دانشکده علوم

گروه ریاضی

گزارش پایانی پایان نامه

عنوان:

حل سیستم مسائل مقدار مرزی با استفاده از اسپلاین پارامتری

استاد راهنما:

دکتر محمد ضارب نیا

توسط:

زهرا سروری

زمستان — ۱۳۸۹

نام خانوادگی: سروری **نام:** زهرا

عنوان پایان‌نامه: حل سیستم مسائل مقدار مرزی با استفاده از اسپلاین پارامتری .

استاد راهنما: دکتر محمد ضارب‌نیا

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی **گرایش:** کاربردی **دانشگاه:** محقق اردبیلی
دانشکده: علوم **تاریخ فارغ‌التحصیلی:** **تعداد صفحه:** ۱۰۰

کلمات کلیدی : اسپلاین، اسپلاین پارامتری، اسپلاین تحت فشار، مسائل مقدار مرزی، همگرایی، مرتبه، خطای برشی موضعی

چکیده:

در این پایان نامه، اسپلاین پارامتری درجه سه تحت فشار را برای به دست آوردن تقریبی برای جواب سیستمی از مسأله‌ی مقدار مرزی مرتبه دو که از مطالعه‌ی مسائل مختلفی از شاخه‌های متعدد علوم محض و کاربردی به وجود می‌آیند، به کار می‌بریم. به علاوه، تقریب عددی بر اساس اسپلاین پارامتری درجه پنج را برای حل سیستمی از مسأله‌ی مقدار مرزی مرتبه چهار، به دست می‌آوریم. همچنین برای نشان دادن کارایی این روش‌ها، از چند مثال عددی استفاده می‌کنیم.

فهرست مندرجات

مقدمه

در شاخه‌های مختلف علوم و مهندسی با مسائلی مواجه می‌شویم که به کمک مدل‌های ریاضی، مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرند. مدل‌های ریاضی معمولاً از مجموعه‌ی معادلات دیفرانسیلی تشکیل می‌شوند که جواب‌های آنها یک تقریب برای سیستم واقعی است. بنابراین برای بررسی رفتار سیستم‌های واقعی، لازم است که قادر به حل معادلات دیفرانسیل باشیم. به همین خاطر است که حل چنین مسائلی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار می‌باشد.

شرایط حاکم بر پدیده‌هایی که برای مطالعه نیازمند مدل‌های ریاضی هستند، علاوه بر اینکه محدوده‌ی جواب معادله‌ی دیفرانسیل را مشخص می‌کنند، باعث تولید انواع مسائل در معادلات دیفرانسیل نیز می‌شوند که از آن جمله می‌توان به مسائل مقدار اولیه و مسائل مقدار مرزی اشاره کرد. در مسائل مقدار اولیه، تمام شرایط اولیه، یعنی مقدار تابع جواب و حتی گاهی مشتقات آن در یک نقطه از دامنه‌ی جواب و معمولاً در نقطه‌ی شروع، مشخص است. در مسائل مقدار مرزی، شرایط مسأله، من جمله مقدار تابع جواب در بیش از یک نقطه (معمولاً در دو نقطه) از دامنه‌ی جواب، داده می‌شود.

مسائل مقدار مرزی در بسیاری از کاربردها برای مثال در مطالعه‌ی تغییر مکان و جابجایی، جریان گرما و مسائل ارتعاش پیش می‌آیند. در حالت کلی، چه در مسائل مقدار اولیه و چه در مسائل مقدار مرزی، دو نوع روش کلی برای حل مسائلی از معادلات دیفرانسیل وجود دارد که عبارتند از روش‌های تحلیلی و روش‌های عددی.

