بسم الله الرحمن الرحيم

وزارت علوم تحقیقات و فناوری

دانشگاه علوم پایه دامغان

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض

پایداری اولام-گاوروتا-راسیاس معادله تابعی اویلر-لاگرانژ متعامد

توسط:

عباس رحمانی

استاد راهنما:

دکتر غلامرضا عباسپور

استاد مشاور:

دکتر عباس فخاری

شهریورماه ۱۳۸۸

تـقـديـم بـه

پــدر

و

مــادرم

تقـدیر و تشکـر

بر خود لازم می‌دانم از زحمات استاد راهنمای ارجمندم آقای دکتر **غلامرضا عباسپور** که در طول این دوره افتخار بهره‌مندی از محضر ایشان در کسب علم و معرفت را داشتم تقدیر و تشکر ویژه داشته باشم. نیز از تمام اساتیدی که از محضر ایشان کسب علم نمودم بخصوص اساتید ارجمند، آقایان دکتر عباس فخاری، دکتر مرتضی ابطحی، دکتر سیدعلی تقوی و دکتر محسن پرویزی کمال تشکر و قدردانی را دارم.

فهرست مطالب

مقدمه

در سال ۱۹۴۰م. اولام[1] سؤالی در مورد پایداری همیومورفیسم‌ها به صورت زیر مطرح کرد. فرض کنیم $G_۱$ یک گروه و $G_۲$ یک گروه متریک با متر d باشد، برای ϵ داده شده آیا یک $\delta > ۰$ موجود است به طوری که اگر برای هر $x, y \in X$، نگاشت $h : G_۱ \to G_۲$ در رابطه $d(h(xy), h(x)h(y)) < \delta$ صدق کند، آنگاه همیومورفیسمی مانند $H : G_۱ \to G_۲$ با شرط $d(h(x), H(x)) < \epsilon$ برای هر $x \in G_۱$ موجود باشد؟

در سال بعد هایرز [2] در حالت خاص در فضاهای باناخ مسأله را حل کرد. هایرز نشان داد که اگر X, Y فضاهای باناخ با نرم‌های $\|.\|_۱$ و $\|.\|_۲$ باشند و برای هر $\epsilon \geq ۰$ و هر $x, y \in X$، تابع $f : X \to Y$ در نامساوی

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \epsilon$$

صدق کند، آنگاه برای هر $x \in X$، حدّ $a(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(۲^n x)}{۲^n}$ موجود است و نامساوی $\|f(x) - a(x)\| \leq \epsilon$ برای هر $x \in X$، برقرار می‌باشد. به علاوه اگر نگاشت $t \mapsto f(tx)$ از $\mathbb{R}$ به Y برای هر xِ ثابت، پیوسته باشد آنگاه a خطی است.

مسئله هایرز در حالات مختلفی تعمیم داده شد. به ویژه راسیاس [3] [۲۸] و گاجدا [4] [۱۱] مسأله هایرز را به صورتهای مختلفی تعمیم دادند.

---

[1] S. M. Ulam

[2] D. H. Hyers

[3] Th. M. Rassias

[4] Z. Gajda

در ۲۰۰۴_۱۹۸۲ راسیاس [5] مسأله اولام را برای توابع مختلفی حل کرد. در سال ۱۹۹۲ راسیاس نگاشت درجه دوم اویلر_لاگرانژ به دو شکل

$$|a_1x_1 + a_2x_2|^2 + |a_1x_1 - a_2x_2|^2 = (a_1^2 + a_2^2)[x_1^2 + x_2^2]$$

و

$$\begin{aligned} m_1m_2|a_1x_1 + a_2x_2|^2 + |m_2a_1x_1 - m_1a_2x_2|^2 \\ = (m_1a_1^2 + m_2a_2^2)(m_1x_1^2 + m_2x_2^2) \end{aligned}$$

را معرفی کرد و مسأله اولام را برای آنها بررسی کرد. در ادامه راسیاس موفق شد معادله تابعی درجه دوم نوع اویلر_لاگرانژ

$$\begin{aligned} & Q(m_1a_1x_1 + m_2a_2x_2) + m_1m_2Q(a_2x_1 - a_1x_2) \\ = \quad & (m_1a_1^2 + m_2a_2^2)(m_1Q(x_1) + m_2Q(x_2)) \end{aligned}$$

را معرفی و مسأله پایداری اولام را برای آن بررسی کند. لازم به ذکر است کارهای راسیاس در این زمینه هم‌اکنون نیز ادامه دارد.

