است به طوری که تقریب حاصل قابل اعتنا نمی‌باشد. علاوه بر این هر دو هندسه سازگار و برای تجارب آدمی قابل استفاده می‌باشند.

برخی از هندسه‌های نااقلیدسی، از جمله هندسه‌ی به کار برده شده در نسبیت عمومی که به وسیله‌ی ریمان مطرح شده است امروزه در فیزیک مدرن همان قدر و ارزش را دارند که هندسه‌ی اقلیدسی در مباحث کلاسیک فیزیک دارد. برای پاره‌ای از مطالعات، هندسه‌ی اقلیدسی بهترین هندسه است. حال آن که در برخی از نظریه‌های مدرن این هندسه نارسا است و به هندسه‌ی غیر اقلیدسی نیاز داریم.

نخستین بار بولیایی هندسه‌ای بدون اصول توازی مطح کرد. یعنی مجموعه‌ای از بنداشت‌ها که نتایج آن هم در هندسه‌ی اقلیدسی و هم در هندسه‌ی نااقلیدسی برقرار است. به این هندسه، «**هندسه‌ی مطلق یا نُتاری**» گویند.

یکی دیگر از انواع هندسه، «**هندسه‌ی تصویری**» است که تعمیم منطقی «**هندسه‌ی آفین**» است. اگر مجموعه‌ی نقاط صفحه‌ی اقلیدسی را با اضافه کردن نقاط خط جدیدی موسوم به «**خط آرمانی**» گسترش دهیم به هندسه‌ی تصویری می‌رسیم. نقاط آرمانی نه تنها باعث پیچیدگی این هندسه نمی‌شوند، بلکه آن را ساده‌تر هم می‌کنند.

هندسه‌ی تصویری بیش‌تر از آن که تحلیلی باشد، ترکیبی است. پیدایش این هندسه مدیون نقاشان دوره‌ی رنسانس در به تصویر کشیدن اشیایی سه بعدی بر بوم دو بعدیِ نقاشی می‌باشد. اینان تحت تاثیر رساله‌ی افلاطون به دنبال یافتن روابط ریاضی حاکم بر پرسپکتیو بودند. تاثیر متقابل ریاضیات و هنر بر جذابیت هندسه‌ی تصویری می‌افزود.

در بدو امر ممکن است هندسه‌ی تصویری شبیه نسخه‌هایی از هندسه‌ی اقلیدسی باشد اما بین آنها یک اختلاف عمیق وجود دارد. در هندسه‌ی تصویری هر دو خط دلخواه همدیگر را قطع می‌کنند، یعنی خطوط موازی وجود ندارد.

با تولد هندسه‌ی هذلولوی و ارائه‌ی مدل برای آن و با کارهای **هیلبرت و کلاین**، هندسه‌ی مدرن در بستر جدیدی افتاد. هیلبرت اصول اقلیدس را سر و سامان داد و عصر جدیدی در دقت ریاضی آغاز شد. کلاین تا جایی پیش رفت که طی برنامه‌ی بلند پروازانه موسوم به «**ارلانگر**» ادعا نمود که هر هندسه در واقع بخشی از هندسه‌ی تصویری است و تفاوت ذاتی هندسه‌های مختلف در **گروه خودریختی‌های** آنها است. ریاضیدانان برجسته‌ای در توسعه‌ی هندسه‌ی مدرن و به ویژه هندسه‌های آفین و تصویری نقش داشتند. نام برخی از آنها زیاد برده می‌شود و ما تنها از چند نفر یاد می‌کنیم. از جمله‌ی ایشان **ریمان، مینکوفسکی، اشتاینر، اشپرنر، پاش، بلاشکه، موبیوس، کیلی، پوانکاره، بلترامی** می‌باشند.

از اواسط قرن بیستم هندسه‌ی تصویری اندکی در محاق فراموشی رفت و عده‌ی کمتری به آن پرداختند. شاید به دلیل پیچیده شدن مسائل حل نشده و عدم حمایت لازم در دانشگاه‌ها بود. ولی علی رغم این مسائل ریاضیدانان برجسته‌ای همچنان دست‌اندرکار تحقیق در این شاخه‌ی زیبای هندسه می‌باشند. مکتب‌های هندسه‌ی زیادی در پی کارهای هیلبرت و کلاین به وجود آمده است.

