دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه مقطع کارشناسی ارشد ریاضی محض

برد عددی توان‌های یک عملگر خطی کراندار

نگارش:

مریم شریفی

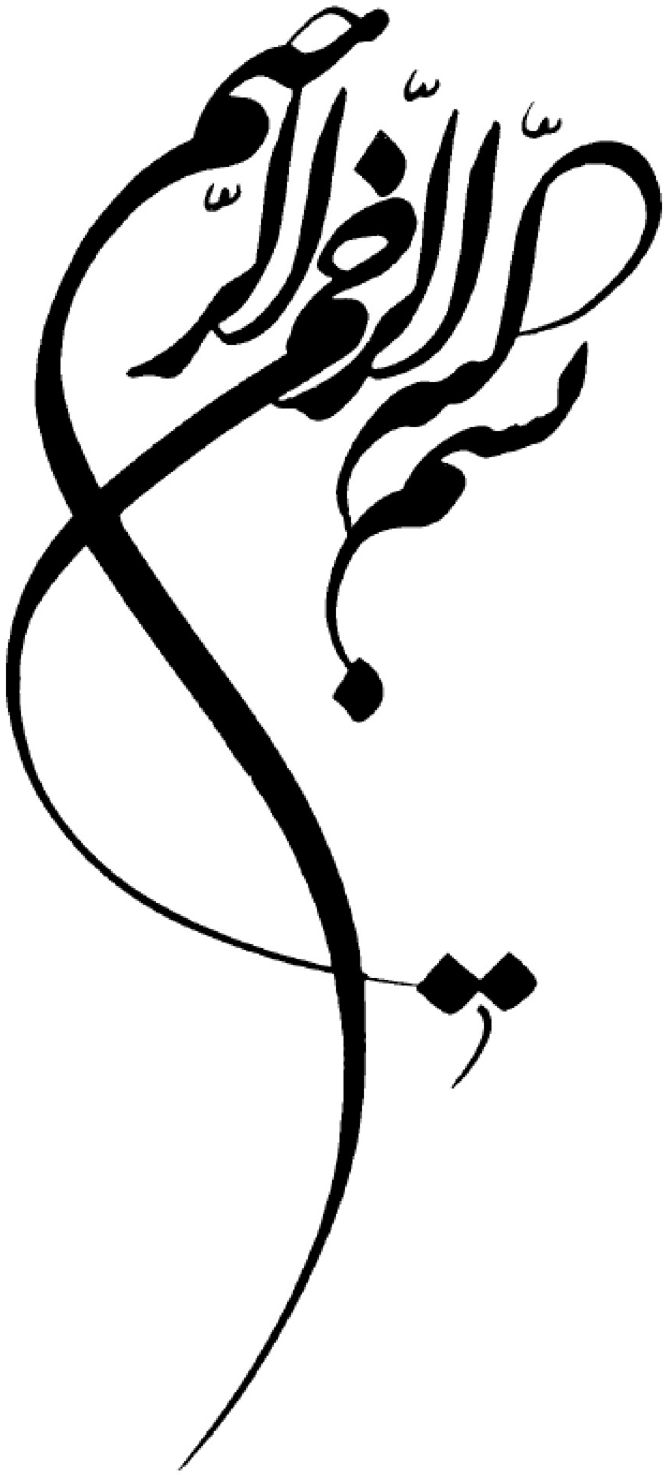
استاد راهنما:

دکتر رحیم علیزاده

استاد مشاور:

دکتر محمد اکبری توتکابنی

زمستان ۱۳۹۰


بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیر و تشکر

به نام حضرت دوست

رسیدن به قلّه‌ها و دامن دامن واژه و آگاهی چیدن در گرو رهنمون‌های عالمانه‌ی آنانی است که خود، روزگاری جاده‌های دانایی را چابک نقش زده و در طی طریق پله‌های ترقی، صبورانه قلم رانده‌اند.

این سطور بهانه‌ای است تا سپاس‌گزار اساتید ارجمندم جناب آقای دکتر علیزاده که راهنمایی و جناب آقای دکتر اکبری که مشاوره‌ی این رساله را بر عهده داشته‌اند، باشم. هم‌آنانی که تا سرچشمه‌ی علم و آگاهی رهنمونم ساختند. بر آستان عالمانه‌ی آنان سر فرود خواهم آورد و ستایش‌گر مقام معلمی‌شان خواهم بود.

به‌جاست قدردانی نمایم از پدر و مادر عزیزم که علم‌آموزی را برایم بخش کردند و همسر مهربانم که همواره مشکلات را صبورانه تاب آورد و در پایان تقدیم به پیشگاه معصومانه یگانه فرزندم که لبخند زیبایش چراغ روشن فرداهاست.