با توجه به اینکه مسأله پایداری معادلات تابعی کاربردهای زیادی در ریاضیات کاربردی و آنالیز ریاضی دارد، این مسأله به طور گسترده توسط تعداد زیادی از محققان بررسی شده است. با توجه به تأثیرات زیاد راسیاس و هایرز در مورد بررسی مسائل پایداری، نوعی از پایداری معادلات تابعی را که به وسیله راسیاس در سال ۱۹۷۸ در [۲۸] معرفی و اثبات شد، پایداری هایرز_اولام_راسیاس می‌نامند.

در این پایان‌نامه نتایج به دست آمده در مورد پایداری هایرز_اولام_راسیاس را برای معادلات تابعی درجه دوم اویلر_لاگرانژ و نوع جدید معادله تابعی اویلر_لاگرانژ در فضاهای باناخ و متعامد بررسی می کنیم و نیز اثباتی از پایداری تعمیم یافته‌ی معادله درجه دوم به روش نقطه ثابت را بیان می‌کنیم.

---

[5] J. M. Rassias

ابتدا معادله تابعی درجه دوم استاندارد یا کلاسیک را معرفی کرده و به نتایجی از پایداری این معادله تابعی اشاره‌ای خواهیم داشت. تابع درجه دوم $f(x) = cx^{۲}$ در معادله تابعی

$$f(x + y) + f(x - y) = ۲f(x) + ۲f(y)$$

صدق می‌کند. معادله تابعی مذکور معادله تابعی درجه دوم یا درجه دوم استاندارد یا درجه دوم استاندارد اویلر_لاگرانژ نامیده می‌شود و هر جواب معادله بالا را یک تابع درجه دوم می‌نامیم. اگر بخواهیم به زبانی ساده توصیفی از پایداری ارائه کنیم شاید مطلب زیر ساده‌ترین بیان مفهوم پایداری باشد.

فرض کنیم یک شیء ریاضی در یک خاصیت تقریبی صدق کند. اگر بتوانیم این شیء را با یک شیء که در آن خاصیت صدق کند، تقریب بزنیم گوییم آن شیء پایدار است.

این پایان‌نامه شامل ۴ فصل می‌باشد.

فصل اول شامل تعریف و قضایای مقدماتی مورد نیاز در سراسر این پایان‌نامه است. فصل دوم به بررسی پایداری اولامِ معادله تابعی اویلر_لاگرانژ درجه دوم می‌پردازد همچنین یک نوع تعمیم‌یافته معادله تابعی درجه دوم را معرفی و پایداری هایرز_اولام_راسیاس را برای آن بررسی می‌کنیم.

در فصل سوم که بخش اعظم این پایان‌نامه را شامل می‌شود به بررسی پایداری تعمیم‌یافته هایرز_اولام_راسیاس در فضاهای باناخ برای نوع جدید معادله تابعی اویلر_لاگرانژ، نیز پایداری اولام_گاوروتا_راسیاس و پایداری اولام برای همین معادله تابعی اویلر_لاگرانژ جدید در فضاهای متعامد می‌پردازیم. همچنین به معرفی نوع تعمیم‌یافته‌ای از معادله تابعی درجه دوم پرداخته و پایداری این معادله تابعی را در فضاهای متعامد بررسی می‌کنیم. سرانجام در فصل چهارم به بررسی پایداری نوع خاصی از معادله تابعی درجه دوم با روش نقطه ثابت در مدول باناخ A می‌پردازیم.