ریاضیدان‌هایی مانند **باخمان، بئر، بنز، کارتسل** و ... سعی در بنیان‌گذاری مبانی هندسه برپایه‌ی اصول موضوعه‌ی خاصی نمودند. این پایان‌نامه اختصاص به یکی از کارهای پرفسور **هلموت کارتسل** دارد که همراه با شاگردانش مبانی هندسه‌ی آفین را بر پایه‌ی اصول موضوعه‌ی دقیق و زیبایی مطرح نموده‌اند. وی که هم اکنون هشتاد و پنج سال دارد، همچنان به توسعه و گسترش ایده‌های جدید در این زمینه مشغول است.

مفهوم هندسه‌ی مطلق که در این پایان‌نامه مطرح شده، با آنچه در هندسه‌ی کلاسیک به این نام شناخته می‌شود کمی متفاوت است. کارتسل بر پایه‌ی اصول موضوعه‌ی بدیهی و عمومی‌تر مفهوم حرکت را به عنوان یک مفهوم کلیدی برای توسعه‌ی ایده‌های خود به کار می‌برد. در این نوشتار عمدتاً به مفهوم اندازه‌ی پاره‌خط پرداخته شده است. برای این کار ابتدا تعاریف و مفاهیم مورد نیاز به اختصار و به‌طور عمده بدون اثبات بیان شده‌اند. اثبات قضایا را می‌توان در مرجع [۱۱] مشاهده نمود. همچنین **خودریختی‌ها، حرکت‌ها، انعکاس‌های نقطه‌ای و خطی** معرفی و قضیه‌های مربوط به آن‌ها بررسی می‌شوند. سپس مفهوم $K-$**لوپ** و چگونگی به‌دست آوردن این ساختار جبری از یک صفحه‌ی مطلق مطرح می‌گردد. در ادامه گروه حرکت‌ها و یک زیرگروه مهم از آن، گروه حرکت‌های سره را معرفی می‌کنیم.

برخی از هندسه‌دان‌های جدید حرکت را اصطلاح تعریف نشده در نظر می‌گیرند و بنداشت‌هایی برای این اصطلاح می‌گذارند. در نگاهی دیگر فواصل مطرح می‌شوند و حرکت به عنوان تبدیل یک به یک صفحه به روی خودش که فاصله را حفظ می‌کند، تعریف می‌شود. احکام هندسه‌ی اقلیدسی را می‌توان با هر دو روش اثبات کرد. در واقع، فلیکس کلاین در برنامه‌ی ارلانگر خود در ۱۸۷۲، هندسه را مطالعه‌ی آن خواصی از اشکال تعریف می‌کند که براثر گروه خاصی از تبدیلات پایا می‌مانند. اما در این پایان‌نامه حرکت را نه به صورت بنداشتی، بلکه به عنوان تعریف بیان خواهیم کرد.

در فصل سوم با تعریف **قاب ارجاع**، حرکت‌های خاصی در صفحه‌ی E را معرفی می‌کنیم. همچنین بیان می‌کنیم که با تعریف مناسب " + " زوج $(E,+)$ یک $K-$ لوپ است.

علاوه بر این **تابع قدرمطلق و تابع فاصله** را برای اندازه‌گیری طول بازه‌ها تعریف کرده و ثابت می‌کنیم که تابع فاصله در نامساوی مثلث صدق می‌کند. در ادامه به بیان قضایایی در مورد تابع فاصله می‌پردازیم.

در فصل چهارم تابع تفکیک، تابع ترتیب دایره‌ای، گروه تفکیک شده، گروه مرتب دایره‌ای و ترتیب دایره‌ای معکوس را معرفی و خواص و روابط آنها را بررسی می‌کنیم.

در فصل پنجم **دو زاویه‌ی هم‌نهشت و مزدوج** را تعریف کرده سپس تابعی را به عنوان متر برای اندازه‌گیری زاویه‌ها معرفی می‌کنیم. همچنین رابطه‌ی بین زاویه‌های هم‌نهشت و مزدوج را با این تابع بیان می‌کنیم. علاوه براین جمع دو زاویه را تعریف کرده و خواص آن را بررسی می‌کنیم.

