پایه‌های ریس و دوگان قاب های مدولی در هیلبرت C^* ـ مدول ها

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

فریده جولایی

دانشکده‌ی علوم
گروه ریاضی

۱۳۸۹

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

اساتید راهنما:

دکتراصغر رحیمی و دکتر عباس نجاتی

استاد مشاور:

دکتر نریمانی

چکیده

در این پایان‌نامه قاب‌های دوگان قاب‌های مدولی و پایه‌های ریس در C^* ـ مدول های هیلبرت بررسی می‌شود. در C^* ـ مدول های هیلبرت یک پایه‌ی ریس امکان دارد چند قاب مدولی دوگان داشته باشد . حتی ممکن است دو قاب مدولی دوگان متفاوت داشته باشند، به طوری که هر دو پایه‌ی ریس باشند. در اینجا پایه‌های ریسی که دوگان‌های یکتا دارند، مشخص خواهند شد. علاوه بر این یک شرط لازم و کافی برای یک دوگان پایه‌ی ریس به دست می‌آوریم که آن نیز پایه‌ی ریس باشد. و در خاتمه تعدادی نتایج مربوط به قاب‌های مدولی در هیلبرت C^* ـ مدول‌ها ثابت می‌شود.

فهرست مندرجات

فصل ۱

پیشینه‌ی پژوهش و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در مطالعه‌ی فضاهای برداری یکی از مهمترین مفاهیمی که درمورد پایه‌ها موجود است، این است که هر عضو فضا را بتوانیم به صورت ترکیب خطی از اعضای پایه بنویسیم. بنابراین شرایط برای یک پایه خیلی محدود است: (استقلال خطی بین اعضا). پیدا کردن پایه‌هایی که در شرایط بیشتری صدق کند سخت یا حتی غیر ممکن است.

هر عضوی در یک فضای هیلبرت به صورت یک ترکیب خطی از اعضای قاب نوشته می‌شود. اما استقلال خطی بین اعضای قاب مورد نیاز نیست.

قاب ها برای فضای هیلبرت توسط دافین [۱] وشیفر [۲] درسال ۱۹۵۲تعریف شد ([۱۹]).آن ها قاب‌ها را به عنوان ابزاری برای مطالعه‌ی سری‌های فوریه غیر هارمونیک یعنی دنباله‌ای به شکل $\{e^{i\lambda_n x}\}_{n\in z}$ که $\{\lambda_n\}_{n\in z}$ خانواده‌ای از اعداد حقیقی یا مختلط است، استفاده می کردند. در سال ۱۹۸۰، یانگ [۳] کتابش را ([۲۶]) که شامل مطالب اساسی در مورد قاب‌ها بود، نوشت. سپس در

---

[۱] Duffin
[۲] Schaeffer
[۳] Young

سال ۱۹۸۵، دابوشی [۴] ، گراسمان [۵] و مایر [۶] ([۲۷]) قاب‌هایی را مشاهده کردند که می‌توانند برای پیدا کردن بسط سری های توابع در $L^2(\mathbb{R})$ مورد استفاده قرار گیرند به طوری که مشابه بسط مورد استفاده‌ی پایه‌های متعامد یکه می باشند.

قاب ها در پردازش سیگنال ها، پردازش تصویر، تراکم اطلاعات و نظریه‌ی نمونه برداری مورد استفاده قرار می گیرد.

تحقیقات اخیر نشان می‌دهند که نظریه‌ی قاب‌ها رابطه‌ی قوی با بعضی نتایج مشهور در زمینه‌های دیگر ریاضیات دارند. برای مثال: حدس کدیسون — سینگر [۷] در C^* ـ جبرها.

در نظریه‌ی قاب ها، حدس فایشتنگر [۸] توضیح می‌دهد که هر قاب کراندار می تواند به صورت اجتماع متناهی از دنباله‌های نوشته شود. کارهای زیادی روی این حدس در طی سال‌های کم انجام گرفته است.

در سال های اخیر، ریاضیدان‌های بسیاری نظریه‌ی قاب ها در فضای هیلبرت را به نظریه‌ی قاب‌ها در هیلبرت C^* ـ مدول ها تعمیم دادند و به نتایج مهمی که، نظریه‌ی قاب ها را توانگر کرد، رسیدند. همچنین دلایلی وجود دارد که نشان می‌دهد نظریه‌ی هیلبرت C^* ـ مدول ها و نظریه‌ی موجک‌ها و قاب‌ها رابطه‌ی تنگاتنگ با یکدیگر دارند.