بعضی از معادلات دیفرانسیل را می‌توان با استفاده از تکنیک‌هایی، به طور صریح و تحلیلی حل کرد و جواب دقیق آن‌ها را به دست آورد اما، گاهی مسائلی پیش می‌آیند که وقتی مدل ریاضی آن‌ها را می‌سازیم و حتی جزئیات بیشتری از دستگاه‌های واقعی را در مدل ریاضی دخالت می‌دهیم، به آن دسته از معادلاتی می‌رسیم که به طور تحلیلی قابل حل نیستند و یا منجر به راه‌حل‌هایی می‌شوند که به دست آوردن یا ارزیابی آنها، مشکل و حتی گاهی غیر ممکن می‌باشد. در چنین مواقعی است که از روش‌های عددی برای تقریب جواب واقعی مسأله استفاده می‌کنیم.

تاکنون برای حل عددی معادلات دیفرانسیل روش‌های زیادی مورد مطالعه قرار گرفته است که از آن جمله می‌توان به استفاده از یک تابع درونیاب به عنوان تقریبی برای جواب معادله‌ی دیفرانسیل اشاره کرد. در این میان، چند جمله‌ای‌های درونیاب را می‌توان نام برد که

محاسبات راحت‌تری دارند و در بسیاری از موارد، ابزار مناسبی برای درونیابی هستند. اما این گونه درونیاب‌ها ایراداتی نیز دارند که از آن جمله می‌توان به این نکته اشاره کرد که با افزایش تعداد نقاط درونیابی، درجه‌ی این چندجمله‌ای‌ها نیز افزایش پیدا می‌کند و همین موضوع باعث طولانی شدن محاسبات و بالا رفتن احتمال خطا می‌شود، یعنی هر تغییر کوچک در نقاط درونیابی، موجب تغییراتی عمده در چندجمله‌ای درونیاب می‌شود.

در واقع، درونیاب چندجمله‌ای از لحاظ نظری، ابزار مناسبی است اما از لحاظ عددی، روش‌های بهتری نیز وجود دارد. یکی از این روش‌ها، بر اساس چندجمله‌ای‌های تکه‌ای است. این روش‌ها، منحنی‌هایی می‌سازند که شامل چندجمله‌ای‌هایی با درجه‌ی یکسان هستند که یکی از مهمترین آن‌ها، استفاده از انواع اسپلاین می‌باشد.

توابع اسپلاین از چندجمله‌ای‌هایی بر روی زیربازه‌هایی از یک بازه‌ی مشخص تشکیل می‌شوند که با شرایط پیوستگی خاصی به هم می‌پیوندند و بین گره‌های متوالی از بازه را درونیابی و از گره مشترک بین دو زیربازه‌ی متوالی، عبور می‌کنند. با توجه به اینکه در فصل دوم این پایان‌نامه، تعریف و دسته‌بندی بعضی انواع اسپلاین را مورد مطالعه و بررسی قرار خواهیم داد، لذا لازم است که در اینجا، ابتدا مروری کوتاه به تاریخچه‌ی شکل‌گیری توابع اسپلاین داشته باشیم.

مهندسین نقشه‌کشی برای مدت طولانی از نوارهای باریک و بلندی که از مواد قابل انحنا ساخته می‌شده، برای نمایش منحنی‌های همواری که از مجموعه نقاط مفروضی می‌گذشتند استفاده می‌کردند که این نوارها اسپلاین نامیده می‌شدند. با نگه داشتن اسپلاین در نقاط مختلف مناسب، با استفاده از وزنهایی که " نشان‌ها " نامیده می‌شوند و با تغییر دادن وضعیت اسپلاین، می‌توان یک منحنی هموار از این نقاط گذراند. بنابراین یک اسپلاین به عنوان یک نوار نرم تعریف می‌شود که می‌تواند توسط وزن‌هایی نگه داشته شود به طوری که از هر یک از نقاط داده شده بگذرد، اما از یک بازه به بازه‌ی دیگر بر طبق قوانین خمیدگی به طور یکنواخت عبور کند.

معمولاً یک اسپلاین از درجه‌ی m ، یک تابع چند جمله‌ای قطعه به قطعه است که در یک ناحیه مانند D تعریف می‌شود به طوری که در آن، ناحیه‌ی D قابل تجزیه به تعدادی زیر مجموعه است که تابع در هر کدام از آنها، یک چند جمله‌ای حد اکثر از درجه‌ی m است. همچنین تابع ذکر شده و $(m-k)$ مشتق اول آن در ناحیه‌ی D پیوسته است.