در فصل ششم با استفاده از مفاهیم **نگاشت انتقال چپ**، **گروه نگاشت‌های داخلی چپ**، **نگاشت انسداد و ضرب شبه مستقیم** را تعریف می‌کنیم و سرانجام به اثبات یک نتیجه‌ی مهم پایان‌نامه می‌پردازیم.

فصل ۲

پیش نیازها

در این فصل به بررسی برخی مفاهیم اولیه‌ی مورد نیاز مانند صفحه‌ی آفین، صفحه‌ی تصویری، صفحه‌ی مطلق، حرکت و... می‌پردازیم. اثبات قضایایی که مطرح نشده در مرجع [۱۱] موجود است و از بیان آنها صرف نظر شده است.

۲—۱ صفحه‌ی آفین

تعریف **۱.۲** (**فضای وقوعی**) فرض کنیم E یک مجموعه باشد که اعضای آن را **نقطه** و $\mathcal{L} \subseteq \mathbf{P(E)}$ زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی توانی E باشد که اعضای آن را **خط** می‌نامیم. زوج $(E, \mathcal{L})$ را یک فضای وقوعی می‌نامیم، هر گاه بُنداشتهای زیر برقرار باشند.

$\mathbf{I}_1$. برای هر $x, y \in E$ که $x \neq y$، دقیقاً یک خط $G \in \mathcal{L}$ وجود دارد که $x, y \in G$.

$\mathbf{I}_2$. برای هر $G \in \mathcal{L}$ همواره $|G| \geq 2$.

برای هر $x, y \in E$، خط منحصر به فردی را که $\mathbf{I}_1$ مشخص می‌کند با $\overline{x, y}$ نشان می‌دهیم. اگر $x \in G$، اصطلاحاً می‌گوییم x بر خطG واقع است، x نقطه‌ای از G است یا x روی G قرار دارد.

تعریف **۲.۲** زیر مجموعه‌ی $T \subseteq E$ یک زیر فضا از $(E, \mathcal{L})$ نامیده می‌شود هرگاه برای هر x, y که $x, y \in T$ و $x \neq y$ داشته باشیم $\overline{x, y} \subseteq T$.

مجموعه‌ی $\mathcal{T}$ را مجموعه تمام زیر فضاهای $(E,\mathcal{L})$ در نظر می‌گیریم.

تعریف ۳.۲ مجموعه‌ی نقاط $M \subseteq E$ **هم‌خط** نامیده می‌شوند هر گاه بر یک خط واقع باشند.

تعریف ۴.۲ برای هر $S \subset E$، $\overline{S} := \bigcap\{T \in \mathcal{T} | S \subseteq T\}$ **بستار وقوعی** نامیده می‌شود. هر زیر فضایی از E را که بستار سه نقطه‌ی ناهم خط باشد، **صفحه** گویند.

تعریف ۵.۲ اگر $(E,\mathcal{L})$ و $(E',\mathcal{L}')$ دو فضای وقوعی باشند، نگاشت دوسویی $\phi : E \to E'$ یک **یکریختی** بین $(E,\mathcal{L})$ و $(E',\mathcal{L}')$ نامیده می‌شود هرگاه

$$G \in \mathcal{L} \Longleftrightarrow \phi(G) \in \mathcal{L}'$$

در حالتی که $(E',\mathcal{L}') = (E,\mathcal{L})$، یکریختی را **خودریختی** می‌نامیم.

تعریف ۶.۲ خطوط G و H را **موازی** می‌نامیم و می‌نویسیم $G \parallel H$، هر گاه $G = H$ یا $G \cap H = \emptyset$.

تعریف ۷.۲ فضای وقوعی $(E,\mathcal{L})$ را یک **صفحه‌ی آفین** می‌نامیم، هر گاه بنداشت‌های زیر برقرار باشند.

$\mathbf{E}_۱$. دست‌کم سه نقطه‌ی ناهم‌خط در E وجود دارند.

$\mathbf{P}$. (**بنداشت توازی**) برای هر زوج نقطه و خط $(x,G) \in P \times \mathcal{L}$ که $x \notin G$، دقیقاً یک خط H وجود دارد که $x \in H$ و $G \cap H = \emptyset$. خط H را با نماد $\{x||G\}$ نیز نمایش می‌دهیم.

۲—۲ صفحه‌ی تصویری

تعریف ۸.۲ (**صفحه‌ی تصویری**) فضای وقوعی $(E,\mathcal{L})$ همراه با بنداشت $\mathbf{E}_۱$، صفحه‌ی تصویری نامیده می‌شود، هر گاه بنداشت‌های زیر برقرار باشند.

