دانشگاه کردستان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش جبر

عنوان:

حلقه‌ی چندجمله‌ایهای دیفرانسیلی ماتریسهای مثلثی

پژوهشگر:
نرگس باقرشاهی

استاد راهنما:
دکتر محمدنادر قصیری

استاد مشاور:
دکتر هوگر قهرمانی

تیر ماه ۸۸

کلیه حقوق مادی و معنوی مترتب بر نتایج مطالعات،
ابتکارات و نو آوریهای ناشی از تحقیق موضوع
این پایان نامه متعلق به دانشگاه کردستان است .

تعهد نامه

اینجانب نرگس باقرشاهی دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه کردستان، دانشکده علوم گروه ریاضی تعهد می نمایم که محتوای این پایان نامه نتیجه تلاش و تحقیقات خود بوده و از جایی کپی برداری نشده و به پایان رساندن آن نتیجه تلاش و مطالعات مستمر اینجانب و راهنمایی و مشاوره اساتید بوده است .

با تقدیم احترام
نرگس باقرشاهی
۸۹/۴/۱۴

قدردانی

در سایه سار درختی تنومند که بی طمع حتّی جرعه ای آب ، سایه بخشیده است بی گمان باید چلّه نشین شد که، من علّمنی حرفاً، پایبندی شیرینی است .

بدین وسیله از زحمات بی دریغ استاد راهنمای عزیزم، جناب آقای دکتر محمد نادرقصیری که در تمامی مراحل انجام این پایان نامه مرا یاری نمودند و همچنین از جناب آقای دکتر هوگر قهرمانی که در امر مشاوره مرا یاری فرمودند کمال تشکر و قدردانی را دارم. همچنین از اساتید گروه ریاضی که افتخار شاگردی ایشان را داشته ام تشکر و قدردانی می نمایم .

از همسر عزیزم آقای دکتر ارسلان رحمانی که همواره همراه و یاور من بوده اند تقدیر و تشکر می کنم و همچنین از خانواده ی عزیزم که شرایط مطلوبی در اختیار من قرار دادند تا این پایان نامه تدوین گردد، تشکر وقدر دانی می کنم، و از خداوند منّان خواستارم مرا یاری فرمایید تا گوشه ای از زحمات ایشان را جبران کنم .

چکیده

فرض کنید R و S دو حلقه‌ی یکدار و M یک $(R,S)-$دو مدول یکانی باشد. ما در این پایان‌نامه نخست ساختار ایده‌آل ها، شرایط زنجیری، همسانی ها، و مشتق های حلقه‌ی ماتریسی $T = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$ را تعیین کرده، سپس نمایشی مثلثی برای حلقه‌ی چندجمله‌ای های دیفرانسیلی $T[\theta; d]$ را که در آن d یک مشتق T و θ یک متغیر است، ارائه خواهیم نمود.

واژگان کلیدی: مشتق، همسانی، حلقه‌ی چندجمله‌ای هایی دیفرانسیلی، حلقه‌ی ماتریس های بالا مثلثی.

فهرست مندرجات

تاریخچه

معرفی و مطالعه‌ی مشتق ساختمان‌های جبری از سالهای ۱۹۳۰ آغاز شده است و بتدریج توسط ریاضیدانان این مفهوم تعمیم یافته و در شاخه‌های مختلف علوم مورد بررسی قرار گرفته است. امروزه مشتق (از هر نوع) نه تنها در جبر، بلکه در بسیاری از زمینه‌های دیگر همچون آنالیز (به عنوان یکی از مفاهیم بنیادی)، آمار، فیزیک و مکانیک نیز مورد تحقیق و استفاده قرار می‌گیرد.

مشتق جبر حلقه‌های بالا مثلثی و بعضی از زیرجبرهای آنها برای سالهای متمادی موردنظر ریاضیدانان بوده است و تحقیقات بسیار بر روی آنها انجام شده است. کولهو (Coelho) و میلز (MIlies) [4] ،در سال ۱۹۸۱ ثابت کردند که هر مشتق حلقه‌ی بالا مثلثی $T_n(R)$، مجموع یک مشتق داخلی روی $T_n(R)$ و مشتقی که توسط R روی $T_n(R)$ القا می‌شود، می‌باشد.