فرانک [۹] و لارسون [۱] قاب‌های استاندارد را در هیلبرت C^* ـ مدول‌ها در سال ۱۹۹۸ تعریف کردند ([۱۱]) و نتایجی را برای قاب‌های استاندارد در هیلبرت C^* ـ مدول های شمارا مولد و متناهی مولد روی C^* ـ جبر یکه دار بدست آوردند ([۸]). در ضمن حالت هیلبرت C^* ـ مدول ها روی

[۴] Daubechies
[۵] Grossmann
[۶] Mayer
[۷] Kadisonsinger
[۸] Feichtinger
[۹] Frank
[۱] Larson

C^* ـ جبر یکه دار توسط ریبورن [۱۱] و تامسون [۱۲] بررسی شد ([۲۸]).

به علاوه توسط بِیکیک [۱۳] و گلجاس [۱۴] قاب‌های استاندارد برای خانواده‌ای از هیلبرت C^* ـ مدول‌های شمارا مولد در یک مدول بزرگتر خوش تعریف کشف شد ([۲۹]). علاوه براین مسائل زیادی در مورد قاب‌ها در هیلبرت C^* ـ مدول ها هنوز حل نشده‌اند. برای مثال می‌توان به مسئله‌ی باز مشهور که آیا هر هیلبرت C^* ـ مدول یک قاب مدولی قبول می کند؛ اشاره کرد.

بعضی از تعاریف و نتایج قاب‌های مدولی ممکن است مشابه همانند خود در فضای هیلبرت باشد. هر فضای هیلبرت یک پایه‌ی متعامد یکه‌دارد که می‌تواند توسط به کار بردن فرایند متعامدسازی یکه گرام — اشمیت [۱۵] برای زیرمجموعه‌ی مولد مستقل خطی از فضای هیلبرت، به دست آید.

[۱۱] Reaburn
[۱۲] Thompson
[۱۳] Bakic
[۱۴] Guljas
[۱۵] Gram - schmidt

۲.۱ قاب‌ها در فضای هیلبرت

در این فصل قضایا و تعاریفی بیان می شود که در فصول بعد از آن ها استفاده می گردد و با توجه به نقش مهم این مباحث در مطالعه فصول بعد، در برخی از موارد به اثبات قضایا نیز اشاره گردیده است.

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید X یک فضای برداری روی $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$) باشد. نگاشت $\langle .,. \rangle : X \times X \longrightarrow F$ یک نیم ضرب داخلی روی X نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $x, y, t \in X$ و $\alpha \in \mathbb{F}$، شرایط زیر برقرار باشد:

(۱) $\langle x, x \rangle \geq ۰$؛

(۲) $\langle x + \alpha y, t \rangle = \langle x, t \rangle + \alpha \langle y, t \rangle$؛

(۳) $\langle x, y + \alpha t \rangle = \langle x, y \rangle + \bar{\alpha} \langle x, t \rangle$؛

(۴) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

$\langle .,. \rangle$ یک ضرب داخلی نامیده می‌شود هرگاه $\langle x, x \rangle = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۰$ برقرار باشد. یک فضای نرمدار که نرم آن به صورت $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ باشد، یک فضای ضرب داخلی نامیده می‌شود. اگر $\langle .,. \rangle$ یک ضرب داخلی روی یک فضای برداری X باشد و نرم القایی توسط این ضرب داخلی X را به یک فضای باناخ تبدیل کند، در این صورت X یک فضای هیلبرت نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۲.۱ دنباله‌ی $\{f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ از اعضای فضای هیلبرت H دنباله‌ی بسل نامیده می‌شود، اگر ثابت $B > ۰$ موجود باشد به طوری که برای هر $f \in H$

$$\sum_{k=۱}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^۲ \leq B \|f\|^۲.$$

تعریف ۳.۲.۱ دنباله‌ی $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ از اعضای فضای هیلبرت H یک قاب برای H نامیده می‌شود، اگر ثابت های $A, B > 0$ موجود باشند به طوری که برای هر $f \in H$ داشته باشیم

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^2 \leq B\|f\|^2.$$

A و B را به ترتیب کران‌های پایینی و بالایی قاب می‌نامند که منحصربه‌فرد نیستند.