چکیده

مفهوم برد عددی از جمله مطالب مهم و مورد توجه در بحث آنالیز ماتریس‌ها و نظریه عملگرها می‌باشد. برد عددی که ناحیه‌ای محدب و فشرده از صفحه مختلط است، در ابتدا برای ماتریس‌هایی که درایه‌های مختلط دارند مطرح گردید. مطالعه ویژگی‌های برد عددی یک ماتریس اطلاعات مفیدی در مورد آن ماتریس در اختیار ما قرار می‌دهد. در صورتی که H یک فضای هیلبرت و T یک عملگر خطی کراندار روی H باشد، برد عددی T به طور مشابه تعریف گردیده و با $W(T)$ نمایش داده می‌شود. همانند حالت عادی در این حالت نیز هندسه و خواص $W(T)$ از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

در این‌جا قصد ما این است که برای عدد صحیح و مثبت k، به بررسی برد عددی T^k و ارتباط آن با برد عددی T بپردازیم. همچنین در صورت وارون‌پذیری T، برد عددی توان‌های صحیح و منفی T نیز مورد مطالعه قرار خواهند گرفت. خواهیم دید در حالت کلی $W(T^k)$ با $W(T)^k$ برابر نبوده و حتی شمول $W(T^k) \subseteq W(T)^k$ همواره برقرار نیست. هدف اصلی این پایان‌نامه بررسی شرایطی است که منجر به برقراری این شمول می‌شود.

کلیدواژه: نظریه عملگرها، فضای هیلبرت، آنالیز ماتریس‌ها و برد عددی.

فهرست مطالب

مقدمه

مطالعه عملگرهای خطی کراندار یکی از مباحث مهم در بحث نظریه عملگرهاست. ساده‌ترین نمونه ماتریس‌ها هستند که در اغلب گرایش‌های ریاضی وجود دارند. ماتریس‌ها واسطه‌ای بین ریاضیات و سایر علوم می‌باشند، همین امر لزوم بررسی هر چه بیشتر خواص وابسته به ماتریس‌ها را پررنگ‌تر می‌کند. از ویژگی‌های مهم ماتریس‌ها می‌توان به مقادیر ویژه و طیف آن‌ها اشاره کرد. اما طیف یک ماتریس به تنهایی نمی‌تواند اطلاعات کاملی را در مورد آن ماتریس در اختیار ما قرار دهد. مشابه مفهوم طیف، برد عددی یک ماتریس $n \times n$ مجموعه اعداد مختلطی است که به طور طبیعی وابسته به آن ماتریس می‌باشد. طیف یک ماتریس یک مجموعه گسسته است، در صورتی که برد عددی مجموعه‌ای فشرده و محدب می‌باشد. برد عددی را می‌توان تصویری از خود ماتریس در نظر گرفت که حاوی اطلاعات مفیدی در مورد ماتریس می‌باشد که طیف‌ها به تنهایی نمی‌توانند چنین اطلاعاتی را به ما بدهند. برد عددی این اجازه را به ما می‌دهد که بسیاری از ویژگی‌های ماتریس را ببینیم حتی اگر خود ماتریس را نشناسیم. به طور مثال از روی برد عددی می‌توان موقعیت مقادیر ویژه را تعیین کرده و در مورد ویژگی‌های دیگری از جمله، نرمال بودن، مثبت بودن، تقارن، کاهش‌پذیری و غیره بحث کرد.

مفهوم برد عددی اولین بار برای عملگرهای خطی روی $\mathbb{C}^n$ در سال ۱۹۱۸ توسط تئوپلیتز[۱] در ارتباط با مبحث سری‌های فوریه مطرح گردید. او با الهام از قضیه فجر[۲] که ارتباط بین منحنی‌های مسطح و سری‌های فوریه را بیان می‌کند، به هر ماتریس $n \times n$ یک مجموعه فشرده در صفحه مختلط نسبت داد. در سال ۱۹۱۹ دانشمندان آلمانی تئوپلیتز و هاسدورف[۳] قضیه تحدب برد عددی را اثبات نمودند که به قضیه تئوپلیتز–هاسدورف معروف است. این دو همچنین تئوری برد عددی عملگرهای خطی را روی فضای هیلبرت مطرح کردند که در سال ۱۹۳۲ توسط استون[۴] تکمیل گردید. در سال ۱۹۹۰ این تئوری در شاخه آنالیز تابعی و آنالیز عددی نیز معرفی گردید. امروزه برد عددی یک مفهوم شناخته شده در آنالیز ماتریس‌ها است که در تئوری عملگرها بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد. برد عددی را می‌توان روی مجموعه انواع مختلف عملگرها به ویژه هرمیتی و فشرده و همین‌طور جبرهای باناخ و C^*-جبرها معرفی و مورد استفاده قرار داد. به طور مثال لامر[۵] نشان داد که برد عددی ابزار مؤثری برای مرتبط کردن ویژگی‌های جبری و هندسی جبرهای باناخ است و به وسیله آن اثبات برخی

[۱] Teoplitz

[۲] Fejer

[۳] Huosdorf

[۴] Stone

[۵] Lumer

از قضیه‌ها در این حوزه ساده‌تر می‌شود.

با توجه به ناشناخته بودن برد عددی عملگرها (حتی در حالت با بعد متناهی)، مطالعه برد عددی انواع خاصی از آن‌ها همواره مورد توجه بوده است. در این بین می‌توان به ماتریس‌های سه–قطری، پوچ‌توان، نامنفی و تحویل‌پذیر اشاره کرد. از جمله سؤالات مورد بحث دیگر، ارتباط برد عددی T^k با برد عددی T است که در این جا k یک عدد صحیح مثبت است. تحمیل شرایطی روی برد عددی T که منجر به شمول $W(T^k) \subseteq W(T)^k$ شود، این امکان را به ما می‌دهد تا با داشتن $W(T)$، تقریب مناسبی از برد عددی عملگر T^k به دست آوریم. همچنین در حالتی که T وارون‌پذیر باشد بحث مشابهی در مورد توان‌های صحیح و منفی T نیز برقرار خواهد بود.