$\mathbf{I}_۳$. برای هر $G \in \mathcal{L}$ ، $|G| \geq ۳$.

$\mathbf{I}_۴$. برای هر $G, H \in \mathcal{L}$ ، $G \cap H \neq \emptyset$.

۲–۳ نگاشت بینیت و ترتیب

برای مجموعه‌ای مانند M به روش‌های متفاوت می‌توان یک ساختار ترتیبی معرفی کرد. یکی از این روش‌ها استفاده از یک رابطه‌ی موسوم به رابطه‌ی بینیت است.

قرارداد ۹.۲ $M^{3'} := \{(x,y,z) \in M^3 : x \neq y, z\}$.

تعریف ۱۰.۲ نگاشت بینیت به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} (\ |\ ,\ ) : M^{3'} &\to \{-1, 1\} \\ (a,b,c) &\mapsto (a|b,c) \end{aligned}$$

به قسمی که در آن ویژگی‌های $\mathbf{Z}_1$، $\mathbf{Z}_2$، $\mathbf{Z}_3$ و $\mathbf{Z}_P$ به شکل زیر صادق هستند.

$\mathbf{Z}_1$. برای هر $(a,b,c) \in M^{3'}$، همواره $(a|b,c) = (a|c,b)$.

$\mathbf{Z}_2$. برای هر $a,b,c,d \in M$ که $a \neq b,c,d$، $(a|b,c)(a|c,d) = (a|b,d)$.

$\mathbf{Z}_3$. برای سه عضو متمایز $a,b,c \in M$، دقیقاً یکی از مقادیر $(c|a,b)$، $(b|a,c)$ و یا $(a|b,c)$ برابر -1 است.

$\mathbf{Z}_P$. برای هر سه نقطه‌ی ناهم‌خط $a,b,c \in E$ که $(x|b,c) = -1$ و $(y|a,x) = -1$ آنگاه

$$\overline{c,y} \cap \{x | (x|a,b) = -1)\} \neq \emptyset.$$

هر گاه داشته باشیم $(c|a,b) = -1$ می‌گوییم c بین a و b است.

واضح است که از $\mathbf{Z}_2$ و $b = c = d$ نتیجه می شود که برای هر $a,b \in M$، $a \neq b$ همواره $(a|b,b) = 1$.

قضیه ۱۱.۲ اگر M به وسیله‌ی رابطه‌ی $\leq$ مرتب شده باشد، آنگاه نگاشت زیر یک نگاشت بینیت است.

$$(\ |\ ,\ ) : M^{3'} \to \{-1, 1\}$$
$$(a,b,c) \mapsto (a|b,c) = \begin{cases} -1 & c < a < b \quad \text{یا} \quad b < a < c \\ 1 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

قضیه ۱۲.۲ فرض کنیم M یک مجموعه است که $|M| \geq ۳$، $۰, ۱ \in M$ و $۱ \neq ۰$. در این صورت به ازای هر نگاشت بینیت $(\ |\ ,\ )$ روی M دقیقاً یک ترتیب تام $\leq$ روی M وجود دارد به قسمی که:

(۱) $۰ < ۱$

(۲) $z < x < y$ یا $y < x < z \iff (x|y, z) = -۱$

که در آن رابطه‌ی $<$، برای $p \neq q$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$p < q \iff \begin{cases} (p|۰, q)(۰|۱, p) = -۱ & p \neq ۰ \\ (۰|۱, q) = ۱ & p = ۰ \end{cases}$$

تعریف ۱۳.۲ (**تقسیم به دو طرف**) فرض کنیم $(E, \mathcal{L})$ یک فضای وقوعی باشد که بنداشت‌های $\mathbf{E}_۱$ و $\mathbf{I}_۳$ برای آن برقرار است. روی $(E, \mathcal{L})$ مفهوم تقسیم به دو طرف به صورت زیر تعریف می‌شود.

اگر $L \in \mathcal{L}$ خطی از فضای وقوعی باشد، در صورتی که دو زیر مجموعه‌ی $\{L\}^+$ و $\{L\}^-$ از E وجود داشته باشند که $E = L \cup \{L\}^+ \cup \{L\}^-$ و این اجتماع یک افراز برای E باشد، آنگاه مجموعه‌های $\{L\}^+$ و $\{L\}^-$ دو طرف L نامیده می‌شوند.