کران‌های قاب پایینی بهینه، سوپریمم همه‌ی کران‌های قاب پایینی است و کران‌های قاب بالایی بهینه، اینفیمم همه‌ی کران‌های قاب بالایی است.

$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب تنگ نامیده می‌شود هرگاه $A = B$ و $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب پارسوال نامیده می‌شود هرگاه $A = B = 1$.

تعریف ۴.۲.۱ دنباله‌ی $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ از بردارهای فضای هیلبرت H را در نظر می‌گیریم.

۱) دنباله‌ی $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه برای H نامیده می‌شود اگر برای هر $f \in H$ دنباله‌ی منحصربه فرد $\{c_k(f)\}_{k=1}^{\infty}$ از ضرایب اسکالر، موجود باشد به طوری که

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)e_k.$$

۲) پایه‌ی $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه‌ی متعامد یکه نامیده می‌شود هرگاه

$$\langle e_k, e_j\rangle = \delta_{k,j} = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k \neq j \ . \end{cases}$$

قضیه ۵.۲.۱ برای مجموعه‌ی متعامد یکه $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$، گزاره‌های زیر معادل هستند:

(۱) دنباله‌ی $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه‌ی متعامد یکه است؛

(۲) برای هر $f \in H$، $f = \sum_{k=1}^{\infty}\langle f, e_k\rangle e_k$؛

(۳) برای هر $f \in H$، $\langle f,g\rangle = \sum_{k=1}^{\infty}\langle f,e_k\rangle\langle e_k,g\rangle$؛

(۴) برای هر $f \in H$، $\sum_{k=1}^{\infty}|\langle f,e_k\rangle|^2 = \|f\|^2$؛

(۵) $\overline{span}\{e_k\}_{k=1}^{\infty} = H$؛

(٦) اگر به ازای هر $k \in \mathbb{N}$، داشته باشیم $\langle f,e_k\rangle = 0$، آن گاه $f = 0$.

برهان : [۵]، ۲.۲.۳. ■

مثال ٦.۲.۱ فرض کنیم $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه‌ی متعامد یکه برای فضای هیلبرت H باشد.

فرض کنید $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{e_1, e_1, e_2, e_2, ...\}$، در این صورت $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب تنگ با کران‌های قاب $A = B = 2$ است.

اگر فرض کنیم $\{g_k\}_{k=1}^{\infty} = \{e_1, e_1, e_2, e_3, ...\}$، در این صورت $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب با کران‌های $A = 1$ و $B = 2$ است.

یادآوری ۱ دنباله‌ی $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ را در H کامل می‌نامیم هرگاه $\overline{span}\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = H$ و $l^2(\mathbb{N})$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$l^2(\mathbb{N}) = \left\{\{c_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N} : \sum_{j=1}^{\infty}|c_j|^2 < \infty\right\}.$$

تعریف ۷.۲.۱ اگر $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب برای فضای هیلبرت H باشد، عملگر $T : H \longrightarrow l^2(\mathbb{N})$ با ضابطه‌ی $Tf = \{\langle f,f_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$، عملگر تجزیه نظیر قاب $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ نامیده می‌شود.

عملگر الحاقی $T^* : l^2(\mathbb{N}) \longrightarrow H$ عملگر ترکیب نامیده می‌شود و با ضابطه زیر بیان می گردد.

$$T^*\{c_k\}_{k=1}^{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k.$$

عملگر $S = T^*T : H \longrightarrow H$ عملگر قاب نامیده می‌شود. از ضابطه‌های T و T^* داریم

$$Sf = T^*Tf = \sum_{k=1}^{\infty}\langle f,f_k\rangle f_k.$$

لم ۸.۲.۱ فرض کنید $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در H باشد و فرض کنید $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ برای هر $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2(\mathbb{N})$ همگرا باشد. در این صورت $T^* : l^2(\mathbb{N}) \longrightarrow H$ با ضابطه‌ی

$$T^*\{c_k\}_{k=1}^{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k.$$

یک عملگر خطی کران‌دار است. عملگر الحاقی آن $T : H \longrightarrow l^2(\mathbb{N})$ با ضابطه‌ی

$$Tf = \{\langle f, f_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}.$$

تعریف می‌شود. بنابراین برای هر $f \in H$ داریم

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^2 \leq \|T^*\|^2 \|f\|^2.$$

برهان : [۵]، ۱.۱.۳ ■

قضیه ۹.۲.۱ فرض کنید $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک دنباله در فضای هیلبرت H باشد. در این صورت $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک دنباله ی بسل با کران بسل B است اگر و تنها اگر $T^*\{c_k\}_{k=1}^{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ عملگر کران دار خوش تعریفی از $l^2(\mathbb{N})$ به توی H باشد و $\|T^*\| \leq \sqrt{B}$.

