دانشگاه تبریز

دانشکده علـوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی

ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

انتگرال‌گیری عددی با روش درونیابی باری‌سنتریک گویای خطی

استاد راهنما

دکتر صداقت شهمراد

استاد مشاور

دکتر غلامرضا حجتی

پژوهشگر

محمد خسروی اقدم

۱۳۹۲

به نام یزدان پاک و بی همتا

بارخدایا...
می خواستم طلب کنم، آن چه را
که نمی خواهم
در تو ذوب شدن را، و در تو گم کردن
این من وحشتناک که
جهان اطراف مرا آلوده می سازد
اگر دست مرحمت برداری
مرا چه خواهد شد؟!
بارخدایا...
تحقیرم مکن
با من مبارزه کن تا شکستن دستم را در تماس
با دست تو احساس کنم.

م. د. اونامونو

تقدیم به:

مادر مهربانم

تنها گل واژه زندگی، ستاره آسمان دل و شبنم چشمانم که آفتاب فروزان وجودش گرمی بخش گذشته و چراغ فراسوی آینده‌ام می‌باشد. او که زبان را توانایی تقدیر از زحمات بی‌شائبه‌ی او نیست و همواره اسوه صبر و صداقت بوده و به من درس تحمل و درستکاری را آموخت و تقدیم به آنان که وجودشان تبلور مهربانی است.

به نام خدا

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات استاد راهنمای، جناب آقای دکتر صداقت شهراد، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام می‌رسید.

از جناب آقای دکتر غلامرضا حجتی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

از جناب آقای دکتر میرکمال میرنیا که داوری این رساله را با نهایت دقت و صرف وقت زیاد انجام دادند، تشکر می‌نمایم.

و در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از برادران عزیزم و خواهران دلسوزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

محمد خسروی

شهریور ماه ۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: خسروی اقدم   نام: محمد
عنوان: انتگرال‌گیری عددی با روش درونیابی باری‌سنتریک گویای خطی
استاد راهنما : دکتر صداقت شهمراد استاد مشاور : دکتر غلامرضا حجتی
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد   رشته: ریاضی کاربردی   گرایش: آنالیز عددی   دانشگاه تبریز دانشکده علوم ریاضی   تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۲   تعداد صفحات: ۷۹
کلید واژه‌ها: درونیای گویا، شکل باری‌سنتریک، انتگرال‌گیری عددی

چکیده

روش‌های درونیابی به‌طور طبیعی به روش‌های انتگرال‌گیری عددی منجر می‌شوند. در دهه هشتاد درونیابی باری‌سنتریک مورد آزمایش و پیشرفت قرار گرفت. به تازگی درونیابی گویای خطی با وزن‌های جدید توسط فلوتر[۱] و هورمن[۲] معرفی شده است.

در این پایان‌نامه دو ساختار انتگرال‌گیری عددی گویای خطی را معرفی و مورد استفاده قرار می‌دهیم. در روش اول، وزن‌ها انتگرال‌گیری عددی از توابع گویای لاگرانژ مقدماتی بدست می‌آیند. اساس روش دوم حل یک مساله مقدار اولیه است‌که تقریب اولیه از انتگرال حاصل می‌شود. در مورد مرتبه همگرایی این دو روش می توان گفت، مرتبه همگرایی روش اول تحت بعضی محدویت‌ها یک واحد از روش دوم بیشتر است. سعی خواهیم کرد تاثیر هر دو روش را با چند مثال عددی نشان دهیم.

[۱] Floater

[۲] Hormann

فهرست مطالب

فهرست اشکال

فهرست جداول

مقدمه و پیشینه پژوهش

درونیابی با استفاده از چندجمله‌ها یک موضوع قدیمی است. در قرن هفدهم، نیوتن برای محاسبه مدار ستاره‌های دنباله‌دار چندجمله‌ایهای درونیاب را توسعه داد. لاگرانژ کمی بعد دستور درونیابی لاگرانژ را بدست آورد. درونیابی با استفاده از چندجمله‌ای‌ها دارای چندین مزیت است، از جمله مشتق و انتگرال توابع چندجمله‌ای و حتی تعیین ریشه‌های آن‌ها مشکل نیست. از جمله روش‌های درونیابی می‌توان به روش لاگرانژ، روش نیوتن، روش هرمیت و ... اشاره کرد.