گوییم نقاط $a, b \in E \setminus L$ در یک طرف L واقعند و می‌نویسیم $(L|a, b) = ۱$، هر گاه داشته باشیم $a, b \in \{L\}^+$ یا $a, b \in \{L\}^-$. در غیر این صورت گوییم a, b در دو طرف L واقعند و می‌نویسیم $(L|a, b) = -۱$.

تعریف ۱۴.۲ (**نگاشت ترتیب**) اگر قرار دهیم

$$(\mathcal{L} \times E \times E)' := \{(L, a, b) \in \mathcal{L} \times E \times E \ : \ a, b \in E \setminus L\}$$

آنگاه نگاشت α به صورت

$$\alpha : (\mathcal{L} \times E \times E)' \to \{-۱, ۱\} \quad ; \quad (L, a, b) \mapsto (L|a, b)$$

را یک نگاشت ترتیب می‌نامیم هر گاه ویژگی‌های زیر را داشته باشد.

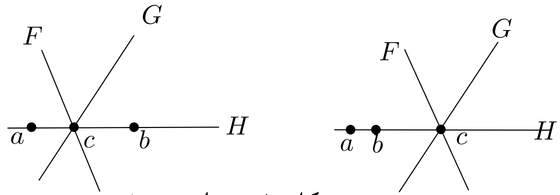
(۱) برای هر $L \in \mathcal{L}$ و هر $a, b \in E \setminus L$، $(L|a, b) = (L|b, a)$.

(۲) برای هر $L \in \mathcal{L}$ و هر $a, b, c \in E \setminus L$، $(L|a, b)(L|b, c) = (L|a, c)$.

۲–۴ صفحه‌ی مرتب

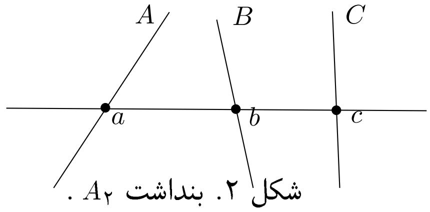
تعریف ۱۵.۲ (**صفحه‌ی مرتب**) فرض کنیم $(E,\mathcal{L})$ یک فضای وقوعی باشد که بنداشت‌های $\mathbf{E}_1$ و $\mathbf{I}_3$ در آن برقرار باشند و α یک نگاشت ترتیب روی آن باشد. سه تایی $(E,\mathcal{L},\alpha)$ یک **صفحه‌ی مرتب** نامیده می‌شود، هرگاه بنداشت‌های زیر برقرار باشند.

$\mathbf{A}_1$. به ازای هر $a,b,c\in E$ و $F,G,H\in\mathcal{L}$ که $a,b,c\in H$ و $c\in F\cap G$ و $a,b\notin F,G$، $(F|a,b)=(G|a,b)$.



شکل ۱. بنداشت A_1

$\mathbf{A}_2$. فرض کنیم $a,b,c\in E$ سه نقطه‌ی متمایز هم خط و $A,B,C\in\mathcal{L}$ سه خط باشند به قسمی که $A\cap\overline{a,b}=a$ ، $B\cap\overline{a,b}=b$ ، $C\cap\overline{a,b}=c$. در این صورت دقیقاً یکی از مقادیر $(A|b,c)$، $(B|a,c)$ و یا $(C|a,b)$ برابر ۱– است.



شکل ۲. بنداشت A_2 .

$\mathbf{V}_1$. برای هر $L\in\mathcal{L}$ و هر $a,b\in E\setminus L$ که $(L|a,b)=-1$ داریم $L\cap\overline{a,b}\neq\emptyset$.

قضیه ۱۶.۲ روی هر خط $L\in\mathcal{L}$ از صفحه‌ی مرتب $(E,\mathcal{L},\alpha)$ یک رابطه‌ی بینیت به صورت زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned}(\ |\ ,\ )\ :L^{3'}\quad &\to\{-1,1\}\\ (c,a,b)\quad &\mapsto (c|a,b):=\ (H|a,b)\end{aligned}$$

به قسمی که $H\in\mathcal{L}$ ، $c\in H$ و $H\neq L$.