نتایج مشابهی هم توسط جندروپ (Jundrup) [8]، در سال ۱۹۹۵ در مورد مشتق حلقه‌های ماتریسی کامل $M_n(R)$ نیز به اثبات رسید. بنکارت (Benkart)[1]، در سال ۱۹۸۱، مشتق حلقه‌های ماتریسی کامل $M_n(R)$ را تحت شرایط خاص، زمانی که R یک میدان باشد و $char(R) \neq ۲,۳$ و $n > ۲$ ارائه داده است. در سال ۲۰۰۸ (قهرمانی وموسوی) [5]، یک نمایش مثلثی برای حلقه‌ی چندجمله‌ایهای دیفرانسیلی $T[\theta; d]$ را که در آن d یک مشتق T و θ یک متغیر است، ارائه نمودند.

حال به معرفی پایان‌نامه حاضر می‌پردازیم. این پایان‌نامه شامل چهار فصل است. فصل اول به تعاریف و برخی از قضیه‌های اولیه و معرفی حلقه‌های چندجمله‌ای $R[x]$ و چندجمله‌ایهای اریب $R[x;\sigma]$ و $R[x;\delta]$ که $\sigma \in EndR$ و $\delta \in \mathrm{Der}\, R$، و چند نتیجه و قضیه در مورد آنها اختصاص دارد. در فصل دوم ساختار ایده آل ها و رادیکال های حلقه ی ماتریسی $T = \begin{pmatrix} R & M \\ ۰ & S \end{pmatrix}$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. فصل سوم این پایان‌نامه به بررسی و بحث روی مشتق حلقه‌ی ماتریسی مثلثی شکل تعمیم یافته اختصاص یافته است. قضایای بسیار مهمی در این فصل اثبات می‌شود که محور اصلی پایان‌نامه‌ی حاضر می‌باشد. فصل چهارم پایان‌نامه به حلقه‌ی چندجمله‌ایهایی دیفرانسیلی ماتریسهای مثلثی شکل اختصاص می‌یابد. نتایج بدست آمده زمینه را برای تحقیقات بعدی نیز فراهم می آورد.

فصل ۱

پیش نیازها

فصل حاضر شامل سه بخش است. در بخش اوّل تعاریف، قراردادها و قضایای اوّلیه مورد نیاز این پایان‌نامه ذکر شده است. در بخش دوم تعاریف و قضایای اوّلیه مشتق را عنوان می‌کنیم و در بخش سوم نیز به بررسی ساختار مدولهاو $R-$ همریختی ها می‌پردازیم.

۱.۱ قراردادها، تعاریف و قضایای اوّلیه

قرارداد. در سرتاسر این پایان نامه فرض می کنیم که حلقه های مورد بررسی لزوماً تعویض پذیر نیستند، اما دارای عضو همانی ضربی $(0 \neq 1)$ اند، مگر اینکه خلاف آن ذکر شود.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید $(R,+,.)$ یک حلقه و I یک زیرگروه جمعی از R باشد. در این صورت،

(i) I را یک **ایده‌آل چپ** R گویند اگر به ازای هر $a \in I$ و $r \in R$، $ra \in I$.

(ii) I را یک **ایده‌آل راست** R گویند اگر به ازای هر $a \in I$ و $r \in R$، $ar \in I$.

(iii) I را یک **ایده‌آل** (دو طرفه) R گویند اگر هم ایده‌آل چپ و هم ایده‌آل راست R باشد.

تعریف ۲.۱.۱. اگر A و B دو ایده آل حلقه ی R باشند، ایده آل AB را چنین تعریف می کنیم:

$$AB = \{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i | a_i \in A, b_i \in B, n \in \mathbb{N}\}.$$

تعریف ۳.۱.۱. ایده‌آل M در حلقه‌ی R را **ماکزیمال** گویند اگر $M \neq R$ و به ازای هر ایده‌آل N که $M \subseteq N \subseteq R$، $N = M$ یا $N = R$.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه باشد. عنصر $a \in R$ را **پوچ‌توان** گوئیم هرگاه عدد صحیح مثبتی چون n موجود باشد به طوری که $a^n = 0$. عنصر $a \in R$ را **خودتوان** گوئیم هر گاه $a^2 = a$.

تعریف ۵.۱.۱.

(i) ایده‌آل I **پوچ** نامیده می‌شود هر گاه هر عنصر آن پوچ‌توان باشد.

(i) ایده‌آل I **پوچ‌توان** نامیده می‌شود هر گاه به ازای عدد صحیح و مثبتی چون n، $I^n = 0$.

تبصره ۶.۱.۱. به وضوح، هر ایده‌آل پوچ‌توان، پوچ است ولی، همانگونه که مثال بعدی نشان می‌دهد، عکس این مطلب درست نیست.