با توجه به ویژگی‌هایی که برای تابع اسپلاین مطرح است ، کابردهای علمی فراوانی را می‌توان برای آن برشمرد که از آن جمله می‌توان به نقش این توابع به عنوان درونیاب در کارهای عمرانی و نقشه‌برداری اشاره کرد. به عنوان مثال، وقتی که از یک مسیر طولانی مثل باند فرودگاه یا مسیر تونل بین شهرها و یا خط متروی مابین ایستگاه‌های شهری و ... نقشه‌برداری می‌شود، مختصات موجود در این کار که همان داده‌ها یا مفروضات هستند، مورد نیاز است. اگر رفتار این مختصات یا به عبارتی، منحنی متصل کننده‌ی این نقاط را داشته باشیم، مسیر مورد نظر تعیین می‌شود. اما بدیهی است که برای داشتن یک مسیر خیلی هموار با کمترین انحنا، باید تابع‌ای به عنوان تقریب زننده‌ی رفتار این مختصات به کار رود که تابع‌ای هموار و با انحنای پایین‌تری باشد. این کار می‌تواند با استفاده از درونیاب اسپلاین انجام گیرد. از دیگر کاربردهای اسپلاین، می‌توان به نقش آن به عنوان تقریب در علوم پزشکی مخصوصاً در سونوگرافی و نیز در کارهای گرافیکی و در ساختار نرم‌افزارهای فارسی‌نویس و نرم‌افزار مهندسی اتوکد [۱] اشاره کرد. به هر حال، به کار گیری اسپلاین به عنوان یک تابع تقریب‌زن و درونیاب، به ویژه در روش‌های عددی به منظور حل بعضی از انواع معادلات دیفرانسیل و مسائل مقدار مرزی ، بسیار موفقیت آمیز بوده است.

از آن جمله محققانی که از بعضی انواع اسپلاین، مانند اسپلاین‌های چندجمله‌ای و غیر چندجمله‌ای برای حل عددی معادلات دیفرانسیل استفاده کرده‌اند می‌توان به دی‌بور[۲]، آلبرگ[۳]، لوسکالسو[۴] ، تالبوت[۵]، فایف[۶]، آلباسینی[۷] ، هوسکینز[۸]، میکولا[۹]، جین[۱۰] ، عزیز[۱۱]، رشیدی‌نیا[۱۲] و ... اشاره کرد.

استفاده از توابع اسپلاین برای حل مسائل مقدار مرزی و اولیه‌ی معادلات دیفرانسیل جزئی و معمولی، توسط بسیاری از ریاضیدانان، عمومیت داشته اما استفاده از اسپلاین مکعبی معمولی

---

[۱] Auto Cad
[۲] De Boor
[۳] Ahlberg
[۴] Loscalzo
[۵] Talbot
[۶] Fyfe
[۷] Albasiny
[۸] Hoskins
[۹] Micula
[۱۰] Jain
[۱۱] Aziz
[۱۲] Rashidinia

برای حل مسائل مقدار مرزی خطی، اولین بار توسط بیکلی[۱۳] پیشنهاد شد. ایده‌ی اصلی او، استفاده از شرایط پیوستگی برای گسسته‌سازی مسأله‌ی مقدار مرزی خطی بود. بعداً نیز فایف، اصلاح شده‌ی روش بیکلی را برای حالت خاصی از مسئله‌ی مقدار مرزی خطی، مطرح کرد.