این پایان‌نامه مشتمل بر تفصیل و تشریح قضایا و مفاهیم مطرح شده در [۲] همراه با مقدمات موردنیاز آن می‌باشد.

در فصل اوّل به معرفی برد عددی ماتریس‌ها و ویژگی‌های پایه‌ای برد عددی می‌پردازیم. در فصل دوم مروری بر برد عددی عملگرهای کراندار روی یک فضای هیلبرت داریم.

در فصل سوم برای عدد صحیح و مثبت k به بررسی برد عددی T^k و ارتباط آن با برد عددی T می‌پردازیم و همچنین شعاع عددی و عدد کراوفورد[۱] عملگرها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و در فصل چهارم به بررسی برد عددی توان‌های منفی عملگرها (در صورت وارون‌پذیری عملگر) می‌پردازیم.

[۱]Crawford number

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

در این فصل به بررسی برد عددی ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های مختلط که آن را با نماد M_n نمایش می‌دهیم، می‌پردازیم.

۱.۱ برد عددی ماتریس‌ها

فرض کنید $A \in M_n$ دلخواه باشد. طیف یا همان مجموعه مقادیر ویژه A و شعاع طیفی A را به ترتیب با نماد $\sigma(A)$ و $\rho(A)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\sigma(A) = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}, \lambda I - A \text{معکوس پذیر نیست}\}.$$
$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

برد عددی A که آن را با $W(A)$ نمایش می‌دهیم مجموعه‌ای به شکل زیر است

$$W(A) = \{X^\star AX : \ X \in \mathbb{C}^n, X^\star X = ۱\} = \{< AX, X >: \ X \in \mathbb{C}^n, < X, X >= ۱\}.$$

طیف یک ماتریس مربعی، مجموعه‌ای متناهی و در نتیجه گسسته از نقاط است، حال آن که ممکن است برد عددی آن به صورت پیوسته باشد. همانند مقادیر ویژه، برد عددی یک ماتریس اطلاعاتی در مورد آن ماتریس در اختیار ما قرار می‌دهد.

بسیاری از این اطلاعات را به تنهایی نمی‌توان از طیف به دست آورد. شعاع عددی یک ماتریس را با $r(A)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$r(A) = \sup\{|\lambda| : \ \lambda \in W(A)\}.$$

اگر X یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی باشد و $B \subseteq X$ دلخواه باشد، غلاف محدب B را با $\mathrm{co}(B)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{co}(B) = \{\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i x_i : \ n \in \mathbb{N}, \lambda_i \geq \circ, \sum_{i=۱}^{n} \lambda_i = ۱, x_۱, \ldots, x_n \in B\}.$$

$\mathrm{co}(B)$ مجموعه‌ای محدب است و کوچکترین مجموعه محدب شامل B می‌باشد.

۲.۱ خواص برد عددی

در این بخش به بررسی خواص برد عددی ماتریس‌ها می‌پردازیم. از مهمترین خواص برد عددی می‌توان به موارد زیر اشاره کرد. تمامی مطالب این فصل، از فصل اول [۱] استخراج شده است.

الف) اگر $A, B \in M_n$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ دلخواه باشد داریم

$$W(A+B) \subseteq W(A) + W(B) \quad , \quad r(A+B) \leq r(A) + r(B).$$

ب) $\sigma(A) \subseteq W(A)$.

ج) $W(A)$ مجموعه‌ای فشرده و محدب است. (در بخش بعد در مورد محدب بودن $W(A)$ با جزئیات بیشتری بحث می‌کنیم.)

د) برای هر ماتریس یکانی U داریم

$$W(U^{\star}AU) = W(A).$$

ه) اگر $A \in M_n$ نرمال باشد آن‌گاه $\mathrm{co}(\sigma(A)) = W(A)$.

و) $W(A + \alpha I_n) = W(A) + \alpha$، و $W(\alpha A) = \alpha W(A)$.

طبق تجزیه شور، هر ماتریس $A = (a_{ij}) \in M_n$ را می‌توان به صورت $A = U^{\star}TU$ که U یک ماتریس یکانی و T ماتریسی بالا مثلثی است نوشت که روی قطر T، مقادیر ویژه A قرار دارند. همچنین قرار می‌دهیم

$$H(A) = \frac{۱}{۲}(A + A^{\star}), \;\; S(A) = \frac{۱}{۲}(A - A^{\star}).$$

به وضوح $A = H(A) + S(A)$. تساوی‌های زیر ارتباط برد عددی A را با برد عددی $S(A)$ و $H(A)$ بیان می‌کنند.

$$\mathrm{Re}\,(W(A)) = W(H(A)) \qquad , \qquad W(S(A)) = i\mathrm{Img}(W(A)).$$

ماتریس $A \in M_n$ را مثبت معین گوییم هرگاه به ازای هر $X \in \mathbb{C}^n$، $X^{*}AX > ۰$. اگر B یک ماتریس مثبت معین باشد آن‌گاه داریم

$$W(B^{-۱}) = \frac{۱}{W(B)}$$

۳.۱ تحدب برد عددی

در سال ۱۹۱۹ تئوپلیتز ثابت کرد برد عددی ماتریس‌ها محدب است و در همان سال این اثبات توسط هاسدورف تکمیل شد. اثبات‌های مقدماتی در زمینه محدب بودن برد عددی در دست است که در همگی آن‌ها از روش کاهش بعد فضا استفاده می‌شود.