تعریف ۱۷.۲ اگر $a\in E$ و $T\in\mathcal{T}$ به گونه‌ای باشد که $a\notin T$ در این صورت **نیم فضای** $\overrightarrow{T,a}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\overrightarrow{T,a}:=\{x\in E\backslash T\mid\ ]x,a[\ \cap T=\emptyset\}$$

تعریف ۱۸.۲ زیر مجموعه‌ی $H \subseteq E$ را یک **نیم خط باز** می‌نامیم هر گاه دو نقطه‌ی متمایز a,b وجود داشته باشند که

$$H \;=\; \overrightarrow{a,b} \;:=\; \{x \in \overline{a,b} :\ (a|b,x) = ۱\}$$

همچنین قرار می دهیم

$$.\overline{\overrightarrow{a,b}} \;:=\; \{x \in \overline{a,b}\ :\ (a|b,x) = -۱\}$$

قضیه ۱۹.۲ فرض کنیم $a,b \in E$ دو نقطه‌ی متمایز باشند.

(۱) از $b' \in \overrightarrow{a,b}$ نتیجه می‌شود $.\overrightarrow{a,b} = \overrightarrow{a,b'}$

(۲) از $c \in \overline{\overrightarrow{a,b}}$ نتیجه می‌شود $.\overrightarrow{a,c} = \overline{\overrightarrow{a,b}}$ یعنی $\overline{\overrightarrow{a,b}}$ یک نیم خط است به شرط آنکه $.\overline{\overrightarrow{a,b}} \neq \emptyset$

(۳) $.\overline{a,b} = \overrightarrow{a,b} \,\dot\cup\, \{a\} \,\dot\cup\, \overline{\overrightarrow{a,b}}$

(۴) از $\overrightarrow{b',c'} \subseteq \overrightarrow{b,c}$ و $b \neq b'$ نتیجه می‌شود $.(b'|c',b) = -۱$

(۵) چنانچه $a \neq c$ داریم $\overrightarrow{a,c} \subset \overrightarrow{b,a}$ اگر و تنها اگر $.(a|b,c) = -۱$

تعریف ۲۰.۲ زوج $(\overrightarrow{a,b}\ ;\ \overrightarrow{d,c}) \;:=\; \sphericalangle(b,a,c)$ یک **زاویه** نامیده می‌شود هر گاه $.a = d$

زاویه‌ی $\sphericalangle(b,a,c)$ را سره گوییم هرگاه نقاط a، b و c هم‌خط نباشند. در حالتی که

$$\overline{\overrightarrow{a,c}} \neq \emptyset \ ,\ \overline{\overrightarrow{a,b}} \neq \emptyset$$

زوایای $(\overline{\overrightarrow{a,b}}\ ;\ \overline{\overrightarrow{a,c}})$ و $(\overline{\overrightarrow{a,b}}\ ;\ \overrightarrow{a,c})$ به ترتیب زوایای **متقابل به راس** و **مکمل** زاویه $\sphericalangle(b,a,c)$ نامیده می‌شوند.

تعریف ۲۱.۲ مفاهیم پاره خط باز و بسته برای نقاط متمایز $a,b \in E$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$]a,b[\;:=\; \{x \in \overline{a,b}\ :\ (x|a,b) = -۱\}$$

$$[a,b] \;:=\;]a,b[\,\cup \{a,b\}$$

۲–۵ صفحه‌ی مطلق

علاوه بر روابط وقوع و ترتیب ، برای صفحات کلاسیک وقوعی یک ساختار هندسی دیگر موسوم به هم‌نهشتی مطرح می شود که به کمک آن می‌توان مفهوم طول پاره خط را تعریف کرد. سپس مفهوم گروه حرکت‌های صفحه تعریف می‌شود که بر اساس ویژگی‌های آن صفحات مطلق طبقه‌بندی می‌شوند.

تعریف ۲۲.۲ یک رابطه‌ی دوتایی $\equiv$ را روی $E\times E$ رابطه‌ی هم‌نهشتی می‌نامیم هر گاه بنداشت‌های زیر برقرار باشند.

$\mathbf{K}_1$. رابطه‌ی $\equiv$، یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

$\mathbf{K}_2$. برای هر $a,b\in E$، $(a,b)\equiv(b,a)$.