روش اسپلاین درجه سه که بیکلی به کار برد، دارای مرتبه‌ی همگرایی $O(h^۲)$ است. درحالیکه خود تابع اسپلاین درجه سه‌ی معمولی، دارای درجه‌ی دقت $O(h^۴)$ است. پس این موضوع ایجاب می‌کند که راه حلی تولید شود که با استفاده از اسپلاین درجه سه، به دقتی از مرتبه‌ی $O(h^۴)$ برسیم. برای این منظور، نوعی از اسپلاین‌های غیر چندجمله‌ای تولید می‌شوند که به پارامتری مانند $w > ۰$ وابسته هستند و از طریق حل یک معادله‌ی دیفرانسیل در هر زیربازه تعریف می‌شوند، به طوری‌که ثابت‌های جواب آن از طریق شرایط حاکم بر مسأله در نقاط گره‌ای به دست می‌آیند. این اسپلاین‌ها از کلاس $C^۲$ هستند و وقتی که $w \to ۰$ به تابع اسپلاین درجه سه‌ی معمولی تقلیل می‌یابند.

البته می‌توان توابع اسپلاین پارامتری از درجات بالاتر را نیز تولید کرد. این توابع نیز مانند سایر توابع اسپلاین، معمولاً به عنوان تقریب در حل عددی مسائلی همچون مسائل مقدار مرزی، به کار می‌روند. به عنوان مثال، در سال‌های اخیر رشیدی‌نیا و همکاران برای حل عددی مسائل مقدار مرزی دو نقطه‌ای منفرد به صورت

$$x^{-\alpha}(x^{\alpha}y')' = f(x,y), \quad ۰ < x < ۱,$$

با شرایط مرزی $y(۰) = A$ و $y(۱) = B$ یا $y'(۰) = A$ و $y(۱) = B$ و نیز برای حل عددی مسأله‌ی مقدار مرزی منفرد با پارامتر اختلال ϵ، به صورت

$$-\epsilon y'' + p(x)y = f(x), \quad ۰ < x < ۱, \quad ۰ < p(x) < p(۱),$$

با شرایط مرزی $y(۰) = A$ و $y(۱) = B$ و با فرض $۰ < \epsilon < ۱$، از تابع اسپلاین پارامتری درجه سه استفاده کرده‌اند[۲۷, ۲۸]. هم‌چنین ارشدخان در [۲۹] برای حل یک نوع مسئله‌ی مقدار مرزی دو نقطه‌ای به شکل

$$y''(x) = f(x)y(x) + g(x), \quad a \le x \le b,$$

با شرایط مرزی $y(a) = \alpha_۰$ و $y(b) = \alpha_۱$، از اسپلاین پارامتری درجه سه استفاده کرده است. در مقاله‌ی [۳۰] طارق عزیز و ارشد خان نیز برای حل یک نوع مسئله‌ی مقدار مرزی منفرد و

[۱۳] Bickley

اختلال مرتبه‌ی دو به فرم

$$\epsilon y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \le x \le b, \quad 0 < \epsilon < 1,$$

با شرایط مرزی $y(a) = \alpha_0$ و $y(b) = \alpha_1$، این نوع تابع اسپلاین را به کار برده‌اند. هم‌چنین در [۳۱]، ژانگ[۱۴] و دینگ[۱۵] برای حل عددی یک معادله‌ی هیپوربولیک[۱۶] به شکل

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 \le x \le 1, \quad t \ge 0,$$

با شرایط اولیه‌ی

$$\begin{cases} u(x,0) = g_1(x), & 0 \le x \le 1, \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g_2(x), & 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

و شرایط مرزی

$$\begin{cases} \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} - \lambda_1 u(0,t) = 0, & \lambda_1 > 0, \ t \ge 0, \\ \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} + \lambda_2 u(1,t) = 0, & \lambda_2 > 0, \ t \ge 0, \end{cases}$$

از اسپلاین پارامتری درجه سه استفاده نموده‌اند.