برهان : درابتدا فرض می‌کنیم $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک دنباله‌ی بسل با کران B باشد و $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2(\mathbb{N})$. می‌خواهیم نشان دهیم $T^*\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ خوش تعریف است یعنی $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ همگراست. برای این منظور فرض می‌کنیم $n, m \in \mathbb{N}$ و $n > m$. در این صورت

$$\begin{aligned}\Big\| \sum_{k=1}^{n} c_k f_k - \sum_{k=1}^{m} c_k f_k \Big\| &= \Big\| \sum_{k=m+1}^{n} c_k f_k \Big\| \\ &= \sup_{\|g\|=1} \Big| \Big\langle \sum_{k=m+1}^{n} c_k f_k, g \Big\rangle \Big|\end{aligned}$$

حال با استفاده‌از نامساوی کوشی شوارتز[۱] داریم

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{k=1}^{n} c_k f_k - \sum_{k=1}^{m} c_k f_k\Big\| &\leq \sup_{\|g\|=1} \sum_{k=m+1}^{n} |c_k\langle f_k, g\rangle| \\ &\leq \Big(\sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2\Big)^{1/2} \sup_{\|g\|=1} \Big(\sum_{k=m+1}^{n} |\langle f_k, g\rangle|^2\Big)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{B}\Big(\sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

چون $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2(\mathbb{N})$، لذا $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ کوشی است و با توجه به نابرابری فوق، سری $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ کوشی است و در نتیجه همگراست. پس T^* خوش تعریف و خطی است. از طرفی چون

$$\begin{aligned}\|T^*\{c_k\}_{k=1}^{\infty}\| &= \Big\|\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k\Big\| = \sup_{\|g\|=1} \Big\|\Big\langle \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k, g\Big\rangle\Big\| \\ &\leq \sup_{\|g\|=1} \sum_{k=1}^{\infty} |c_k\langle f_k, g\rangle| \\ &\leq \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2\Big)^{1/2} \sup_{\|g\|=1} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f_k, g\rangle|^2\Big)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{B}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2\Big)^{1/2} < \infty.\end{aligned}$$

در نتیجه T^* کران‌دار است و $\|T^*\| \leq \sqrt{B}$.

حال فرض کنید T^* یک عملگر کران‌دار با خاصیت $\|T^*\| \leq \sqrt{B}$ باشد. در این صورت لم ۸.۲.۱ نشان می‌دهد که $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک دنباله‌ی بسل با کران B است. ■

تعریف ۱۰.۲.۱ عملگر $U : H \longrightarrow H$ را خود الحاق نامیم، هرگاه $U^* = U$ شود.

گوییم عملگر $U : H \longrightarrow H$ مثبت است، اگر برای هر $x \in H$، $\langle Ux, x\rangle \geq 0$.

حال اگر U_1 و U_2 عملگرهایی از H به H باشند، در این صورت منظور از $U_1 \leq U_2$ این است که $0 \leq U_2 - U_1$.

[۱] Cauchy-Schwarz

قضیه ۱۱.۲.۱ اگر $U : X \longrightarrow X$ کران دار باشد و $\|I-U\| < ۱$، در این صورت U معکوس پذیراست و

$$U^{-۱} = \sum_{k=۰}^{\infty}(I-U)^k \quad , \quad \|U^{-۱}\| \leq \frac{۱}{۱-\|I-U\|}.$$

برهان : [۵]، ۳.۲.۲ ■

گزاره ۱۲.۲.۱ فرض کنید $\{f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ یک قاب با عملگر قاب S و کران‌های قاب A, B باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

(۱) S کران دار، معکوس پذیر، خود الحاق و مثبت است.

(۲) $\{S^{-۱}f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ یک قاب با کران‌های $B^{-۱}, A^{-۱}$ است و عملگر قاب آن، $S^{-۱}$ است.

(۳) اگر A, B کران‌های بهینه برای قاب $\{f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ باشند در این صورت $B^{-۱}, A^{-۱}$ کران‌های بهینه برای قاب $\{S^{-۱}f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ هستند.