درونیابی با استفاده از روش‌های اخیر دو مشکل عمده دارد. اول اینکه ممکن است نوسانات تابع درونیاب (به‌ویژه برای درونیابی چندجمله‌ای با درجه بالا) زیاد باشد، دوم اینکه اگر یک نقطه را به نقاط درونیابی اضافه کنیم تابع درونیاب بدست آمده کلا عوض می‌شود. برای رفع این مشکل از درونیابی اسپلاین استفاده می‌کنند. اسپلاین‌ها برخلاف درونیاب‌های گفته شده که داده‌ها را به‌صورت سراسری درونیابی می‌کنند، داده‌ها را به‌صورت موضعی درونیابی می‌کنند. اسپلاین‌های مکعبی[۳] و بی‌اسپلاین‌ها[۴] امروزه کاربردهای عملی زیادی ازجمله در قالب‌بندی‌های پزشکی، صنایع خودرو سازی، گرافیک کامپیوتر و پردازش تصویر دارند.

چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ را می‌توان به چند شکل جذاب بازنویسی کرد که یکی از آنها شکل اصلاح شده لاگرانژ و دیگری شکل مرکز ثقل است. درونیابی مرکز ثقل مطلب جدیدی نیست، اما بیشتر دانشجویان و کسانی که آنالیز عددی می‌دانند کمتر در مورد آن اطلاع دارند. اولین تحقیقات در مورد مرکز ثقل در سال ۱۹۸۲ توسط ریک[۵] و ریمر[۶] [۴] انجام شد اما به نتیجه خاصی نرسید.

[۳] cubic spline

[۴] B-spline

[۵] Rack

[۶] Reimre

روتیشزر[۷] [۴] دستور

$$p_n(x) = \frac{\sum_{j=0}^{n} \frac{w_j}{x - x_j} f_j}{\sum_{j=0}^{n} \frac{w_j}{x - x_j}} \qquad (۱.۰)$$

را در سال ۱۹۹۰ ارائه داد که در آن مقادیر w_jها به‌صورت

$$w_j = \frac{1}{\prod_{k=0, k\neq j}^{n} (x_j - x_k)} \qquad (۲.۰)$$

مشخص می‌شوند و دستور را، دستور صریح مرکز ثقل نامید. بنابراین دستور مرکز ثقل یک دستور لاگرانژ است اما یک ویژگی زیبای خاصی دارد و آن این است که در دستور مرکز ثقل وزن‌های w_j در صورت و مخرج به‌صورت یکسان ظاهر می‌شوند. در فصل اول پایان‌نامه پس از معرفی چند نوع درونیابی مقدماتی، درونیابی مرکز ثقل مقدماتی را معرفی می‌کنیم. در فصل دوم یک نوع دیگر از درونیابی مرکز ثقل را مورد بحث قرار خواهیم داد که هیچ قطبی در $\mathbb{R}$ ندارد و این درونیابی را می‌توان به‌صورت (۱.۰) نیز بیان کرد و در ادامه چندین روش انتگرال‌گیری عددی را بیان می‌کنیم. در فصل سوم دو روش انتگرال‌گیری عددی را بیان می‌کنیم و تاثیر آن را با چند مثال عددی نشان می‌دهیم. این پایان‌نامه براساس مقاله‌های [۹] و [۱۰] تهیه شده است.