این پایان‌نامه از فصل‌های زیر تشکیل شده است. در فصل اول برخی تعاریف و قضایای مورد استفاده در فصل‌های بعدی را بیان می‌کنیم. در فصل دوم با توجه به مرجع [۲۶]، با تعریف تابع اسپلاین آشنا شده و انواع اسپلاین پارامتری درجه سه و درجه پنج را معرفی خواهیم کرد. حل عددی یک سیستم از مسئله‌ی مقدار مرزی مرتبه‌ی دو با استفاده از اسپلاین پارامتری درجه سه، بررسی همگرائی این روش و نیز نتایج عددی مربوط به آن را در فصل سوم مطرح خواهیم کرد که مطالب آن با مطالعه‌ی مرجع [۳۲] نوشته شده است. در فصل چهار نیز با استناد به مرجع [۳۳]، اسپلاین پارامتری درجه‌ی پنج را برای به دست آوردن جواب عددی یک سیستم از مسئله‌ی مقدار مرزی مرتبه‌ی چهار به‌کار برده و با ارائه‌ی مثال‌هایی، کارایی این روش را نشان می‌دهیم.

لازم به ذکر است که در این پایان‌نامه، برای تولید نتایج حاصل از مثال‌های عددی، برنامه‌هایی به زبان Mathematica نوشته و روی کامپیوتری شخصی با مشخصات پنتیوم ۴، CPU 2.16 GHz و RAM 1.96 GB اجرا شده است.

[۱۴] Zhang
[۱۵] Ding
[۱۶] hyperbolic

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل، بعضی از تعاریف و قضایا را که در فصل‌های بعد، از آن‌ها استفاده خواهیم کرد مطرح می‌کنیم.

تعریف ۱.۱. یک نرم برداری روی فضای برداری X، تابع‌ای است حقیقی مقدار مثل $\|.\|$ که در سه شرط زیر صدق می‌کند:

a) $\|x\| \geq 0, \ \forall x \in X,$ و $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0,$

b) $\|\alpha x\| = |\alpha|.\|x\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad \forall x \in X,$

c) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in X.$

تعریف ۲.۱. در تعریف ۱.۱ قرار دهید $X = \mathbb{C}$. در این صورت به ازای هر $p \geq 1$، p- نرم بردار $x = (x_1, \cdots, x_n)^T \in X$ به صورت

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p},$$

تعریف می‌شود. می‌توان دید که $\|.\|_p$ در خواص نرم صدق می‌کند. به ازای $p = 2$ نرم فوق را نرم اقلیدسی و به ازای $p = 1$، آن را نرم مجموع قدر مطلق می‌نامند. به ازای $p = \infty$ داریم

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} = \max_i |x_i|,$$

این نرم را نرم بی‌نهایت یا نرم ماکزیمم نامند.

تعریف ۳.۱. در تعریف ۱.۱، اگر قرار دهیم $X = \mathbb{C}^{n\times n}$، آنگاه برای هر ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} | \ a_{ij} \ |,$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} | \ a_{ij} \ |,$$

درخواص نرم صدق می‌کنند و به ترتیب نرم—۱ و نرم بی‌نهایت ماتریسی نامیده می‌شوند.

تعریف ۴.۱. گوییم نرم ماتریس $\|.\|$ روی $\mathbb{C}^{n\times n}$ خاصیت ضربی دارد، هرگاه به ازای هر $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$،

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

لم ۵.۱ اگر برای ماتریس مربعی M داشته باشیم $\|M\| < ۱$، آنگاه $(I+M)^{-۱}$ وجود دارد و

$$\|(I+M)^{-۱}\| \leq \frac{۱}{۱-\|M\|},$$

که در آن $\|.\|$ یک نرم ماتریسی دلخواه می‌باشد.

اثبات: به برهان خلف فرض کنید که $I+M$ یک ماتریس منفرد باشد. در این صورت برداری مثل $x \neq ۰$ موجود است به طوری که $(I+M)x = ۰$. آنگاه داریم:

$$x = -Mx \Rightarrow \|x\| = \|-Mx\| \leq \|M\|\|x\|,$$

در نتیجه

$$\|M\| \geq ۱,$$

که یک تناقض است. برای اثبات قسمت دوم، قرار می‌دهیم $C = (I+M)^{-۱}$. لذا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} ۱ &= \|I\| = \|(I+M)C\| = \|C+MC\| \\ &\geq \|C\| - \|MC\| \\ &\geq \|C\| - \|M\|\|C\| = \|C\|(۱-\|M\|). \end{aligned}$$

بنابراین

$$\|C\| \leq \frac{۱}{۱-\|M\|}. \quad \square$$

تعریف ۶.۱. ماتریس A را نامنفرد گویند، هرگاه $\det(A) \neq ۰$ و آن را منفرد گویند، هرگاه $\det(A) = ۰$.