قضیه ۱.۱. برای هر $A \in M_n$، $W(A)$ مجموعه‌ای محدب است.

لازم به ذکر است برای اثبات این قضیه سه مرحله زیر را پشت سر می گذاریم

مرحله (۱)

در این مرحله نشان می دهیم برای اثبات تحدب برد عددی ماتریس های $n \times n$ کافی است نشان دهیم برد عددی هر ماتریس ۲×۲ محدب است.

مرحله(۲)

در این مرحله نشان می دهیم برای اینکه ثابت کنیم برد عددی هر ماتریس ۲×۲ محدب است کافی است ثابت کنیم برد عددی هر ماتریس ۲×۲ به شکل $\begin{pmatrix} \circ & a \\ b & \circ \end{pmatrix}$ که $a, b \geq \circ$ ، محدب است.

مرحله(۳)

در نهایت نشان می دهیم برد عددی هر ماتریس ۲ × ۲ به شکل $\begin{pmatrix} \circ & a \\ b & \circ \end{pmatrix}$ $(a, b \geq \circ)$ یك بیضی تبهگون (بیضی، دایره، پاره خط، یا یك نقطه) است.

قضیه زیر برد عددی تمامی ماتریس های ۲ × ۲ را مشخص می کند.

قضیه ۲.۱. فرض کنید $A \in M_۲$ و $I_۲$ $A_\circ = A - \left(\frac{۱}{۲}\mathrm{tr}(A)\right)$ در این صورت

الف) اگر ماتریس Aنرمال باشد، آنگاه $W(A)$ یک پاره خط است که نقاط انتهایی آن مقادیر ویژه A می باشند.

ب) اگر ماتریس A نرمال نباشد، آنگاه $W(A)$ درون و روی یک بیضی به مرکز $\frac{۱}{۲}\,\mathrm{tr}\,(A)$ می باشد که کانون‌های آن مقادیر ویژه A هستند. طول قطربزرگ این بیضی $\sqrt{\mathrm{tr}\,(A_\circ^* A_\circ) + ۲|\det A_\circ|}$ و طول قطرکوچک آن $\sqrt{\mathrm{tr}\,(A_\circ^* A_\circ) - ۲|det A_\circ|}$ می باشد. فاصله هر یک از کانون ها از مرکز برابر $\sqrt{|\det A_\circ|}$ است. قطر بزرگ برروی خطی است که از دو مقدار ویژه A می گذرد، واین دو مقدار ویژه وقتی با هم برابرند که $W(A)$ یک دایره یا یک پاره خط باشد.

به عنوان نمونه برد عددی ماتریس $A = \begin{pmatrix} i+۱ & \circ \\ \circ & -۲ \end{pmatrix}$ که ماتریسی نرمال است خط واصل بین مقادیر ویژه‌ی

ماتریس یعنی $-2, i+1$ می‌باشد. شکل برد عددی ماتریس $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ به صورت بیضی است که کانون‌های آن مقادیر ویژه‌ی ماتریس یعنی -1 و 1 می‌باشد. ماتریس $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ دارای دو مقدار ویژه‌ی ۱ می‌باشد و برد عددی آن یک دیسک به مرکز ۱ و قطر ۲ می‌باشد.

نتیجه مهمی که از تحدب برد عددی ماتریس‌های مربعی حاصل می‌شود به خاصیت دوران معروف است. برد عددی A یک بیضی همراه با داخل آن است. (ممکن است این بیضی تبهگون باشد)

قضیه ۳.۱. اگر A و B دو زیر مجموعه از هم جدای محدب و فشرده از $\mathbb{R}^2$ باشند خط L چنان موجود است که اشتراکی با A و B نداشته و A در یک طرف و B در طرف دیگر آن خط باشند.

قضیه زیر شرایطی را معرفی می‌کند که برد عددی را به صورت یکتا مشخص می‌کنند.

قضیه ۴.۱. تابع $\phi : M_n \to \mathbb{C}$ که در سه شرط زیر صدق کند همان برد عددی است.

الف) برای هر $A \in M_n$، $\phi(A)$ محدب و فشرده است.

ب) برای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ و $A \in M_n$، تساوی‌های

$$\phi(\alpha A) = \alpha\phi(A) \qquad , \qquad \phi(A + \alpha I_n) = \phi(A) + \alpha$$

برقرار باشند.