مثال ۷.۱.۱. حلقه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$R = \frac{\mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots]}{(x_1^2, x_2^3, \ldots)}$$

قرار دهید $I = (x_1^2, x_2^3, \ldots)$ و فرض کنید $A = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots)$، که در آن $\bar{x}_i = x_i + I$ برای هر $i \in \mathbb{N}$.
به وضوح ایده‌آل A پوچ است امّا A یک ایده آل پوچ‌توان نیست، زیرا اگر به ازای $n \geq 1$، $A^n = 0$، آنگاه $a^n = 0$ برای هر $a \in A$، امّا $(\bar{x}_n)^{n+1} = 0$ در حالی که $(x_n)^n \neq 0$ زیرا

$$(\bar{x}_n)^{n+1} = (x_n + I)^{n+1} = x_n^{n+1} + I = I$$

تعریف ۸.۱.۱. رابطه‌ی R را روی مجموعه‌ی S یک رابطه‌ی **جزئاً مرتب** روی S نامند هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

(i) I به ازای هر $a \in S$، $(a, a) \in R$ (یعنی، R انعکاسی است).

(ii) I به ازای هر $a, b \in S$، اگر $(a, b) \in R$ و $(b, a) \in R$، آنگاه $a = b$ (یعنی ، R پاد متقارن است).

(iii) I به ازای هر $a, b, c \in S$ اگر $(a, b) \in R$ و $(b, c) \in R$، آنگاه $(a, c) \in R$ (یعنی، R متعدی است).

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید $(S, \leq)$ یک مجموعه ی جزئاً مرتب باشد. می گوییم عنصر $e \in S$ یک عضو ماکزیمال S است اگر به ازای هر a در S ، اگر $e \leq a$ ، $e = a$.

تعریف ۱۰.۱.۱. مجموعه‌ی S همراه با یک رابطه‌ی ترتیب جزئی، یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب (poset) نامیده می شود. اگر S یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب با رابطه‌ی ترتیب جزئی $\leq$ باشد، آنگاه می نویسیم: $(S, \leq)$.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید $(S, \leq)$ یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب و A زیر مجموعه‌ای از S باشد. عنصر $c \in S$ را یک **کران بالای (کران پایین)** مجموعه‌ی A می نامند هرگاه به ازای هر a در A، $a \leq c$ $(c \leq a)$.

لم زرن ۱۲.۱.۱. هر گاه S یک مجموعه ی جزئاً مرتب و ناتهی باشد به طوری که هر زنجیر در S کران بالایی در S داشته باشد، آنگاه S شامل یک عنصر ماکزیمال است.

قضیه ۱۳.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه‌ی (یکدار) باشد. آنگاه هر ایده‌آل راست (چپ) محض I از R مشمول در یک ایده‌آل راست (چپ) ماکزیمال R است.

برهان. فرض کنید I یک ایده‌آل راست (چپ) محض R باشد. قرار دهید

$$\Delta = \{J | \text{ باشد } I \text{ یک ایده‌آل راست (چپ) محض } R \text{ و حاوی } J \}$$

چون $I \in \Delta$، پس $\Delta \neq \emptyset$. به سادگی می‌توان دید که $(\Delta, \subseteq)$ یک رابطه‌ی جزئاً مرتب است. نشان می‌دهیم که هر زنجیر در Δ دارای یک کران بالاست، و در این صورت بنابر لم زرن Δ دارای یک عضو ماکزیمال است. فرض کنید $\{J_\alpha | \alpha \in K\}$ زنجیری در Δ باشد. قرار دهید $J = \cup_{\alpha \in K} J_\alpha$. J یک ایده‌آل راست (چپ) R و حاوی I است: چون به ازای هر α، $I \subseteq J_\alpha$، لذا $I \subseteq J$. فرض کنید $a, b \in J$، در این صورت به ازای β و αای، $a \in J_\alpha, b \in J_\beta$. چون Δ یک زنجیر است، $J_\alpha \subseteq J_\beta$ یا $J_\beta \subseteq J_\alpha$، فرض کنید $J_\alpha \subseteq J_\beta$. بنابراین، $a, b \in J_\beta$. چون J_β ایده‌آل راستی (چپی) از R است، لذا $a - b \in J_\beta \subseteq J$. فرض کنید $r \in R$، در این صورت $ar \in J_\alpha \subseteq J$ $(ar \in J_\alpha \subseteq J)$، از اینرو، J ایده‌آل راستی (چپی) از R است. امّا $J \neq R$ چون در غیر اینصورت $۱ \in J$ و لذا به ازای αای در K، $۱ \in J_\alpha$، که نادرست است. ■

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنید $\Delta = \{R_i | r_i \in I\}$ خانواده‌ای از حلقه‌ها باشد.