لم ۷.۱ اگر A و B دو ماتریس $n \times n$ و معکوس‌پذیر باشند، آنگاه AB نیز معکوس‌پذیر است و $(AB)^{-۱} = B^{-۱}A^{-۱}$.

اثبات: به [۳۴] مراجعه کنید. $\square$

تعریف ۸.۱. ماتریس $A = (a_{ij}) \in \Re^{n\times n}$ را نواری[۱] گویند، هرگاه اعداد صحیح r, s وجود داشته باشند به طوری که $۱ < r, s < n$ و

$$a_{ij} = ۰, \quad j - i \geq r, \quad i - j \geq s,$$

همچنین تعداد قطرها برابر $w = r + s - ۱$ می‌باشد.

مثال ۹.۱ ماتریس $A = (a_{ij})$ از مرتبه‌ی $n \times n$ را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$a_{ij} = \begin{cases} ۲, & i = j = ۱, ۲, \cdots, n, \\ -۱, & |i - j| = ۱, \\ ۰, & \text{سایر اندیس‌ها}. \end{cases} \qquad (۱.۱)$$

این ماتریس، یک ماتریس نواری با $r = s = ۲$ و تعداد قطرهای آن $w = ۳$ می‌باشد که یک ماتریس سه قطری است. چنین ماتریس‌هایی در شاخه‌های مختلف علوم و مهندسی به کار می‌روند. به عنوان مثال در بررسی همگرائی روش‌های عددی که برای حل مسائل مقدار مرزی به کار می‌روند، استفاده می‌شوند. ما نیز در فصل سوم این پایان‌نامه، از این ماتریس و معکوس آن که همراه با یک لم معرفی خواهد شد، استفاده خواهیم کرد.

[۱] Band matrix

تعریف ۱۰.۱. ماتریس $A = (a_{ij}) \in \Re^{n\times n}$ را یکنوا گوییم، هرگاه:

$$Ax \geq 0 \Rightarrow x \geq 0, \quad x \in \Re^n.$$

قضیه **۱۱.۱** اگر $A \in \Re^{n\times n}$ یک ماتریس یکنوا باشد، آنگاه معکوس‌پذیر است.

اثبات: فرض کنید که A یک ماتریس مربعی از مرتبه‌ی n و یکنوا باشد و $Ax \leq 0$، آنگاه

$$-Ax = A(-x) \geq 0 \Rightarrow -x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0.$$

بنابراین، اگر A یک ماتریس یکنوا باشد و $Ax = 0$، آنگاه نتیجه می‌گیریم که $x = 0$، یعنی A نامنفرد است. □

تعریف ۱۲.۱. ماتریس $A = (a_{ij}) \in \Re^{n\times n}$ را تحویل پذیر[۲] گویند، هرگاه ماتریس جایگشتی مانند P وجود داشته باشد به طوری که

$$PAP^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

که در آن A_{11} و A_{22} ماتریس های مربعی هستند. ماتریسی که تحویل پذیر نباشد، تحویل ناپذیر[۳] نامیده می‌شود.

قضیه‌ی زیر یک شرط لازم و کافی را برای تحویل‌پذیری ماتریس $A \in \Re^{n\times n}$ بیان می‌کند.

قضیه **۱۳.۱** ماتریس $A = (a_{ij}) \in \Re^{n\times n}$ تحویل‌پذیر است، اگر و تنها اگر مجموعه‌ای ناتهی مانند S که $S \subset N = \{1, 2, \ldots, n\}$ و $S \neq N$، وجود داشته باشد به طوری که برای هر زوج اندیس (i, j) که $i \in S$ و $j \in N - S$، داشته باشیم $a_{ij} = 0$.