ج) $\phi(A) \subseteq \mathrm{RHP}$ اگر و تنها اگر $H(A)$ مثبت معین باشد که در آن

$$\mathrm{RHP} = \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re}(z) > 0\}.$$

اثبات. با توجه به این که برد عددی در سه شرط بالا صدق می‌کند، کافی است نشان دهیم فقط یک تابع موجود است که در شرایط بالا صدق می‌کند. فرض کنید ϕ_1 و ϕ_2 در سه شرط گفته شده صدق کنند. کافی است نشان دهیم برای هر $A \in M_n$،

$\phi_1(A) = \phi_2(A)$. با توجه به تقارن بحث، کافی است نشان دهیم به ازای هر $A \in M_n$، $\phi_1(A) \subseteq \phi_2(A)$. فرض کنید چنین نباشد، پس $\beta \in \phi_1(A)$ موجود است که $\beta \notin \phi_2(A)$. طبق قضیه قبل، خط L چنان موجود است که β و $\phi_2(A)$ در دو طرف متفاوت آن قرار گیرند. با یک انتقال و یک دوران می‌توان L را چنان بر محور y منطبق کرد که β در سمت چپ و $\phi_2(A)$ در سمت راست آن قرار گیرند. به عبارت دیگر اعداد مختلط λ و $0 \leq \theta \leq 2\pi$ چنان موجودند که

$$\mathrm{Re}(e^{i\theta}\beta + \lambda) < 0 \qquad , \qquad (e^{i\theta}\beta + \lambda) \notin \mathrm{RHP}$$
$$\mathrm{Re}(e^{i\theta}\phi_2(A) + \lambda) > 0 \qquad , \qquad (e^{i\theta}\varphi_2(A) + \lambda) \subseteq \mathrm{RHP}$$

اما با توجه به ویژگی (ب) برای ϕ_2، داریم

$$e^{i\theta}\phi_2(A) + \lambda = \phi_2(e^{i\theta}A + \lambda I_n).$$

همچنین همین ویژگی برای ϕ_1 ایجاب می‌کند که

$$e^{i\theta}\beta + \lambda \in e^{i\theta}\phi_1(A) + \lambda = \phi_1(e^{i\theta}A + \lambda I_n).$$

با توجه به خاصیت (ج) برای ϕ_2، $H(e^{i\theta}A + \lambda I_n)$ ماتریسی مثبت معین است. همین ویژگی برای ϕ_1 ایجاب می‌کند $\phi_1(e^{i\theta}A + \lambda I_n) \subseteq \mathrm{RHP}$. پس $e^{i\theta}\beta + \lambda \in \mathrm{RHP}$ که یک تناقض است. پس $\phi_1(A) \subseteq \phi_2(A)$. □

۴.۱ ترسیم برد عددی

در این قسمت یک روش عددی برای ترسیم برد عددی معرفی می‌کنیم. پایه این روش بر لم زیر استوار است.

لم ۵.۱. برای ماتریس $A \in M_n$ که $\lambda_{\max}$ بزرگترین مقدار ویژه $H(A)$ است داریم

$$\max \mathrm{Re}(W(A)) = \max W(H(A)) = \lambda_{\max}.$$

اثبات. با توجه به تساوی $W(H(A)) = Re(W(A))$ و فشرده بودن برد عددی، تساوی اول حاصل می شود. برای اثبات تساوی دوم با توجه به هرمیتی بودن $H(A)$ بردارهای مستقل خطی و متعامدیکه $\{y_1, ..., y_n\}$ چنان موجودند که y_i بردار ویژه مربوط به مقدار ویژه λ_i از $H(A)$ باشد. پس

$$H(A)y_i = \lambda_i y_i.$$

حال اگر بردار x با $x^*x = 1$ را در نظر بگیرید $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{C}$ چنان موجودند که

$$x = \sum_1^n c_i y_i, \qquad (\sum_1^n \mid c_i \mid^2 = 1).$$

با توجه به تساوی $x^*x = 1$ و متعامد بودن y_i ها داریم

$$\begin{aligned} x^*H(A)x &= (\sum_1^n \overline{c}_i y_i^*)\ (\sum_1^n c_i H(A) y_i) \\ &= (\sum_1^n \overline{c}_i y_i^*)(\sum_1^n c_i \lambda_i y_i) \\ &= \sum_1^n |c_i|^2 \lambda_i < \lambda_{\max}. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\max(W(H(A)) \leq \lambda_{\max}.$$

اما با توجه به این که $\lambda_{\max} \in W(H(A))$ ، عکس نامساوی نیز برقرار است. □

حال برای یك تقریب مناسب از $\partial W(A)$ ، $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < ... < \theta_n < 2\pi$ را به دلخواه در نظر می گیریم. اگر $\lambda_{\max}^{\theta_m}$ که $1 \leq m \leq n$ بیانگر بزرگترین مقدار ویژه $H(e^{i\theta_m}A)$ باشد، طبق لم قبل تساوی زیر برقرار خواهد بود

$$\max\ ReW(e^{i\theta_m}A) = \max(W(H(e^{i\theta_m}A))) = \lambda_{\max}^{\theta_m}. \tag{1.1}$$