[۷] Rutishasuer

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

کتاب طبیعت به زبان ریاضی نگاشته شده است.
گالیله (۱۸۴۰-۱۷۸۱)

۱.۱ مقدمه

فصل اول پایان‌نامه مروری بر مفاهیم پایه و مورد نیاز در فصل‌های آتی است. البته باید به این نکته توجه کرد که تمام تعریف‌ها و ویژگی‌های مرتبط را نمی‌توان در یک فصل خلاصه کرد، اما تا جای که ممکن باشد سعی خواهیم کرد تعریف‌ها و ویژگی‌هایی را که در فصل‌های آتی پایان‌نامه از آن‌ها استفاده می‌شود به‌طور مختصر شرح دهیم. اکثر مطالب این فصل به نقل از [۲] است.

ابتدا مساله تفریب یک تابع را به وسیله یک رده از توابع ساده‌تر که عمدتا چندجمله‌ای‌ها هستند، بحث می‌کنیم. دو هدف عمده در استفاده از درونیابی با استفاده از چندجمله‌ای‌ها وجود دارد. هدف اول این است که تابعی را پیدا کنیم که به‌صورت صریح داده نشده و تنها مقادیر تابع در مجموعه‌ای از نقاط معلوم است. هدف دوم این است که تابع $f(x)$ را با یک چندجمله‌ای درونیاب $p(x)$ جایگزین کنیم به‌طوری که عملیات نظیر پیدا کردن ریشه‌ها، مشتق‌گیری، انتگرال‌گیری و غیره مورد نظر برای تابع f مد نظر می‌باشد به‌شکل ساده‌تر انجام شود. اهمیت چندجمله‌ای درونیاب در این است که توابع پیوسته را به طور یکنواخت تقریب می‌زنند. برای هر تابع پیوسته و تعریف شده در یک بازه بسته و کراندار یک چندجمله‌ای وجود دارد که هرچقدر بخواهیم به تابع مفروض نزدیک است این نتیجه در قضیه زیر بیان می‌شود.

قضیه ۱.۱.۱. (*تقریب وایرشتراس*[۱]) [۷] *فرض کنید که f بر $[a,b]$ پیوسته باشد. دراین‌صورت به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ چندجمله‌ای مانند $p(x)$ وجود دارد به‌طوری‌که*

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a,b].$$

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید x_0، x_1، $\cdots$ و x_n، $n+1$ نقطه متمایز و $f(x_0)$، $f(x_1)$، $\cdots$ و $f(x_n)$ مقادیر نظیر f در نقاط x_i باشد. دراین‌صورت یک چندجمله‌ای منحصر به فرد حداکثر از درجه n

[۱] weierstrass approximation theorem

مانند $p_n(x)$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$p_n(x_i) = f(x_i), \quad i = ۰, ۱, \cdots, n.$$

۲.۱ معرفی چند نوع درونیابی

۱.۲.۱ درونیابی لاگرانژ[۲]

فرض کنید تابع f در بازه $[a, b]$ پیوسته و $n + ۱$ نقطه متمایز $a = x_۰ < x_۱ < \cdots < x_n = b$ داده شده و $f(x_۰)$، $f(x_۱)$، $\cdots$ و $f(x_n)$ مقادیر تابع در این نقاط باشند. هدف عبارت است از یافتن چندجمله‌ای $p(x) = \alpha_۰ + \alpha_۱ x + \cdots + \alpha_n x^n$ که

$$p(x_i) = f(x_i), \; i = ۰, ۱, \cdots, n.$$

برای این منظور چندجمله‌ایهای لاگرانژ را به‌صورت

$$L_i(x) = \frac{(x - x_۰)\cdots(x - x_{i-۱})(x - x_{i+۱})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_۰)\cdots(x_i - x_{i-۱})(x_i - x_{i+۱})\cdots(x_i - x_n)},$$

تعریف می‌کنیم که در خاصیت

$$L_i(x_j) = \begin{cases} ۱, & i = j \\ ۰, & i \neq j \end{cases} \tag{۱.۱}$$

صدق می‌کنند. چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ به‌صورت

$$p(x) = \sum_{i=۰}^{n} L_i(x) f(x_i), \;\; L_i(x) = \prod_{\substack{j=۰ \\ j\neq i}}^{n} \Big(\frac{x - x_j}{x_i - x_j}\Big). \tag{۲.۱}$$