(الف) **حاصلضرب مستقیم** خانواده‌ی Δ را با $\prod_{i \in I} R_i$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\prod_{i \in I} R_i = \{(r_i) | r_i \in R_i, \forall i \in I\}.$$

(ب) **حاصلجمع مستقیم** خانواده‌ی Δ را با $\sum_{i\in I} R_i$ یا $\bigoplus_{i\in I} R_i$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bigoplus_{i\in I} R_i = \{(r_i) \in \prod_{i\in I} R_i | r_i \neq 0, i \in I \text{ به ازای تعدادی متناهی } \}.$$

به سادگی نشان داده می‌شود که $\bigoplus_{i\in I} R_i$ یک زیرحلقه (در واقع یک ایده‌آل) $\prod_{i\in I} R_i$ است.
چنانچه I متناهی باشد، آنگاه واضح است که $\bigoplus_{i\in I} R_i = \prod_{i\in I} R_i$.

تعریف ۱۵.۱.۱. فرض کنید $\{A_i | i \in I\}$ خانواده‌ای متناهی از ایده‌آل‌های حلقه‌ی R باشد. $\sum_{i\in I} A_i$ را یک حاصل جمع مستقیم می‌نامند هرگاه به ازای هر $k \in I$،

$$A_k \cap \sum_{i\in I, i\neq k} A_i = 0.$$

تعریف ۱۶.۱.۱. حلقه‌ی R را حاصل جمع مستقیم داخلی خانواده‌ی ایده‌آل‌های $\{A_i | i \in I\}$ نامند هر گاه

(i) $R = \sum_{i\in I} A_i$.

(ii) $\sum_{i\in I} A_i$ یک حاصلجمع مستقیم باشد.

قضیه ۱۷.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه و $\{A_i | i \in I\}$ خانواده‌ای متناهی از ایده‌آل‌های R باشد. اگر R جمع مستقیم داخلی $\{A_i | i \in I\}$ باشد، آنگاه

$$R \cong \bigoplus_{i\in I} A_i = \prod_{i\in I} A_i.$$

برهان. به قضیه‌ی ۱۱.۱.۳از[۱۴] مراجعه کنید. ■

قضیه ۱۸.۱.۱. فرض کنید R حلقه‌ای یکدار و $\{A_1, \dots, A_n\}$ خانواده‌ای متناهی از ایده‌آل‌های R باشد. در این صورت $R = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$ اگر و تنهااگر عناصر خودتوان مرکزی $e_i \in A_i$، $i = 1, 2, \dots, n$، موجود باشند به طوری که

(i) $e_1 + e_2 + \dots + e_n = 1$.

(ii) به ازای هر $i = 1, 2, \dots, n$، $Re_i = A_i$.

(iii) به ازای هر $i \neq j$، $e_i e_j = 0$.

به علاوه، به ازای هر i، $A_i = Re_i$ یک حلقه‌ی یکدار با عضو همانی ضربی e_i است.

برهان. به قضیه‌ی ۱۲.۱.۱۳ از[۱۴] مراجعه کنید. ■

قضیه ۱۹.۱.۱. فرض کنید $R = B_1 \oplus \cdots \oplus B_n$، که در آن B_iها ایده‌آل‌های حلقه‌ی (یکدار) Rاند. آنگاه هر ایده‌آل (چپ) I از R به صورت $I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$ است که در آن برای هر i، I_i یک ایده‌آل (چپ) حلقه‌ی B_i می‌باشد.

برهان. قرار دهید $I_i = I \cap B_i$، در این صورت به وضوح، $I_i \subseteq I$ لذا $\oplus I_i \subseteq I$است . همچنین بنابر قضیه‌ی ۱۸.۱.۱ برای هر i، $B_i = Re_i$، و برای هر $a \in I$ داریم:

$$a = 1a = e_1 a + \cdots + e_n a,$$

که $e_i a = a e_i \in I \cap B_i = I_i$. بنابراین، $I = \oplus I_i$، که در آن I_iها ایده‌آل‌های (چپ) از R (و نیز از B_i) می‌باشند. ■

قضیه ۲۰.۱.۱. چنانچه R_1، R_2، ...، R_n حلقه‌های یکدار باشند، آنگاه هر ایده‌آل حلقه‌ی $\prod_{i=1}^{n} R_i$ منحصراً به صورت $\prod_{i=1}^{n} I_i$ است که در آن هر I_i یک ایده‌آل R_i است.