$\mathbf{K}_3$. برای هر $a,b,c\in E$، اگر $(a,a)\equiv(b,c)$، آنگاه $b=c$.

تعریف ۲۳.۲ (صفحه‌ی مطلق)

فرض کنیم $(E,\mathcal{L},\alpha)$ یک صفحه‌ی مرتب باشد. یعنی بنداشت‌های $\mathbf{I}_1$، $\mathbf{I}_3$، $\mathbf{E}_1$، $\mathbf{A}_1$، $\mathbf{A}_2$ و $\mathbf{V}_1$ برای آن برقرار باشد. اگر $\equiv$ یک رابطه‌ی هم‌نهشتی روی $E\times E$ باشد، آن گاه $(E,\mathcal{L},\alpha,\equiv)$ را یک صفحه‌ی مطلق می‌نامیم هر گاه بنداشت‌های زیر برقرار باشند.

$\mathbf{V}_2$. برای هر $a,b,c\in E$ که $a\neq b$ و هر $L\in\mathcal{L}$ که $c\in L$ دقیقاً دو نقطه‌ی متمایز $d,d'\in L$ وجود دارند که $(a,b)\equiv(c,d)\equiv(c,d')$.

$\mathbf{V}_3$. برای سه نقطه‌ی هم‌خط و متمایز $a,b,c\in E$ که $(a,b)\equiv(a,c)$، $(a|b,c)=-1$.

$\mathbf{V}_4$. برای هر سه نقطه‌ی هم‌خط و متمایز $a,b,c\in E$ و سه نقطه‌ی هم‌خط و متمایز $a',b',c'\in E$ که $(a,b)\equiv(a',b')$، $(b,c)\equiv(b',c')$ و $(b|a,c)=(b'|a',c')$، $(a,c)\equiv(a',c')$.

$\mathbf{V}_5$. برای هر سه نقطه‌ی ناهم‌خط $a,b,c\in E$ و هر دو نقطه‌ی $a',b'\in E$ که $(a,b)\equiv(a',b')$، دقیقاً دو نقطه‌ی c' و c'' وجود دارند به قسمی که

$$(b,c)\equiv(b',c')\equiv(b',c'')$$

$$(a,c)\equiv(a',c')\equiv(a',c'')$$

$\mathbf{V}_6$. اگر a,b,c سه نقطه‌ی ناهم‌خط، $d\in\overline{a,b}$ و $a',b',c',d'\in E$ چهار نقطه باشند به قسمی که $(a,b)\equiv(a',b')$، $(b,c)\equiv(b',c')$، $(a,c)\equiv(a',c')$، $(a,d)\equiv(a',d')$ و $(b,d)\equiv(b',d')$، آنگاه $(c,d)\equiv(c',d')$.

V_7. برای چهار نقطه‌ی متمایز $a, b, c, c' \in E$ به قسمی که $(a,c) \equiv (a,c')$ و $(b,c) \equiv (b,c')$، داریم $c, c' \notin \overline{a,b}$ و $(\overline{a,b}|c,c') = -۱$.

در این قسمت فرض کنیم $(E, \mathcal{L}, \alpha, \equiv)$ یک صفحه‌ی مطلق است.

قضیه ۲۴.۲ فرض کنیم $a, b, c, d \in E$، $a \neq b$ و $c \neq d$. در این صورت

(۱) $\overrightarrow{a,b}$ یک نیم خط است.

(۲) روی $\overrightarrow{a,b}$ و $\overline{\overrightarrow{a,b}}$ به ترتیب دقیقاً یک نقطه‌ی $b' \in \overrightarrow{a,b}$ و یک نقطه‌ی $b'' \in \overline{\overrightarrow{a,b}}$ وجود دارد به قسمی که $(c,d) \equiv (a,b') \equiv (a,b'')$.

(۳) ویژگی **Z** به صورت زیر برقرار است.

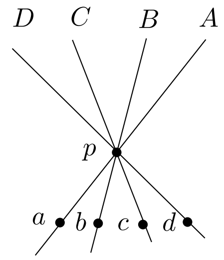
Z. برای هر زوج نقطه‌ی $(a,b) \in E^۲$ که $a \neq b$، یک $x \in \overline{a,b}$ وجود دارد که $(a|b,x) = -۱$.