لازم به ذکر است منابع پایه و اصلی این پایان‌نامه به ترتیبِ فصول، مراجع [۱۶]، [۳۲]، [۳۱]، [۳۰] و [۲۶] می‌باشد.

فصلِ ۱

پیش نیاز ها

در این فصل به بیان بعضی از تعاریف و قضایای مقدماتی می‌پردازیم که در سراسر این پایان‌نامه مورد نیاز است. از آوردن بعضی از برهان‌ها صرف‌نظر می‌کنیم ولی برهان چندتایی که جالبتر به نظر می‌آیند را ذکر می‌کنیم.
مطالب این فصل برگرفته از مراجع [۱۳]، [۳۳]، [۳۴] و [۳۵] می‌باشد و خواننده می‌تواند برای مشاهدهٔ برهان قضایایی که در اینجا ذکر نگردیده است به این مراجع رجوع کند.

۱-۱ آنالیز تابعی

تعریف ۱-۱.۱ فضای برداری. یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$، مجموعه‌ای است مانند V همراه با عملگرهای جمع $V \times V \to V$ و ضرب اسکالر $\mathbb{F} \times V \to V$ که در خواص زیر صدق کند.

الف) به ازای هر $\alpha, \beta \in V$، $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

ب) به ازای هر $\alpha, \beta, \gamma \in V$ و $a, b \in \mathbb{F}$، $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ و $(ab)v = a(bv)$.

ج) عنصر $0 \in V$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $\alpha \in V$ داشته باشیم

$$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$$

د) به ازای هر $\alpha \in V$، عنصری مانند $\beta \in V$ موجود باشد به طوری که

$$\alpha + (\beta) = \beta + \alpha = 0$$

و) به ازای هر $\alpha \in V$، $1 \cdot \alpha = \alpha$.

ه) به ازای هر $c, d \in \mathbb{F}$ و $\alpha, \beta \in V$، $c(\alpha+\beta) = c\alpha+c\beta$ و $(c+d)\alpha = c\alpha+d\alpha$.

تعریف ۱-۱.۲ متر. یک متر روی یک مجموعه مانند X تابعی است مانند $d : X \times X \to [0, \infty)$ به طوری که در شرایط زیر صدق کند.

الف) $x = y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$

ب) به ازای هر $x, y \in X$، $d(x, y) = d(y, x)$

ج) به ازای هر $x, y, z \in X$، $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

به عنوان مثال $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ که $d(x, y) = |x - y|$ یک متر روی $\mathbb{R}$ می‌باشد.

تعریف ۱-۱.۳ فضای متریک. اگر X یک مجموعه و d یک متر روی x باشد، زوج (X, d) را فضای متریک می‌گوییم. معمولاً اگر متر d روی X مشخص باشد به جای (X, d) می‌نویسیم فضای متری X.

به عنوان مثال $(\mathbb{R}, |.|)$ یک فضای متریک است.

تعریف ۱-۱.۴ دنباله کشی. دنباله $\{x_n\}$ را در فضای متریک (X, d) دنباله کشی گوییم هرگاه

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad ; \quad \forall m, n > N : \ d(x_n, x_m) < \epsilon$$

تعریف ۱-۱.۵ فضای متریک کامل. فضای متریک X را متریک کامل گوییم هرگاه هر دنباله کشی در آن همگرا باشد.

تعریف ۱-۱.۶ نقطه ثابت. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد و $f:(X,d)\to(X,d)$ یک تابع باشد. در این صورت نقطه $x_\circ \in X$ را یک نقطه ثابت f گوییم هرگاه $f(x_\circ)=x_\circ$.

تعریف ۱-۱.۷ نرم. فرض کنیم A یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$) باشد. یک نیم‌نرم روی A یک نگاشت به صورت $\|.\|:A\to\mathbb{R}$ است به طوری که در شرایط زیر صدق کند؛

۱) برای هر $x,y\in A$، $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

۲) برای هر $x\in A$ و هر $\alpha\in\mathbb{F}$، $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$.

۳) $\|x\|=\circ \Leftrightarrow x=\circ$

تعریف ۱-۱.۸ فضای نرمدار. فضای برداری X را فضای نرمدار گوییم هرگاه مجهز به نرم شود.