برهان. به مرجع[۹] فصل ۳ مراجعه کنید. ■

تعریف ۲۱.۱.۱. ایده‌آل P از حلقه‌ی R را **اول** نامند اگر به ازای هر دو ایده‌آل A, B از R، $AB \subseteq P$ ایجاب کند که $A \subseteq P$ یا $B \subseteq P$.

قضیه ۲۲.۱.۱. برای هر ایده‌آل P از R، شرایط زیر معادل‌اند:

(i) P ایده‌آلی اول است.

(ii) برای هر $a, b \in R$، $(a)(b) \subseteq P$ ایجاب کند که $a \in P$ یا $b \in P$.

(iii) برای هر $a, b \in R$، $aRb \subseteq P$ ایجاب کند که $a \in P$ یا $b \in P$.

(iv) برای ایده‌آل‌های چپ (راست) A, B در R، $AB \subseteq P$ ایجاب کند که $A \subseteq P$ یا $B \subseteq P$.

برهان. به گزاره‌ی ۱۰.۲ از [۹] مراجعه کنید. ■

تعریف ۲۳.۱.۱. ایده‌آل C از حلقه‌ی R را **نیمه‌اول** گویند اگر به ازای هر ایده‌آل A از R، $A^{2} \subseteq C$ ایجاب کند که $A \subseteq C$.

قضیه ۲۴.۱.۱. برای هر ایده‌آل C از R، شرایط زیر معادل‌اند:

(i) C ایده‌آلی نیمه‌اول است.

(ii) برای هر $a \in R$، $(a)^{2} \subseteq C$ ایجاب کند که $a \in C$.

(iii) برای هر $a \in R$، $aRa \subseteq C$ ایجاب کند که $a \in C$.

(iv) برای هر ایده‌آل چپ (راست) A در R، $A^{2} \subseteq C$ ایجاب کند که $A \subseteq C$.

برهان. به گزاره‌ی ۱۰.۹ از [۹] مراجعه کنید. ■

تعریف ۲۵.۱.۱. حلقه‌ی R را **اول (نیمه‌اول)** نامند هر گاه (۰) ایده‌آلی اول (نیمه‌اول) در R باشد.

تعریف ۲۶.۱.۱. حلقه‌ی R در شرایط **زنجیر نزولی** Descending Chain Condition (DCC) برای ایده‌آلهای چپ (راست) صدق می‌کند هر گاه به ازای هر دنباله از ایده‌آلهای چپ (راست) $A_{1}, A_{2}, \ldots$ از R به صورت $A_{1} \supseteq A_{2} \supseteq A_{3} \supseteq \cdots$، عدد صحیح مثبت n (وابسته به دنباله) موجود باشد به طوری که:

$$A_n = A_{n+1} = \cdots$$

تعریف ۲۷.۱.۱. حلقه‌ای که در شرط DCC برای ایده‌آل‌های چپ (راست) صدق کند یک حلقه‌ی **آرتینی چپ (راست)** نامیده می‌شود.

تعریف ۲۸.۱.۱. با عکس کردن شرایط تعریف ۲۶.۱.۱ شرایط **زنجیر صعودی** Ascending Chain Condition (ACC) بدست می‌آید و حلقه‌ای که در شرط ACC برای ایده‌آل‌های چپ (راست) صدق کند یک حلقه‌ی **نوتری چپ (راست)** نامیده می‌شود.

تعریف ۲۹.۱.۱. می گوییم حلقه‌ی R **نوتری (آرتینی)** است اگر R نوتری (آرتینی) چپ و راست باشد.

مثال ۳۰.۱.۱. حلقه ی (ایده آل اصلی)$\mathbb{Z}$ نوتری است ولی آرتینی نیست. زیرا مثلاً

$$(۲) \supsetneqq (۴) \supsetneqq (۸) \supsetneqq \cdots$$

مثال ۳۱.۱.۱. هر میدان و هر حاصل ضرب متناهی از میدانها هم نوتری است و هم آرتینی.

تعریف ۳۲.۱.۱. فرض کنید $(R,+,.)$ و $(R',+,.)$ دو حلقه و φ تابعی از R به توی R' باشد. در این صورت φ را یک **همریختی (همسانی)** از R به توی R' نامند هر گاه به ازای هر $a,b \in R$،

$$\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b), \quad \varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$$

همریختی φ از حلقه‌ی R به روی حلقه‌ی R' را

(i) **تکریختی** نامند هر گاه φ یک به یک باشد.

(ii) **برویختی** نامند هر گاه φ پوشا باشد.

(iii) **یکریختی** نامند هر گاه φ یک به یک و پوشا باشد.