برهان : (۱): فرض کنید T عملگر تجزیه‌ی متناظر با قاب $\{f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ باشد. با توجه به کران‌داری عملگرهای T و T^*، عملگر $S = T^*T$ نیز کران‌دار است و با استفاده از قضیه‌ی ۹.۲.۱ داریم

$$\|S\| = \|T^*T\| = \|T\|^۲ \leq B.$$

همچنین $S^* = (T^*T)^* = T^*T = S$. بنابراین عملگر S خودالحاق است. از طرفی از قاب بودن $\{f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ و ضابطه‌ی S برای هر $f \in H$، چون

$$\langle Sf, f\rangle = \Big\langle \sum_{k=۱}^{\infty}\langle f, f_k\rangle f_k, f\Big\rangle = \sum_{k=۱}^{\infty}\langle f, f_k\rangle\langle f_k, f\rangle \quad = \quad \Big|\sum_{k=۱}^{\infty}\langle f, f_k\rangle\Big|^۲.$$

بنابراین

$$A\|f\|^۲ \leq \langle Sf, f\rangle \leq B\|f\|^۲.$$

یا به عبارتی

$$AI_H \leq S \leq BI_H.$$

پس S یک عملگر مثبت است و

$$0 \leq I_H - B^{-1}S \leq \frac{B-A}{B}I_H,$$

در نتیجه

$$\left\|I_H - B^{-1}S\right\| = \sup_{\|f\|=1}\left|\left\langle (I_H - B^{-1}S)f, f\right\rangle\right| \leq \frac{B-A}{B} < 1.$$

حال از قضیه‌ی ۱۱.۲.۱ نتیجه می‌شود که S وارون‌پذیر است و $B^{-1}I_H \leq S^{-1} \leq A^{-1}I_H$.

(۲): چون عملگر S خودالحاق است، عملگر S^{-1} نیزخود الحاق است. برای هر $f \in H$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\langle f, S^{-1}f_k\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|\langle S^{-1}f, f_k\rangle|^2 \leq B\|S^{-1}f\|^2 \leq B\|S^{-1}\|^2\|f\|^2.$$

در نتیجه $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک دنباله‌ی بسل است. لذا عملگر قاب برای $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ خوش تعریف است. اگر S° عملگر قاب نظیر $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ باشد. برای هر $f \in H$

$$\begin{aligned} S^\circ f = \sum_{k=1}^{\infty}\langle f, S^{-1}f_k\rangle S^{-1}f_k &= \sum_{k=1}^{\infty}\langle S^{-1}f, f_k\rangle S^{-1}f_k \\ &= S^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\langle S^{-1}f, f_k\rangle f_k = S^{-1}SS^{-1}f = S^{-1}f. \end{aligned}$$

پس $S^{-1} = S^\circ$.

(۳): اگر A و B کران‌های بهینه‌ی قاب $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ باشند در آن صورت $AI_H \leq S \leq BI_H$. حال با توجه به وارون‌پذیری S داریم $B^{-1}I_H \leq S^{-1} \leq A^{-1}I_H$ و این نشان می‌دهد که A^{-1} و B^{-1} کران‌های بهینه‌ی $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ هستند. ■

تعریف ۱۳.۲.۱ اگر S یک عملگر باشد و $r \in Q$ مفهوم S^r را به این صورت بیان می‌کنیم؛

اگر $r = n \in \mathbb{N}$، در این صورت $S^n = S \cdot \ldots \cdot S$؛

اگر $n \leq 0$، در این صورت $S^n = (S^{-1})^{-n} = S^{-1} \cdot \ldots \cdot S^{-1}$؛

حال اگر $r \in Q$، برای $n \in \mathbb{N}$ قرار می‌دهیم، $S^{1/n} = T$ که در آن T یک عملگر ست، در این صورت $S = T^n$. با این تعریف ریشه دوم عملگر قاب S^{-1} معنا پیدا می‌کند.