اگر x_{θ_m} یك بردار ویژه یکه برای $\lambda_{\max}^{\theta_m}$ از ماتریس $H(e^{i\theta_m}A)$ باشد داریم

$$\begin{aligned}\lambda_{\max}^{\theta_m} &= x_{\theta_m}^* H(e^{i\theta_m}A)x_{\theta_m}\\ &= x_{\theta_m}^*\left(\frac{۱}{۲}\left(e^{i\theta_m}A+e^{-i\theta_m}A^*\right)\right)x_{\theta_m}\\ &= \frac{۱}{۲}\left(x_{\theta_m}^*e^{i\theta_m}Ax_{\theta_m}+(x_{\theta_m}^*e^{i\theta_m}Ax_{\theta_m})^*\right)\\ &= \mathrm{Re}(x_{\theta_m}^*e^{i\theta_m}Ax_{\theta_m}).\end{aligned}$$

لذا با توجه به (۱.۱) تساوی زیر برقرار است

$$\mathrm{Re}(x_{\theta_m}^*e^{i\theta_m}Ax_{\theta_m}) = \max \mathrm{Re}(W(e^{i\theta_m}A)).$$

این واقعیت و این‌که $x_{\theta_m}^*e^{i\theta_m}Ax_{\theta_m} \in W(e^{i\theta_m}A)$ ایجاب می کنند که

$$x_{\theta_m}^*e^{i\theta_m}Ax_{\theta_m} \in \partial W(e^{i\theta_m}A).$$

ولی

$$\partial(W(e^{i\theta_m}A)) = e^{i\theta_m}\partial W(A).$$

پس اگر $P_{\theta_m} = x_{\theta_m}^*Ax_{\theta_m}$ آن‌گاه $P_{\theta_۱}, ..., P_{\theta_n}$، n نقطه روی مرز خواهد بود.
هرچقدر n بزرگتر و توزیع θ_m ها یکنواخت تر باشد نقاط بدست آمده به شکل بهتری مرز برد عددی را مشخص خواهند کرد.
چند ضلعی محدبی که نقاط $P_{\theta_۱}, ..., P_{\theta_n}$ معین می کنند را با $W_{In}(A, \{\theta_۱, ..., \theta_n\})$ نمایش می دهیم. به طور دقیق تر

$$W_{In}(A, \{\theta_۱, ..., \theta_n\}) = \mathrm{Co}\{P_{\theta_۱}, ..., P_{\theta_n}\}.$$

همچنین خط $L_{\theta_m} = \{e^{-i\theta}(\lambda_{\theta_m}^{\max} + ti) \mid t \in R\}$ خطی مماس بر $\partial(W(A))$ در نقطه P_{θ_n} می باشد. ما نیم صفحه

ای را که $W(A)$ در آن سمت از خط L_{θ_m} قرار می گیرد را با H_{θ_m} نمایش می دهیم. به عبارت دیگر

$$H_{\theta_m} = \{e^{-i\theta_m} Z \mid Rez \leq \lambda_{\theta_M}^{\max}\}.$$

حال $H_{\theta_1} \cap ... \cap H_{\theta_m}$ یك چند ضلعی محیط بر $\partial W(A)$ است. این چند ضلعي را با $W_{out}(A, \{\theta_1, ..., \theta_n\})$ نمایش می‌دهیم. برای این که یک تقریب مناسب از $\partial W(A)$ بدست آوریم، $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_k < 2\pi$ را به دلخواه در نظر می‌گیریم. اگر $\lambda_{\max}^{\theta_m}$ $(1 \leq m \leq k)$ بیانگر بزرگترین مقدار ویژه $H(e^{i\theta_m} A)$ باشد، طبق لم قبل تساوی

$$\max \operatorname{Re}(W(e^{i\theta_m} A) = \max(W(H(e^{i\theta} A))) = \lambda_{\max}^{\theta_m} \tag{I}$$

برقرار خواهد بود.

حال اگر x_{θ_m} یک بردار ویژه یکه برای $\lambda_{\max}^{\theta_m}$ از ماتریس $H(e^{i\theta_m} A)$ باشد داریم

$$x_{\theta_m}^{\star} H(e^{i\theta_m} A) x_{\theta_m} = \lambda_{\max}^{\theta_m}.$$

اما

$$x_{\theta_m}^{\star} H(e^{i\theta_m} A) x_{\theta_m} = \operatorname{Re}(x_{\theta_m}^{\star} e^{i\theta_m} A x_{\theta_m})$$

زیرا

$$\begin{aligned} x_{\theta_m}^{\star} \left(\frac{1}{2} \left(e^{i\theta_m} A + e^{-i\theta} A^{\star} \right) \right) x_{\theta_m} &= \frac{1}{2} \left(x_{\theta_m}^{\star} e^{i\theta_m} A x_{\theta_m} + (x_{\theta_m}^{\star} e^{i\theta_m} A x_{\theta_m})^{\star} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(x_{\theta_m}^{\star} e^{i\theta_m} A x_{\theta_m} \right). \end{aligned}$$

لذا با توجه به (I) داریم

$$\mathrm{Re}(x_{\theta_m}^{\star}e^{i\theta_m}Ax_{\theta_m}) = \max \mathrm{Re}(W(e^{i\theta_m}A))$$

و این که

$$x_{\theta_m}^{\star}e^{i\theta_m}Ax_{\theta_m} \in W(e^{i\theta_m}A)$$

ایجاب می‌کند که $x_{\theta_m}^{\star}e^{i\theta_m}Ax_{\theta_m} \in \partial W(e^{i\theta_m}A)$ باشد.