قضیه ۳۳.۱.۱. اگر φ یک یکریختی از حلقه‌ی R به روی حلقه‌ی R' باشد، آنگاه φ^{-1} نیز یک یکریختی از R' به روی R است (φ^{-1} را **وارون** φ **می‌نامند**).

برهان. با توجه به اینکه φ یک یکریختی R است حکم به وضوح برقرار است. ■

تعریف ۳۴.۱.۱. دو حلقه‌ی R و R' را **یکریخت** نامند هر گاه یکریختی‌ای از R به توی R' موجود باشد، وقتی R و R' یکریخت باشند می‌نویسیم $R \cong R'$. همچنین یک یکریختی از حلقه‌ی R بروی R را یک **خودریختی** می‌نامند.

قضیه ۳۵.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه و T حلقه‌ی ماتریسی زیر با جمع و ضرب معمولی ماتریس‌ها باشد.

$$T=\begin{pmatrix} R & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & R & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & R \end{pmatrix} \quad (\text{ماتریس‌ها } n \times n \text{ اند})$$

در این صورت یکریختی زیر را داریم:

$$T \cong R \times R \times \cdots \times R \quad (\text{نسخه } n)$$

برهان. نگاشت φ را باتعریفطبیعی زیر در نظر میگیریم:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : T & \longrightarrow & R \times R \times \cdots \times R \\ \varphi((a_{ij})) & = & (a_{۱۱}, a_{۲۲}, \ldots, a_{nn}), \end{array}$$

چون برای هر $i \neq j$، $a_{ij} = ۰$، به وضوح، φ خوش‌تعریف، یک به یک، پوشاست و جمع را حفظ می‌کند. همچنین، چنانچه قرار دهیم $(a_{ij})(b_{ij}) = (c_{ij})$ آنگاه به سادگی مشاهده می‌شود که به ازای هر i، $c_{ii} = a_{ii}b_{ii}$ و به ازای هر $i \neq j$، $c_{ij} = ۰$، از اینرو

$$\begin{array}{rcl} \varphi((a_{ij})(b_{ij})) & = & \varphi((c_{ij})) = (a_{۱۱}b_{۱۱}, a_{۲۲}b_{۲۲}, \ldots, a_{nn}b_{nn}) \\ & = & (a_{۱۱}, a_{۲۲}, \ldots, a_{nn})(b_{۱۱}, b_{۲۲}, \ldots, b_{nn}) = \varphi((a_{ij}))\varphi((b_{ij})) \end{array}$$

در نتیجه، φ ضرب را نیز حفظ می‌کند. ■

۲.۱ مشتق حلقه‌ها

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید R یک حلقه باشد. نگاشت $\delta : R \longrightarrow R$ را یک **مشتق** روی R نامند هر گاه برای هر $a, b \in R$ داشته باشیم:

(i) $\delta(a + b) = \delta(a) + \delta(b)$،

(ii) $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید R یک حلقه و a در R باشد. نگاشت $I_a : R \longrightarrow R$ را که به ازای هر b در R با ضابطه‌ی $I_a(b) = ba - ab$ تعریف می‌شود، **مشتق داخلی** القا شده توسط a می‌نامند.

تذکر ۳.۲.۱. به وضوح مشاهده می‌شود که هر مشتق داخلی یک مشتق است، امّا در مثال زیر می‌بینیم که عکس این مطلب برقرار نیست.

مثال ۴.۲.۱. حلقه‌ی چندجمله‌ایهای $\mathbb{R}[x]$ را در نظر گرفته و نگاشت δ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\delta : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x], \qquad \delta(f(x)) = f'(x)$$

در این صورت به وضوح، δ یک مشتق حلقه‌ی $\mathbb{R}[x]$ است، امّا یک مشتق داخلی نیست زیرا (برهان خلف) اگر به ازای $f(x)$ی در $\mathbb{R}[x]$ قرار دهیم:

$$\delta = I_{f(x)}$$

در این صورت به ازای هر $g(x)$ در $\mathbb{R}[x]$ داریم:

$$I_{f(x)}(g(x)) = f(x)g(x) - g(x)f(x) = ۰$$

در حالی که برای هر چند جمله‌ای غیر ثابت $g(x)$ داریم $\delta(g(x)) = g'(x) \neq ۰$.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید $\sigma \in \operatorname{End} R$، یعنی $\sigma : R \longrightarrow R$ همریختی حلقه‌ای باشد. در این صورت حلقه‌ی **چندجمله‌ایهای اریب** $R[x;\sigma]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R[x;\sigma] = \{\sum_{i=۰}^{n} a_i x^i | a_i \in R, n \in \mathbb{N}, xr = \sigma(r)x, \forall r \in R\}$$

در حلقه‌ی $R[x;\sigma]$ هر چند جمله‌ای به صورت $f(x) = \sum_{i=۰}^{n} a_i x^i$ را یک **چند جمله‌ای چپ** وهر چند جمله‌ای به صورت $g(x) = \sum_{i=۰}^{n} x^i a_i$ را **چند جمله‌ای راست** می‌نامیم.