است. در مورد درونیابی لاگرانژ نظر بیشتر نویسندگان بر این است که دستور لاگرانژ بیشتر برای مقادیر کوچک n قابل قبول است و دستور فوق به علت نواقصی که در آن است یک انتخاب نامناسب برای محاسبات عملی محسوب می‌گردد. مشکلات روش لاگرانژ عبارتند از:

[۲] Lagrange

- محاسبات این روش وقتی n بزرگ باشد، زیاد است.
- درجه چندجمله‌ای درونیاب بعد از انجام تمام محاسبات تعیین می‌شود و با اضافه کردن یک یا چند نقطه به نقاط درونیابی باید تمام عملیات تقریبا از نو انجام شود.
- چون چندجمله‌ای درونیاب به تدریج حساب نمی‌شود این روش را باید با احتیاط کامل به کار برد.

۲.۲.۱ تفاضلات تقسیم شده[۳]

فرض کنید $x_\circ < x_۱ < \cdots < x_n$، $n+۱$ نقطه متمایز (نه لزوما هم‌فاصله) و $f_\circ$، $f_۱$، $\cdots$ و f_n مقادیر تابع در این نقاط باشند. در این صورت تعریف تفاضلات تقسیم شده ادامه می‌آید.
تفاضلات تقسیم شده مرتبه اول بین x_i و $x_{i+۱}$

$$f[x_i, x_{i+۱}] = \frac{f(x_{i+۱}) - f(x_i)}{x_{i+۱} - x_i}.$$

تفاضلات تقسیم شده مرتبه nام بین x_i، $x_{i+۱}$، $\cdots$، x_{i+n}

$$f[x_i, x_{i+۱}, \cdots, x_{i+n}] = \frac{f[x_{i+۱}, \cdots, x_{i+n}] - f[x_i, x_{i+۱}, \cdots, x_{i+n-۱}]}{x_{i+n} - x_i}.$$

۳.۲.۱ درونیابی نیوتن[۴]

فرض کنید $f(x_\circ)$، $f(x_۱)$، $\cdots$ و $f(x_n)$ مقادیر تابع در نقاط $x_\circ$، $x_۱$، $\cdots$ و x_n باشد. هدف عبارت است از پیدا کردن چندجمله‌ای حداکثر از درجه n، $p_n(x)$ که داشته باشیم

$$p_n(x_i) = f(x_i), i = \circ, ۱, ۲, \cdots, n.$$

قرار می‌دهیم

$$p_n(x) = a_\circ + a_۱(x - x_\circ) + \cdots + a_n(x - x_\circ)\cdots(x - x_{n-۱}), \qquad (۳.۱)$$

[۳]Divided difference

[۴]Newton interpolation

دراین‌صورت، اگر $x = x_0$، آنگاه $p_n(x_0) = a_0 = f(x_0)$.
اگر $x = x_1$، آنگاه

$$p_n(x_1) = f(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) \Rightarrow a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1].$$

با ادامه این روند چندجمله‌ای درونیاب نیوتن به صورت

$$p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + \cdots + (x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \cdots, x_n]$$

خواهد بود.

۴.۲.۱ درونیابی اسپلاین[۵]

براي رسیدن به نتایج دقیق‌تر در مسائل درونیابی می‌توان از چندجمله‌ایهای درجه بالاتر استفاده کرد. اما استفاده از چندجمله‌ایهای درجه بالا نه‌تنها تعداد عملیات محاسباتی را افزایش می‌دهد بلکه نتایج حاصل به علت خطای ناشی از گرد کردن ممکن است منجر به نتیجه دقیق نشود. برای پایین نگه داشتن درجه چندجمله‌ایهای درونیاب و رسیدن به دقت مورد نظر از درونیابی اسپلاین استفاده می‌شود. فرض کنید $\Delta = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ افرازی از بازه $[a, b]$ باشد.