ولی $\partial(W(e^{i\theta_m}A)) = e^{i\theta_m}\partial W(A)$. پس اگر $\rho_{\theta_m} = x_{\theta_m}^{\star}Ax_{\theta_m}$، آن‌گاه $\rho_{\theta_1}, \dots, \rho_{\theta_k}$، k نقطه روی مرز A خواهند بود.

به طور خلاصه می توان گفت

$$\begin{aligned}\partial W(A) &= \bigcap_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ 0\leq\theta_1<\theta_1<\dots<\theta_n<2\pi}} W_{out}(A, \{\theta_1, \dots, \theta_n\}) \\ &= \bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ 0\leq\theta_1<\theta_1<\dots<\theta_n<2\pi}} W_{In}(A, \{\theta_1, \dots, \theta_n\}).\end{aligned}$$

بنابر این می توان گفت

$$W_{out}(A, \{\theta_1, \dots, \theta_n\}) = Co\{q_{\theta_1}, \dots, q_{\theta_n}\},$$

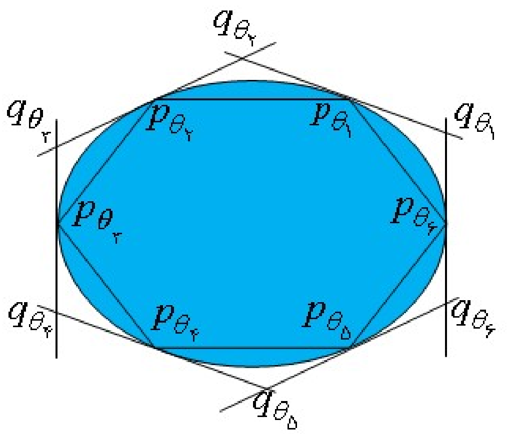
$$W_{In}(A, \{\theta_1, \dots, \theta_n\}) = \mathrm{Co}\{p_{\theta_1}, \dots, p_{\theta_n}\}.$$

همچنین داریم

$$\max |p_{\theta_i}| \leq r(A) \leq \max |q_{\theta_i}|.$$

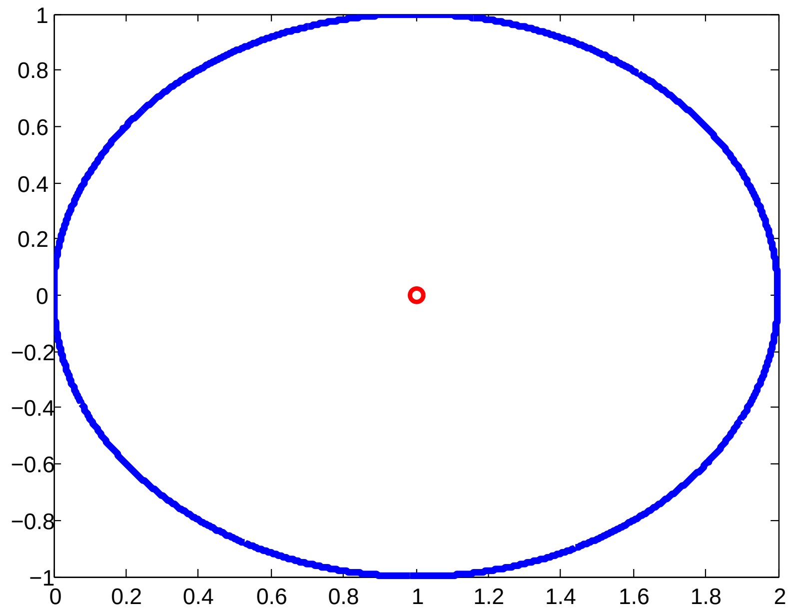
$$1 \leq i \leq n \qquad\qquad 1 \leq i \leq n$$

پس برد عددی هر ماتریس را می توان با یك دنباله از برد عددی ماتریس های قطری تقریب زد.