تعریف ۱-۱.۹ فضای باناخ. فضای نرمدار X را فضای باناخ گوییم هرگاه هر دنباله کشی در X همگرا باشد.

تعریف ۱-۱.۱۰ جبر. یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$، یک فضای برداری مانند A همراه با نگاشت

$$\begin{cases} A\times A\to A \\ (x,y)\mapsto xy \end{cases}$$

می‌باشد، به طوری که برای هر $x,y,z\in A$ و هر $\alpha\in\mathbb{F}$ در خواص زیر صدق کند؛

۱) $x(yz)=(xy)z$

۲) $x(y+z)=xy+xz$، $(x+y)z=xz+yz$

۳) $x(\alpha y)=(\alpha x)y=\alpha(xy)$.

تعریف ۱-۱.۱۱ نرم جبری. فرض کنیم A یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. یک نرم جبری روی فضای برداری A، نرمی است به طوری که برای هر $x,y\in A$ داشته باشیم

$$\|xy\|\leq\|x\|\|y\|$$

تعریف ۱-۱۲.۱ جبر نرمدار. هر جبر A که مجهز به نرم جبری باشد، یک جبر نرمدار نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۱۳.۱ یک جبر نرمدار کامل جبر باناخ نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۱۴.۱ جبر باناخ یکدار. فرض کنیم A یک جبر باناخ شامل عنصر همانی e با $\|e\| = ۱$ باشد. در این صورت A یک جبر باناخ یکدار نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۱۵.۱ عنصر وارون پذیر. فرض کنیم A یک جبر باناخ یکدار باشد. عنصر $x \in A$ وارون‌پذیر نامیده می‌شود هرگاه عنصر $y \in A$ موجود باشد به طوری که

$$xy = yx = e$$

تعریف ۱-۱۶.۱ A-مدول چپ باناخ. فرض کنیم A یک جبر باناخ و X یک فضای باناخ باشد. در این صورت X، یک A-مدول چپ باناخ نامیده می شود هرگاه نگاشت

$$\begin{cases} A \times X \to X \\ (a,x) \mapsto ax \end{cases}$$

موجود باشد به طوری که شرایط زیر برقرار باشند؛

۱) برای هر $a,b \in A$ و هر $x \in X$، $\quad (ab)x = a(bx)$

۲) برای هر $a \in A$ و هر $x,y \in X$، $\quad a(x+y) = ax + ay$

۳) برای هر $a,b \in A$ و هر $x \in X$، $\quad (a+b)x = ax + bx$

۴) عنصری مانند $k \in \mathbb{R}$ موجود باشد که برای هر $a \in A$ و هر $x \in X$،

$$\|ax\| \leq k\|a\|\|x\|$$

۱-۲ معادلات تابعی

تعریف ۱-۱.۲ نگاشت جمعی. فرض کنیم X, Y فضاهای برداری باشند. نگاشت $f : X \to Y$ را جمعی گوییم هرگاه به ازای هر $x,y \in X$ داشته باشیم $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

تعریف ۱-۲.۲ نگاشت دو جمعی. فرض کنیم X, Y, Z فضاهای برداری باشند. نگاشت $f : X \times Y \to Z$ را دوجمعی گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ و $z, w \in Y$

الف) $f(x+y, z) = f(x, z) + f(y, z)$

ب) $f(x, z+w) = f(x, z) + f(x, w)$.

به عبارت دیگر f هم نسبت به متغیر اول و هم نسبت به متغیر دوم جمعی باشد.

تعریف ۱-۳.۲ تابع متقارن. فرض کنیم X, Y فضاهای برداری باشند. تابع $f : X \times X \to Y$ را متقارن گوییم هرگاه برای هر $x, y \in X$، $f(x, y) = f(y, x)$.

تعریف ۱-۴.۲ تابع درجه دوم. فرض کنیم X و Y فضاهای برداری باشند. تابع $f : X \to Y$ را درجه دوم گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ در معادله تابعی درجه دوم $f(x+y) + f(x-y) = ۲f(x) + ۲f(y)$ صدق کند.