تعریف ۱.۲.۱. اسپلاین مکعبی(تابع) S_Δ روی Δ یک تابع حقیقی $S_\Delta : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ است اگر

الف) $S_\Delta(x)$ و مشتقات آن تا مرتبه ۲ در بازه $[a, b]$ پیوسته باشد،

ب) $S_\Delta(x)$ در هر زیر بازه $[x_{i-1}, x_i]$، $1 \leq i \leq n$ یک چند جمله‌ای حداکثر درجه ۳ باشد.

۳.۱ درونیابی مرکز ثقل [۶]

برای رفع مشکلات درونیابی لاگرانژ می‌توان درونیابی لاگرانژ را به‌شکل دیگری بازنویسی کرد. اولین هدف ما از این کار این است که بتوانیم دستور لاگرانژ را به‌صورتی بیان کنیم که دارای مرتبه محاسباتی $o(n)$ باشد. همانطوری که دیدیم چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ به‌صورت

[۵] Spline interpolation

[۶] Barycentric interpolation

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x) f_k, \quad L_k(x) = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j},$$

است. فرض کنید $L(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$. دراین‌صورت

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} f_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{L(x)}{x - x_k} \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{1}{x_k - x_j} f_k \end{aligned}$$

اگر w_k را به‌صورت

$$w_k = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{1}{x_k - x_j} \tag{۴.۱}$$

در نظر بگیریم، آنگاه

$$p_n(x) = L(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{w_k}{x - x_k} f_k \tag{۵.۱}$$

که آن را شکل اصلاح شده درونیابی لاگرانژ می‌گویند.

حال فرض کنید که تابع f در (۵.۱) تابع ثابت $f(x) = 1$ باشد. دراین‌صورت داریم

$$L(x) = 1 \Big/ \sum_{k=0}^{n} \frac{w_k}{(x - x_k)}.$$

با جایگذاری رابطه فوق در (۵.۱) خواهیم داشت

$$p_n(x) = \frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{w_k}{x - x_k} f_k}{\sum_{k=0}^{n} \frac{w_k}{x - x_k}} \tag{۶.۱}$$

که آن را شکل مرکز ثقل درونیابی لاگرانژ می‌گویند[۴]. می‌بینیم دستور مرکز ثقل اساسا یک دستور لاگرانژ است اما وزن‌ها در صورت و مخرج به‌صورت یکسان ظاهر می‌شوند ولی مخرج بدون داده‌های f_j می‌باشد، این نشان می‌دهد که هر عامل مستقل از j را می‌توان در وزن‌های w_j حذف کرد بدون اینکه در مقدار $p_n(x)$ موثر باشد. با توجه به (۶.۱) مشاهده می‌کنیم اضافه کردن یک نقطه به نقاط درونیابی شامل دو مرحله زیر است

- تقسیم هر w_j بر $(x - x_{n+1})$ به‌ازای $j = 0, 1, \cdots, n$ یک محاسبه برای هر نقطه.
- محاسبه w_{n+1} با استفاده از (۴.۱) با $n + 1$ عمل دیگر.

۴.۱ قضیه‌ها و تعریف‌های مقدماتی

۱.۴.۱ تعریف‌های مقدماتی

تعریف ۱.۴.۱. تابع $w(x)$ را تابع وزن در $[a, b]$ گویند. اگر دارای شرایط زیر باشد

الف) $\forall x \in [a, b],\ w(x) \geq 0$ و روی زیر بازه‌های متناهی یا نامتناهی $[a, b]$ اندازه‌پذیر باشد.

ب) تمام گشتاورهای $\mu_k = \int_a^b x^k w(x) dx$، $k = 0, 1, 2, \cdots$ موجود و متناهی باشند.

ج) به‌ازای هر چندجمله‌ای نامنفی $s(x)$ از

$$\int_a^b w(x) s(x) dx = 0$$

نتیجه شود

$$s(x) \equiv 0.$$

فرض کنید $f, g \in \mathbb{R}$. دراین‌صورت ضرب داخلی دو تابع با نماد (f, g) نشان داده می‌شود به‌طوری‌که

$$(f, g) = \int_a^b w(x) f(x) g(x) dx.$$

تعریف ۲.۴.۱. دو تابع f و g را متعامد گویند، هرگاه $(f, g) = 0$.