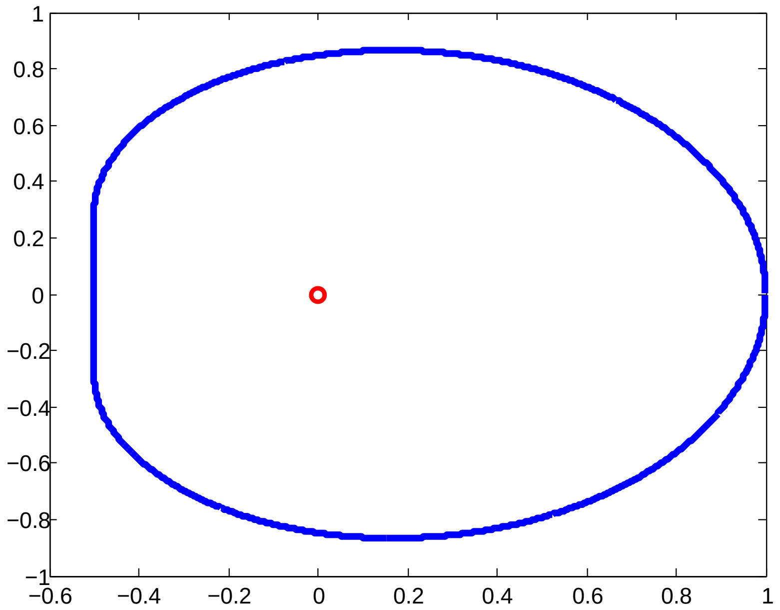


شکل ۱.۱: مشخص کردن مرز برد عددی با استفاده از روش فوق

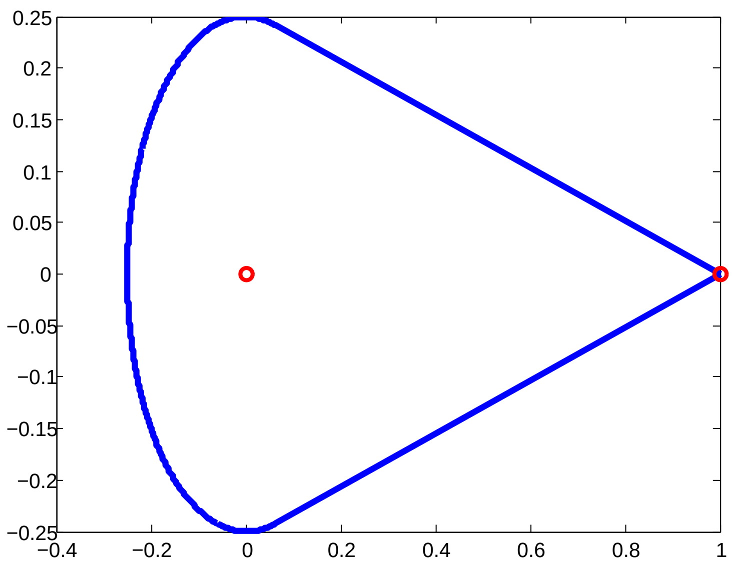
در این قسمت چند نمونه از برد عددی ماتریس‌های ۲ × ۲، ۳ × ۳ و ماتریس‌هایی از مراتب بالاتر را مشاهده می‌کنیم، نقاط داخل شکل نشان‌گر مقادیر ویژه‌ی ماتریس می‌باشند.



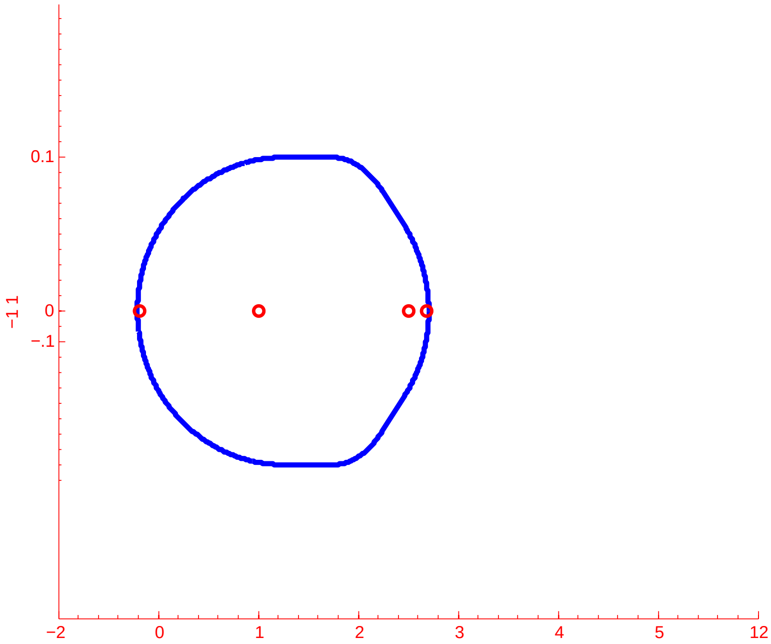
شکل ۲.۱: مرز برد عددی یک ماتریس ۲ × ۲ که در آن ۱ $= a_{11}$ و ۲ $= a_{12}$ و ۰ $= a_{21}$ و ۱ $= a_{22}$.



شکل ۳.۱: مرز برد عددی یک ماتریس ۳ × ۳ که در آن $a_{21} = 1$ و $a_{31} = 1$ و $a_{32} = 1$ و بقیه درایه‌ها صفرند.



شکل ۴.۱: مرز برد عددی یک ماتریس ۶ × ۶ که در آن $a_{11} = 1$ و $a_{22} = 1$ و $a_{33} = 1$ و $a_{46} = \frac{1}{2}$ و بقیه درایه‌ها صفرند.



شکل ۵.۱: مرز برد عددی یک ماتریس ۴ × ۴ که در آن ۱ = a_{11} و ۲ = a_{12} و ۳ = a_{21} و ۴ = a_{22} و ۲ = a_{33} ، ۱ = a_{34} و ۵ = a_{45} و بقیه درایه‌ها صفرند.

با کمک برنامه‌های زیر که به زبان Matlab نگارش شده، برد عددی ماتریس‌های $n \times n$ ترسیم می‌شود. اشکال بالا به کمک این برنامه ترسیم شده‌اند.

برنامه ۱:

```
tic;
clear all; clc;
N=2;
F=0;
A=[1 2;0 1];
for t=1:3600
H=(0.5)*(exp(i*t*pi/1800)*A+exp(-i*t*pi/1800)*A');
[V,D] = eig(H);
V=V';
u=V(N,:);
```