تذکر ۶.۲.۱. اگر $\sigma \neq I_R$ آنگاه $R[x;\sigma]$ جابه‌جایی نیست حتی اگر R جابه‌جایی باشد زیرا که به ازای aای در R، $\sigma(a) \neq a$ و از اینرو،

$$xa = \sigma(a)x \neq ax.$$

تذکر ۷.۲.۱. واضح است که هر چندجمله‌ای راست یک چند جمله‌ای چپ است . اما قضیه‌ی زیر نشان می‌دهد که عکس آن تحت شرایطی برقرار است.

قضیه ۸.۲.۱. هر چند جمله‌ای چپ در حلقه‌ی $R[x;\sigma]$ یک چندجمله‌ای راست است اگر و تنها اگر σ پوشا باشد.

برهان. ابتدا فرض کنید هر چندجمله‌ای چپ یک چندجمله‌ای راست است و عنصر دلخواه a در R را در نظر بگیرید. بنابر فرض

$$\begin{aligned} ax &= b_0 + xb_1 + x^2 b_2 + \dots \qquad , b_i \in R \\ &= b_0 + \sigma(b_1)x + \sigma^2(b_2)x^2 + \dots \end{aligned}$$

در نتیجه، $a = \sigma(b_1)$ و از اینرو σ پوشاست.

به عکس، فرض کنید σ پوشا باشد. در این صورت به ازای هر $n \geq 2$، σ^n نیز پوشاست (کافی است توجه کنیم که $\sigma^2(R) = \sigma(\sigma(R)) = \sigma(R) = R$). حال چندجمله‌ای چپ $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ در $R[x;\sigma]$ را در نظر گرفته، با توجه به پوشا بودن توانهای σ، به ازای هر $i \geq 1$، عنصر b_i در R چنان وجود دارد که $\sigma^i(b_i) = a_i$. لذا

$$\begin{aligned} a_0 + xb_1 + x^2 b_2 + \dots + x^n b_n &= a_0 + \sigma(b_1)x + \sigma^2(b_2)x^2 + \dots + \sigma^n(b_n)x^n \\ &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n. \end{aligned}$$

■

قضیه ۹.۲.۱. فرض کنید σ یک به یک بوده و R نیز دامنه باشد. در این صورت $R[x;\sigma]$ نیز دامنه است.

برهان. فرض کنید چندجمله‌ایهای $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $g = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ در $R[x;\sigma]$ دارای ضرایب پیشرو، به ترتیب a_n و b_m باشند. چنانچه $fg = 0$، آنگاه

$$\begin{aligned} 0 &= (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n)(b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + a_n x^n b_m x^m, \qquad \alpha_i \in R \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + a_n \sigma^n(b_m) x^{n+m}. \end{aligned}$$

در نتیجه $a_n \sigma^n(b_m) = 0$. چون R یک دامنه است، پس $a_n = 0$ و یا $\sigma^n(b_m) = 0$ و لذا با توجه به یک به یک بودن σ، نتیجه می‌گیریم که $a_n = 0$ یا $b_m = 0$. یعنی $f = 0$ یا $g = 0$. ■

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه و δ یک مشتق R باشد. در این صورت **حلقه‌ی چندجمله‌ایهای دیفرانسیلی** را با $R[x;\delta]$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$R[x;\delta] = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i | a_i \in R, n \in \mathbb{N}, xa = ax + \delta(a), \forall a \in R\}.$$

۳.۱ مدول‌ها و R−همریختی‌ها

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید R یک حلقه باشد. گروه تعویض‌پذیر $(M,+)$ را یک R-**مدول چپ** یا یک **مدول چپ روی** R نسبت به نگاشت $. : R \times M \longrightarrow M$ نامند، هرگاه به ازای هر $r, s \in R$ و هر $m, m' \in M$،

$$r.(m+m') = r.m + r.m' \quad (i)$$

$$r.(sm) = (rs).m \quad (ii)$$

$$(r+s).m = r.m + s.m \quad (iii)$$

و بطور مشابه می‌توانR−**مدول راست** را تعریف کرد.
قرارداد. چنان چه بیم ابهام نباشد ، به جای $r.m$ صرفا می نویسیم rm.