تعریف ۱-۵.۲ تابع $f : X \to Y$ را به طور گویا همگن گوییم هرگاه به ازای هر $x \in X$

$$f(rx) = rf(x) \quad (r \in \mathbb{Q})$$

که $\mathbb{Q}$، مجموعه اعداد گویا می‌باشد. همین‌طور f را به طور گویا همگن از درجه دوم ($\mathbb{Q}$-درجه دوم) گوییم اگر به ازای هر $x \in X$،

$$f(rx) = r^{۲} f(x) \quad (r \in \mathbb{Q})$$

قضیه ۱-۶.۲ هر تابع جمعی f به طور گویا همگن است.

برهان. برای مشاهده برهان به مرجع [۳۵] صفحه ۷ مراجعه کنید. □

قضیه ۱-۷.۲ هر تابع درجه دوم به طور گویا همگن از درجه دوم است.

برهان. مرجع [۳۵] صفحه ۱۱۴. □

لم ۱-۸.۲ فرض کنیم X و Y دو فضای برداری حقیقی باشند. در این صورت تابع $f: X \to Y$ درجه دوم است اگر و فقط اگر تابع دوجمعی و متقارن $B: X \times X \to Y$ وجود داشته باشد به طوری که

$$f(x) = B(x, x)$$

برهان. فرض کنید $f(x) = B(x, x)$. در این صورت

$$\begin{aligned} f(x+y) + f(x-y) &= B(x+y, x+y) + B(x-y, x-y) \\ &= B(x, x+y) + B(y, x+y) + B(x, x-y) \\ &\quad + B(y, x-y) \\ &= B(x,x) + B(x,y) + B(y,x) + B(y,y) \\ &\quad + B(x,x) - B(x,y) - B(y,x) + B(y,y) \\ &= ۲B(x,x) + ۲B(y,y) \\ &= ۲f(x) + ۲f(y) \end{aligned}$$

بنابراین f درجه دوم است.

حال فرض کنید $f: X \to Y$ تابع درجه دوم باشد و $B: X \times X \to Y$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$B(x, y) = \frac{۱}{۴}[f(x+y) - f(x-y)] \quad x, y \in X \qquad (۱.۱)$$

در معادله تابعی

$$f(x+y) + f(x-y) = ۲f(x) + ۲f(y) \qquad (۲.۱)$$

قرار می‌دهیم $y = ۰$؛ بنابراین $f(۰) = ۰$. اگر قرار دهیم $x = y$ آنگاه

$$f(۲x) = ۴f(x) \qquad (۳.۱)$$

بنابراین

$$B(x,x)=\frac{۱}{۴}[f(۲x)-f(۰)]=\frac{۱}{۴}[۴f(x)]$$

با تعویض x با y در (۱.۱)، داریم

$$f(x+y)+f(y-x)=۲f(y)+۲f(x)$$

مقایسه این معادله با (۱.۱)، نتیجه می‌دهد

$$f(x-y)=f(y-x)$$

بنابراین f تابع زوج است. بنابراین داریم

$$B(x,y)=\frac{۱}{۴}[f(x+y)-f(x-y)]=\frac{۱}{۴}[f(y+x)-f(y-x)]=B(y,x)$$

به علاوه،

$$\begin{aligned} B(-x,y)=\frac{۱}{۴}[f(-x+y)-f(-x-y)] &= \frac{۱}{۴}[f(x-y)-f(x+y)] \\ &= -\frac{۱}{۴}[f(x+y)-f(x-y)] \\ &= -B(x,y) \end{aligned}$$

بنابراین B نسبت به متغیر اول فرد است. به طور مشابه می‌توان نشان داد که B نسبت به متغیر دوم نیز فرد است.