تعریف ۳.۴.۱. تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را هموار گویند هرگاه مشتق آن موجود و پیوسته باشد. در حالت کلی تابع $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ را هموار(بی‌نهایت بار هموار) گویند هرگاه مشتقات جزئی آن از همه مرتبه‌ها موجود و پیوسته باشد.

تعریف ۴.۴.۱. اگر f و g دو تابع بر حسب h باشند که همواره $g(h) \neq 0$ و همچنین داشته باشیم

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{g(h)} = C \neq 0$$

آنگاه می‌نویسند $f(h) = O(g(h))$. در حالت خاص که $g(h) = h^p$ که p یک عدد حقیقی مثبت است، می‌نوسیم $f(h) = O(h^p)$.

۲.۴.۱ قضیه‌های مقدماتی

قضیه ۵.۴.۱. [۱] *فرض کنید g تابعی پیوسته در بازه $[a,b]$ و تابع h در بازه $[a,b]$ تغییر علامت ندهد دراین‌صورت عددی مانند $\eta \in [c,d]$ وجود دارد به‌طوری‌که*

$$\int_c^d g(x)h(x)dx = g(\eta)\int_c^d h(x)dx.$$

قضیه ۶.۴.۱. [۱۲] *اگر f دارای مشتق پیوسته مرتبه $n+۱$ باشد و $x_۰$، $x_۱$، $\cdots$ و x_n نقاط درونیابی دو به دو متمایز باشند آنگاه نقطه‌ای مانند $\xi \in I[x_۰, x_۱, \cdots, x_n, \overline{x}]$ وجود دارد که*

$$f(\overline{x}) - p(\overline{x}) = (\overline{x} - x_۰)(\overline{x} - x_۱)\cdots(\overline{x} - x_n)\frac{f^{(n+۱)}(\xi)}{(n+۱)!}.$$

مثال ۷.۴.۱. اگر $f(x) = x^{n+۱}$ و $p(x)$ چندجمله‌ای درونیاب $f(x)$ در نقاط $x_۰$، $x_۱$، $\cdots$ و x_n باشد، آنگاه

الف)

$$p(x) = x^{n+۱} - (x - x_۰)(x - x_۱)\cdots(x - x_n),$$

ب)

$$f[x_۰, x_۱, \cdots, x_n, x] = ۱.$$

حل: الف) با استفاده از قضیه خطای چندجمله‌ای درونیاب درونیاب داریم

$$x^{n+۱} - p(x) = \prod_{j=۰}^{n}(x - x_j) \times \frac{(n+۱)!}{(n+۱)!} = \prod_{j=۰}^{n}(x - x_j)$$

ب) چون $f(x) = x^{n+۱}$، $n+۱$ بار مشتق پذیر است، پس

$$f[x, x_۰, \cdots, x_n] = \frac{f^{(n+۱)}(\xi_x)}{(n+۱)!}$$

بنابراین

$$f[x, x_۰, \cdots, x_n] = \frac{(n+۱)!}{(n+۱)!} = ۱.$$

مثال ۱.۴.۸. نشان دهید که

$$f[x, x_۰, \cdots, x_n] = \frac{f^{(n+۱)}(\eta)}{(n+۱)!}.$$

حل: اگر n یک عددی طبیعی باشد، آنگاه

$$f[x, x_۰, x_۱, \cdots, x_n] = \frac{\Delta^{n+۱} f}{(n+۱)! h^{n+۱}},$$

[۲]. از طرف دیگر

$$\Delta^{n+۱} f = f^{(n+۱)}(\eta) h^{n+۱}, \quad \eta \in (x_۰, x_n)$$

بنابراین

$$f[x, x_۰, x_۱, \cdots, x_n] = \frac{f^{(n+۱)}(\eta)}{(n+۱)!}.$$