قضیه ۱۴.۲.۱ فرض کنید $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب برای فضای هیلبرت H با عملگر قاب S باشد. در این صورت برای هر $f \in H$،

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1} f_k \rangle f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle S^{-1} f_k.$$

برهان : برای هر $f \in H$،

$$f = SS^{-1} f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle S^{-1} f, f_k \rangle f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1} f_k \rangle f_k,$$

و همین طور

$$f = S^{-1} S f = S^{-1} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle f_k \Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big\langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle f_k, S^{-1} f_k \Big\rangle S^{-1} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle S^{-1} f_k.$$

■

گزاره ۱۵.۲.۱ فرض کنید $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب برای فضای هیلبرت H با عملگر قاب S باشد. در این صورت $\{S^{-1/2} f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب پارسوال برای H است و برای هر $f \in H$،

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1/2} f_k \rangle S^{-1/2} f_k.$$

برهان : [۵]، ۴.۳.۵. ■

تعریف ۱۶.۲.۱ فرض کنید $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب برای فضای هیلبرت H باشد. دنباله‌ی $H \supseteq \{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ قاب دوگان $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ نامیده می‌شود، اگر برای هر $f \in H$ داشته باشیم

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle f_k.$$

با توجه به قضیه‌ی ۱۴.۲.۱، $\{S^{-1} f_k\}_{k=1}^{\infty}$ دوگان $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ است که آن را دوگان استاندارد $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ می‌نامند.

قضیه ۱۷.۲.۱ فرض کنید $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب برای H باشد. قاب‌های دوگان $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ ساختاری به شکل زیر دارند

$$\{g_k\}_{k=1}^{\infty} = \left\{S^{-1} f_k + h_k - \sum_{j=1}^{\infty} \langle S^{-1} f_k, f_j \rangle h_j \right\}_{k=1}^{\infty}.$$

که در آن $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک دنباله‌ی بسل در H است.

برهان : [۵]، ۴.۷.۵. ■

گزاره ۱۸.۲.۱ فرض کنید $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ و $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ دنباله‌های بسل در فضای هیلبرت H باشند. در این صورت گزاره‌های زیر معادل هستند:

(۱) $f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle f_k$ برای هر $f \in H$؛

(۲) $f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle g_k$ برای هر $f \in H$؛

(۳) $\langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle \langle g_k, g \rangle$ برای هر $f, g \in H$؛

بنابراین اگر $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ قاب دوگان $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ باشد، آن‌گاه $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ نیز قاب دوگان $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ است.

برهان : [۵]، ۱.۷.۵. ■

اگر $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب برای H و $H \supseteq \{g_k\}_{k=1}^{\infty}$، در آن صورت برای هر $f \in H$، با توجه به قضیه‌ی ۹.۲.۱، $\sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle g_k$ وقتی همگراست که $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ دنباله‌ی بسل باشد حال اگر $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ قاب دوگان $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ باشد، در نتیجه با توجه به گزاره بالا $\sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle f_k$ همگرا خواهد بود.

تعریف ۱۹.۲.۱ اگر H یک فضای هیلبرت باشد، عملگر $P : H \longrightarrow H$ را یک تصویر نامیم هرگاه $P = P^{۲} = P^*$.

P را یک تصویر متعامد نامیم هرگاه $Ran(P) \perp Ker(P)$. در این صورت برای هر $x, y \in H$، $\langle Px, y\rangle = \langle x.Py\rangle$. تصویر P دارای خواص زیر است:

(۱) برای هر $x \in Ran(P)$، $P(x) = x$.

(۲) عملگر $I - P$ یک تصویر است و $Ker(P) = Ran(I - P)$ و $Ker(I - P) = Ran(P)$.

(۳) $Ker(P) \oplus Ran(P) = H$.

۳.۱ پایه‌های ریس در فضای هیلبرت

تعریف ۱.۳.۱ پایه‌ی ریس برای یک فضای هیلبرت H خانواده‌ای به شکل $\{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$ است، که در آن $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه‌ی متعامد یکه برای H است و $U : H \longrightarrow H$ یک عملگر کران‌دار و دوسویی است.

قضیه ۲.۳.۱ برای یک دنباله‌ی $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ در H شرایط زیر معادل هستند:

(۱) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه‌ی ریس برای H است؛

(۲) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ در H کامل است و ثابت‌های $A, B > 0$ موجودند به طوری که برای هر دنباله‌ی متناهی از اسکالرهای $\{c_k\}_{k=1}^{n}$ داریم

$$A \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \leq \Big\| \sum_{k=1}^{n} c_k f_k \Big\|^2 \leq B \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2.$$

برهان : [۵]، ۷.۳.۳. ■

از این قضیه نتیجه می شود که اگر $\{x_j\}$ یک پایه ریس برای H باشد و به ازای $\{c_j\} \subseteq \mathbb{C}$، $\sum c_j x_j$ همگرا باشد، آن گاه $\{c_j\} \subseteq l^2(\mathbb{N})$ خواهد بود.