اثبات: به مرجع [۳۴] مراجعه کنید. □

---

[۲] Reducible

[۳] Irreducible

مثال ۱۴.۱ اگر

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & & a_{1r} & & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{rr} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nr} & & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

باشد، آنگاه A تحویل پذیر است و در این مورد $S = \{r\}$ می‌باشد.

لم ۱۵.۱ ماتریس سه‌قطری $A = (a_{ij}) \in \Re^{n\times n}$ تحویل‌ناپذیر است، اگر و تنها اگر

$$a_{i,i-1} \neq 0, \quad i = 2, 3, \cdots, n, \qquad a_{i,i+1} \neq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1.$$

اثبات: به مرجع [۲۰] مراجعه کنید. □

قضیه ۱٦.۱ فرض کنید که ماتریس $A = (a_{ij}) \in \Re^{n\times n}$ تحویل‌ناپذیر بوده و در شرایط زیر صدق کند:

الف) $a_{ij} \leq 0 \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \cdots n$؛

ب)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \begin{cases} \geq 0, & i = 1, 2, \cdots, n, \\ > 0, & \text{حداقل به ازای } i \text{ ای}. \end{cases} \tag{3.1}$$

در این صورت ماتریس A یکنواست.

اثبات: قضیه را با برهان خلف ثابت می‌کنیم. برای این منظور، فرض کنید که ماتریس A یکنوا نباشد. بنابراین بردار n تایی مانند Z با حداقل یک مؤلفه‌ی منفی مانند z_q وجود دارد به‌طوری که

$$AZ \geq 0, \quad q \in N = \{1, 2, \cdots, n\},$$

از طرفی، فرض می‌کنیم که بردار e یک بردار n تایی با مؤلفه‌های ۱ باشد. از آنجایی که درایه‌های بردار Ae همان مجموع عناصر روی سطر نظیر ماتریس A می‌باشد، لذا طبق شرط (ب) داریم: $Ae > 0$. چون مجموع دو بردار نامنفی، یک بردار نامنفی می‌شود، بنابراین با فرض $0 \leq \lambda \leq 1$ می‌توان نوشت:

$$\lambda AZ + (1-\lambda)Ae \geq 0,$$

در نتیجه

$$A(\lambda Z + (1-\lambda)e) \geq 0. \tag{۴.۱}$$

قرار می‌دهیم:

$$\omega_\lambda = (\lambda Z + (1-\lambda)e).$$

توجه داریم که ω_λ تابع‌ای برداری بر حسب λ است که به ازای $\lambda = 0$ تمام درایه‌های ω_0 مثبت است و به ازای $\lambda = 1$، بردار ω_1 دارای حداقل یک مؤلفه‌ی منفی مانند z_q است. چون درایه‌های ω_λ توابعی پیوسته بر حسب λ هستند، پس وقتی λ بین ۰ و ۱ تغییر می‌کند، حداقل یک λ' ای وجود دارد به‌طوری که یکی از مؤلفه‌های بردار $\omega_{\lambda'}$ مقدار صفر بگیرد. فرض کنید که γ کوچکترین مقدار از λ باشد که به ازای آن، ω_γ حداقل یک مؤلفه‌ی صفر دارد. واضح است که $0 < \gamma < 1$.

به دنبال آن هستیم که با اثبات تحویل‌پذیر بودن A، به تناقض با صورت قضیه برسیم. از این رو، مجموعه‌ی S را به صورت مجموعه‌ی اندیس‌هایی از مؤلفه‌های بردار ω_γ که دارای مقدار صفر می‌باشند تعریف می‌کنیم. مسلماً $S \neq \phi$ (طبق تعریف ω_γ) و نیز $T = N - S$ نیز یک مجموعه‌ی ناتهی است. اکنون طبق رابطه‌ی (۴.۱) می‌توان نوشت:

$$A(\gamma Z + (1-\gamma)e) \geq 0,$$

یعنی $A\omega_\gamma \geq 0$ و در نتیجه

$$\forall i \in N: \quad (A\omega_\gamma)_i \geq 0,$$

بنابراین در حالت خاص، اگر $i \in S$ آنگاه:

$$(A\omega_\gamma)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\omega_{\gamma_j}$$

$$=\sum_{j\in T} a_{ij}\omega_{\gamma_j} \geq \circ, \qquad (۵.۱)$$

ولی وقتی $j \in T$، آنگاه $\omega_{\gamma_j} > \circ$. با توجه به شرط اول قضیه، رابطه‌ی (۵.۱) فقط وقتی برقرار است که:

$$a_{ij} = \circ, \quad i \in S, \quad j \in T,$$

این رابطه دقیقاً تعریف تحویل‌پذیر بودن ماتریس A است که با توجه به صورت قضیه که ماتریس A را یک ماتریس تحویل‌ناپذیر فرض کرده بودیم، در تناقض است. □

مثال ۱۷.۱ ماتریس نواری $A = (a_{ij}) \in \Re^{n\times n}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$a_{ij} = \begin{cases} ۲, & i = j = ۱, ۲, \cdots, n, \\ -۱, & |i-j| = ۱, \\ \circ, & \text{سایر اندیس‌ها}. \end{cases}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، این ماتریس در شرایط قضیه‌ی ۱۶.۱ صدق می‌کند. لذا این ماتریس یک ماتریس یکنوا و در نتیجه معکوس‌پذیر است.

تعریف ۱۸.۱. فرض کنیم که مقدار تابع $f(x)$ در نقاط $x_\circ, x_۱, \cdots, x_n$ معلوم باشد. تابع $p(x)$ را درونیاب تابع $f(x)$ گوئیم، هرگاه $p(x)$ در شرط زیر صدق کند:

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = \circ, ۱, \cdots, n.$$

از جمله توابع درونیاب، می‌توان به تابع درونیاب لاگرانژ[۴] اشاره کرد که به ازای نقاط $x_\circ, x_۱, \cdots, x_n$، به فرم کلی زیر تعریف می‌شود:

$$p(x) = \sum_{i=\circ}^{n} L_i(x) f(x_i),$$

که در آن

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=\circ \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}, \quad i = \circ, ۱, \cdots, n.$$

[۴] Lagrange

تعریف ۱.۱۹. فرض کنید $f(x)$ و مشتقات آن تا مرتبه‌ی $n+۱$ بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشند و $x_۰ \in [a,b]$. در این صورت عددی مانند $\xi(x)$ بین $x_۰$ و x وجود دارد به طوری که

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

که در آن

$$P_n(x) = f(x_۰) + (x - x_۰)f'(x_۰) + \frac{(x - x_۰)^۲}{۲!}f''(x_۰) + \cdots + \frac{(x - x_۰)^n}{n!}f^{(n)}(x_۰),$$

و

$$R_n(x) = \frac{(x - x_۰)^{n+۱}}{(n+۱)!}f^{(n+۱)}(\xi(x)).$$

$P_n(x)$ را چند جمله‌ای تیلور مرتبه‌ی n ام تابع $f(x)$ در مجاورت نقطه‌ی $x_۰$ و $R_n(x)$ را چند جمله‌ای باقیمانده یا **خطای برشی** متناظر با $P_n(x)$ گویند. تعداد جملات $P_n(x)$ ممکن است بوسیله‌ی دقت حل مسأله تعیین شوند.

اگر خطای $\epsilon > ۰$ معلوم باشد و سری تیلور بالا را در جمله‌ی n ام قطع کنیم، آنگاه خواهیم داشت

$$\frac{۱}{(n+۱)!}|x - x_۰|^{n+۱}\left|f^{n+۱}(\zeta)\right| < \epsilon,$$

و اگر

$$M_{n+۱} = \max_{a \le x \le b}\left|f^{(n+۱)}(x)\right|,$$

آنگاه

$$\frac{۱}{(n+۱)!}|x - x_۰|^{n+۱}|M_{n+۱}| < \epsilon.$$

فصل ۲

توابع اسپلاین پارامتری