حال نشان می‌دهیم B نسبت به متغیر اول جمعی است. داریم

$$\begin{aligned} ۴[B(x+y,z)+B(x-y,z)] &= f(x+y+z)+f(x-y+z)-f(x+y-z) \\ &\quad -f(x-y-z) \\ &= ۲f(x+z)+۲f(y)-۲f(x-z)-۲f(y) \\ &= ۲f(x+z)-۲f(x-z=۸B(x,z) \end{aligned}$$

بنابراین برای هر $x, z \in X$ نشان دادیم

$$B(x+y,z)+B(x-y,z)=۲B(x,z) \tag{۴.۱}$$

با تعویض x و y داریم

$$B(y+x,z)+B(y-x,z)=۲B(y,z) \tag{۵.۱}$$

با تفریق (۴.۱) از (۵.۱) داریم

$$B(x-y,z)-B(y-x,z)=۲B(x,z)-۲B(y,z) \tag{۶.۱}$$

چون B نسبت به هر متغیر فرد است از (۶.۱) نتیجه می‌شود

$$B(x-y,z)=B(x,z)-B(y,z)$$

حال y را جایگزین $-y$ می‌کنیم و با توجه به اینکه B نسبت به متغیر اول فرد است داریم

$$B(x+y,z)=B(x,z)+B(y,z)$$

بنابراین $B : X \times X \to Y$ نسبت به متغیر اول جمعی است. چون B متقارن است لذا B نسبت به متغیر دوم نیز جمعی است. لذا B تابع دوجمعی است. $\square$

فصلِ ۲

پایداری اولامِ معادله تابعی درجهٔ دوم نوع اویلر_لاگرانژ

در این فصل ما معادله تابعی درجه دوم نوع اویلر_لاگرانژ

$$Q(m_۱a_۱x_۱ + m_۲a_۲x_۲) + m_۱m_۲Q(a_۲x_۱ - a_۱x_۲)$$
$$= (m_۱a_۱^۲ + m_۲a_۲^۲)[m_۱Q(x_۱) + m_۲Q(x_۲)] \qquad (۱.۲)$$

را معرفی کرده و سپس بعد از بیان مقدّمات مورد نیاز، به بررسی پایداری اولام برای این معادله تابعی می‌پردازیم. به زبان ساده هدف از بخش اعظم این فصل تقریبِ یک تابع تقریباً درجهٔ دوم نوع اویلر_لاگرانژ $f : X \to Y$ با تابع درجهٔ دوم نوع اویلر_لاگرانژ $Q : X \to Y$ می‌باشد.

این فصل شامل سه بخش است. در بخش اول ابتدا مباحثی از معادله اویلر_لاگرانژِ (۱.۲) را ارائه می‌کنیم و در بخش دوم پایداری اولام برای این معادله تابعی را همراه با برهان بیان می‌کنیم. در بخش سوم نیز یک معادله تابعی درجه دوم جدیدی را معرفی و پایداری اولام_هایرز_راسیاس و اولام_گاوروتا_راسیاس را برای این معادله تابعی بررسی می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم مطالب مربوط به بخش یک و دو این فصل

از مرجع [۲۶] برداشت شده است.

مقصود از یک تابع تقریباً درجهٔ دوم نوع اویلر_لاگرانژ تابع $f : X \to Y$ است که برای یک ثابت $c \geq 0$ و زوج (a_1, a_2) از اعداد حقیقی و (m_1, m_2) از اعداد مثبت در نامساوی

$$\begin{aligned} &\|f(m_1 a_1 x_1 + m_2 a_2 x_2) + m_1 m_2 f(a_2 x_1 - a_1 x_2) \\ &-(m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2)[m_1 f(x_1) + m_2 f(x_2)]\| \\ \leq\ & c \end{aligned} \tag{۲.۲}$$

برای هر $x_1, x_2 \in X$ صدق می‌کند. در ادامه مطالب منظور از m عدد حقیقی است که به صورت $m = \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2+1}(m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2)$ تعریف می‌شود.

۲-۱ مباحثی از معادله درجه دوم نوع اویلر_لاگرانژ

تعریف ۲-۱.۱ تابع درجه دوم $Q : X \to Y$، اویلر_لاگرانژ نامیده می‌شود هرگاه برای هر $(x_1, x_2) \in X^2$ در معادله (۱.۲) صدق کند.