قضیه ۲۵.۲ فرض کنیم $A, B, C, D \in \mathcal{L}$ چهار خط متمایز باشند که یکدیگر را در نقطه‌ی P قطع کرده‌اند، $a \in A \backslash \{P\}$، $b \in B \backslash \{P\}$، $c \in C \backslash \{P\}$ و $d \in D \backslash \{P\}$ در این‌صورت

۱) از $(A|b,c) = ۱$ نتیجه می‌شود $(B|a,c) = -(C|a,b)$.

۲) $(A|b,c) \cdot (B|c,a) \cdot (C|a,b) = -۱$.

۳) $(A|c,d) \cdot (B|c,d) = (C|a,b)(D|a,b)$.



شکل ۳.

اثبات.

۱) طبق بنداشت **Z** یک $c' \in C$ وجود دارد به قسمی که $(p|c,c') = -۱$ در نتیجه با توجه به‌اینکه $(A|b,c) = ۱$ و طبق تعریف نگاشت مرتب

$$(A|b,c') = (A|b,c) \cdot (A|c,c') = (A|b,c) \cdot (p|c,c') = -۱.$$

از بنداشت $\mathbf{V}_۱$ نتیجه می‌شود نقطه‌ی $a_\circ \in \overline{b,c'} \bigcap A$ وجود دارد که $(a_\circ|b,c') = -۱$. از قضیه‌ی ۱۶.۲ و بنداشت $\mathbf{Z}_۳$ داریم

$$(b|a_\circ,c') = (c'|a_\circ,b) = ۱$$

پس $(C|a_\circ,b) = ۱$. علاوه براین

$$(B|a_\circ,c) = (B|a_\circ,c') \cdot (B|c',c) = (b|a_\circ,c') \cdot (p|c',c) = -۱$$

همچنین از $\mathbf{A}_۱$ برای هر $a \in A\backslash\{p\}$ نتیجه می‌شود $(B|a,a_\circ) = (C|a,a_\circ)$. به این ترتیب از آنچه گفته شد

$$(B|a,c) = (B|a,a_\circ) \cdot (B|a_\circ,c) = -(B|a,a_\circ) = -(C|a,a_\circ) = -(C|a,a_\circ) \cdot (C|a_\circ,b) = -(C|a,b).$$

۲) از قسمت (۱) نتیجه می‌شود.

۳) از قسمت (۲) نتیجه می‌شود زیرا

$$(A|c,d) \cdot (B|c,d) = (C|d,a) \cdot (D|a,c) \cdot (C|d,b) \cdot (D|b,c) = (C|a,b) \cdot (D|a,b).$$

■

قضیه ۲۶.۲ فرض کنیم $a,b,c \in E$ سه نقطه‌ی متمایز هم‌خط باشند. در این صورت هر سه نقطه‌ی a',b',c' که $(a,b,c) \equiv (a',b',c')$، یعنی $(a,b) \equiv (a',b')$، $(a,c) \equiv (a',c')$ و $(b,c) \equiv (b',c')$، هم‌خط خواهند بود و $(a|b,c) = (a'|b',c')$.

تعریف ۲۷.۲ در صفحه‌ی $(E,\mathcal{L},\alpha,\equiv)$، دو نقطه‌ی ثابت ۱ ,۰ را در نظر می گیریم. زاویه‌های $\alpha := \sphericalangle(b,a,c)$ و $\alpha' := \sphericalangle(b',a',c')$ را **هم‌نهشت** می‌نامیم و می‌نویسیم $\alpha \equiv \alpha'$، هر گاه به ازای $b_\circ \in \overrightarrow{a,b}$، $c_\circ \in \overrightarrow{a,c}$، $b'_\circ \in \overrightarrow{a',b'}$ و $c'_\circ \in \overrightarrow{a',c'}$ که

$$(a,b_\circ) \equiv (a,c_\circ) \equiv (a',b'_\circ) \equiv (a',c'_\circ) \equiv (\circ,۱)$$

داشته باشیم $(b_\circ,c_\circ) \equiv (b'_\circ,c'_\circ)$.

از قضیه‌ی ۲۶.۲ و $\mathbf{V}_٦$ نتیجه می‌شود که هم‌نهشتی زاویه‌ها مستقل از انتخاب ۱ ,۰ است.
(بعد از تعریف حرکت‌های یک صفحه‌ی مطلق به ذکر تعریفی معادل با این تعریف خواهیم پرداخت.)