تذکر ۲.۳.۱. اگر R دارای عنصر همانی ۱ باشد ، چنانچه به ازای هر $m \in M$، $1m = m = m1$ ، آنگاه M را **یکانی** یا R−**مدول یکانی** نامند.

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنیدR و S دو حلقه باشند. M را یک (R,S)−**دو مدول** گوییم هرگاه M یک S-مدول راست و یک R−مدول چپ باشد و به ازای هر $m \in M$، $r \in R$ و $s \in S$ داشته باشیم:

$$r(ms) = (rm)s.$$

مثلاً اگر R یک حلقه باشد، با توجه به اینکه ضرب R شرکت‌پذیر است، R یک (R,R)−دو مدول است.

تعریف ۴.۳.۱.اگر M و N دو R− مدول (چپ) باشند ، آنگاه نگاشت $\varphi : M \to N$ را یکR− **همریختی** می نامیم اگر به ازای هر m و m' در M و هر r در R داشته باشیم :

$$\varphi(m+m') = \varphi(m) + \varphi(m'); \varphi(rm) = r\varphi(m).$$

تکریختی ، برووریختی ، درونریختی ، و یکریختی مدولی نیز به طور طبیعی تعریف می شوند .

تعریف ۵.۳.۱. فرض کنید M و N دو R-مدول باشند. مجموعه‌ی تمام R-همریختی‌های از M به N را با $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ نمایش می‌دهیم، یعنی

$$Hom_R(M,N) = \{\varphi | \text{ یک } R\text{−همریختی است } \varphi : M \longrightarrow N \}.$$

به آسانی می‌توان نشان داد که این مجموعه با عمل جمع معمولی توابع یک گروه آبلی است؛ در نتیجه $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ یک $\mathbb{Z}$-مدول است. (هر گروه آبلی، $\mathbb{Z}$-مدول است.) در قضیه زیر خواهیم دید که وقتی حلقه‌ی R جابجایی فرض شود، $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ ساختار R-مدولی دارد.

قضیه ۶.۳.۱. فرض کنید R حلقه‌ی جابجایی و M و N دو R-مدول باشند. در این صورت $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ ساختار R-مدولی دارد.

برهان. با توجه به توضیحات بالا $(\mathrm{Hom}_R(M,N),+)$ که در آن $+$، عمل جمع متداول توابع است، گروهی آبلی است. اکنون باید ضرب در اسکالر مناسبی را تعریف کنیم. توجه کنید که اگر برای هر عضو از R مثل r و هر عضو از $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ مثل φ، تعریف می‌کنیم:

$$r\varphi : M \longrightarrow N, r\varphi(x) = r.\varphi(x)$$

آنگاه $r\varphi$، $R-$همریختی از M به N خواهد بود، زیرا

$$\begin{aligned} r\varphi(x+y) &= r.\varphi(x+y) = r.(\varphi(x)+\varphi(y)) \\ &= r.\varphi(x)+r.\varphi(y) = r\varphi(x)+r\varphi(y), \\ r\varphi(sx) &= r.\varphi(sx) = r.(s\varphi(x)) = r.(s.\varphi(x)) = sr.\varphi(x) \\ &= s.(r.\varphi(x)) = s.r\varphi(x). \end{aligned}$$

پس $r\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ و در نتیجه، نگاشت

$$. : R \times \mathrm{Hom}_R(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,N), r.\varphi = r\varphi$$

ضرب در اسکالر خوشتعریفی روی $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ بدست می‌دهد. اکنون به راحتی می‌توانیم بررسی کنیم که گروه آبلی $(\mathrm{Hom}_R(M,N),+)$ با این ضرب در اسکالر به $R-$مدول تبدیل می‌شود. ■

قضیه ۷.۳.۱. فرض کنیم R و S دو حلقه و M، $(R,S)-$دو مدول باشد و N یک $R-$مدول چپ، در این صورت $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ ساختار $S-$مدول چپ دارد.

برهان. می‌دانیم $(\mathrm{Hom}_R(M,N),+)$ که در آن «$+$» جمع متداول توابع است گروهی آبلی است. اکنون باید ضرب در اسکالر مناسبی تعریف کنیم. توجه کنیم که اگر به ازای هر $s \in S$ و هر $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$، $s\varphi$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$s\varphi : M \longrightarrow N, s\varphi(x) = \varphi(xs)$$

آنگاه $s\varphi$، $R-$همریختی از M به N است، زیرا به ازای هر $x,y \in M$ و هر $r \in R$،

$$s\varphi(x+y) \quad = \quad \varphi((x+y)s) = \varphi(xs+ys) = \varphi(xs)+\varphi(ys)$$