در معادله (۱.۲) اگر $x_1 = x_2 = 0$ و $m \neq 1$ به دست می‌آید

$$Q(0) = 0 \tag{۳.۲}$$

مشابهاً از (۲.۲) داریم $(m_1 m_2 + 1)|1 - m|\|f(0)\| \leq c$ یا

$$\|f(0)\| \leq \frac{c}{(m_1 m_2+1)|1-m|} = \frac{c}{m_1 m_2+1} \times \begin{cases} \frac{1}{m-1} & , m > 1 \\ \frac{1}{1-m} & , 0 < m < 1 \end{cases} \tag{۴.۲}$$

نمادگذاری:

$$\overline{Q}(x) = m_0 \times \begin{cases} \frac{m_1 Q(\frac{a_1}{m_0}x) + m_2 Q(\frac{a_2}{m_0}x)}{m} & , m > 1 \\ m[m_1 Q(\frac{b_1}{m_0}x) + m_2 Q(\frac{b_2}{m_0}x)] & , 0 < m < 1 \end{cases} \tag{۵.۲}$$

که $b_i = \frac{a_i}{m}$ $(i=۱,۲)$ و $m_\circ = \frac{(۱+m_۱m_۲)}{m_۱+m_۲}$. همچنین برای هر $x \in X$ قرار می‌دهیم

$$\overline{\overline{Q}}(x) = \frac{۱}{m_\circ m_۱} \times \begin{cases} \frac{Q(m_۱a_۱x)+m_۱m_۲Q(a_۲x)}{m} & ,m > ۱ \\ m[Q(m_۱b_۱x)+m_۱m_۲Q(b_۲x)] & ,\circ < m < ۱ \end{cases} \qquad (۶.۲)$$

تعریف ۲-۱.۲ فرض کنید X و Y فضاهای خطی حقیقی باشند و $m > ۱$. در این صورت معادله

$$\begin{aligned} F^a(Q) &= Q(m_۱a_۱x)+m_۱m_۲Q(a_۲x) \\ &\quad -m_\circ^۲m_۱[m_۱Q(\frac{a_۱}{m_\circ}x)+m_۲Q(\frac{a_۲}{m_\circ}x)] = \circ \end{aligned} \qquad (۷.۲)$$

معادله تابعی بنیادی نوع اول نامیده می‌شود؛ که به صورت زیر با $\overline{Q}$ و $\overline{\overline{Q}}$ رابطه دارد.

$$m_\circ m_۱ m[\overline{\overline{Q}}(x) - \overline{Q}(x)] = F^a(Q) = \circ \qquad (۸.۲)$$

توجه کنید که اگر X و Y فضاهای خطی نرمدار حقیقی باشند و $m > ۱$ در این صورت،

$$\|F^a(f)\| \le \epsilon_۱ \qquad (۹.۲)$$

که $\epsilon_۱ \ge \circ$ (مستقل از $x_۱, x_۲ \in X$) می باشد و نامساوی (۷.۲) به صورت زیر با $\overline{f}$ و $\overline{\overline{f}}$ رابطه خواهد داشت.

$$m_\circ m_۱ m\|\overline{\overline{f}}(x) - \overline{f}(x)\| = \|F^a(f)\| \le \epsilon_۱,\ m > ۱ \qquad (۱۰.۲)$$

تعریف ۲-۱.۳ فرض کنید X و Y فضاهای خطی حقیقی باشند و $b_i = \frac{a_i}{m}$ $(i=۱,۲)$ و $\circ < m < ۱$ فرض شود. در این صورت

$$\begin{aligned} F^b(Q) &= Q(m_۱b_۱x)+m_۱m_۲Q(b_۲x) - m_\circ^۲m_۱[m_۱Q(\frac{b_۱}{m_\circ}x)+m_۲Q(\frac{b_۲}{m_\circ}x)] \\ &= \circ \end{aligned} \qquad (۱۱.۲)$$