تعریف ۳.۳.۱ دنباله‌ی $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ و $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ در یک فضای هیلبرت دوبه‌دو متعامد نامیده می‌شوند، اگر به ازای هر $j, k \in \mathbb{N}$، $\langle f_k, g_j \rangle = \delta_{k,j}$.

گزاره ۴.۳.۱ اگر $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه‌ی ریس برای فضای هیلبرت H باشد، در این صورت ثابت‌های $0 \leq A \leq B < \infty$ وجود دارند به طوری که برای هر $f \in H$،

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B\|f\|^2.$$

برهان : [۵]، ۵.۳.۳. ■

گزاره ۵.۳.۱ اگر دنباله‌ی $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه‌ی ریس برای فضای هیلبرت H باشد، در این صورت پایه‌ی ریس یکتای $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ در H وجود دارد به طوری که به ازای هر $f \in H$،

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle f_k.$$

برهان : طبق تعریف داریم: $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$، که در آن U عملگر دوسویی و کران‌دار و $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه‌ی متعامد یکه برای H است. فرض کنید $f \in H$. با استفاده از بسط $U^{-1}f$ در پایه‌ی متعامد یکه $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ داریم

$$U^{-1}f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle U^{-1}f, e_k \rangle e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, (U^{-1})^* e_k \rangle e_k.$$

بنابراین، با قرار دادن $g_k = (U^{-1})^* e_k$،

$$f = UU^{-1}f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, (U^{-1})^* e_k \rangle U e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle f_k.$$

چون عملگر $(U^{-1})^*$ کران‌دار و دوسویی است، با توجه به تعریف، $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه‌ی ریس خواهد بود. حال برای کامل کردن اثبات، ثابت می کنیم که $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ یکتاست. برای این منظور اگر به‌ازای ضرایب اسکالر $c_k(f)$ و $d_k(f)$ رابطه‌ی $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) f_k = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(f) f_k$ برقرار باشد، چون $f_k = Ue_k$، با توجه به پایه بودن $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$، تساوی $c_k(f) = d_k(f)$ برقرار خواهد بود و این نشان می‌دهد که هر پایه‌ی ریسی یک پایه است. حال نشان می‌دهیم که اگر $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ و $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ دنباله‌هایی در H باشند به طوری که برای هر $f \in H$، رابطه‌ی $f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k \rangle f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, h_k \rangle f_k$ برقرار باشد، در این صورت برای هر $k \in \mathbb{N}$ و $f \in H$،

$$\langle f, g_k \rangle = \langle f, h_k \rangle$$

در نتیجه $g_k = h_k$. [۵]؛ ۲.۳.۳. ■

با توجه به گزاره‌ی ۱۸.۲.۱، اگر $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ دوگان $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ باشد آن گاه $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ دوگان $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ خواهد بود.

نتیجه ۶.۳.۱ فرض کنید پایه‌های ریس $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ و $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ دوگان یکدیگر باشند. در این صورت گزاره‌های زیر را داریم:

(۱) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ و $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ دوبه‌دو متعامد هستند؛

(۲) برای هر $f \in H$،

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k\rangle f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k\rangle g_k.$$

برهان : (۱): چون $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ و $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ پایه‌ی ریس هستند پس اگر $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه‌ی متعامد یکه و U عملگر دوسویی و کران‌دار باشد، در این صورت

$$\langle f_k, g_j\rangle = \langle Ue_k, (U^{-1})^* e_j\rangle = \langle UU^{-1} e_k, e_j\rangle = \delta_{kj}.$$

در نتیجه $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ و $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ دوبه‌دو متعامد هستند.

قسمت دوم از گزاره‌ی ۱۸.۲.۱ نتیجه می‌شود. ■

قضیه ۷.۳.۱ اگر $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در H باشد، آن‌گاه گزاره‌های زیر معادل هستند:

(۱) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه‌ی ریس برای H است؛

(۲) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک دنباله‌ی بسل کامل است که یک دنباله‌ی دوبه‌دو متعامد کامل مانند $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ دارد که دنباله‌ی بسل است.

برهان : [۵]، ۴.۴.۳. ■

قضیه ۸.۳.۱ فرض کنید $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب برای فضای هیلبرت H باشد در این صورت گزاره‌های زیر معادل هستند: