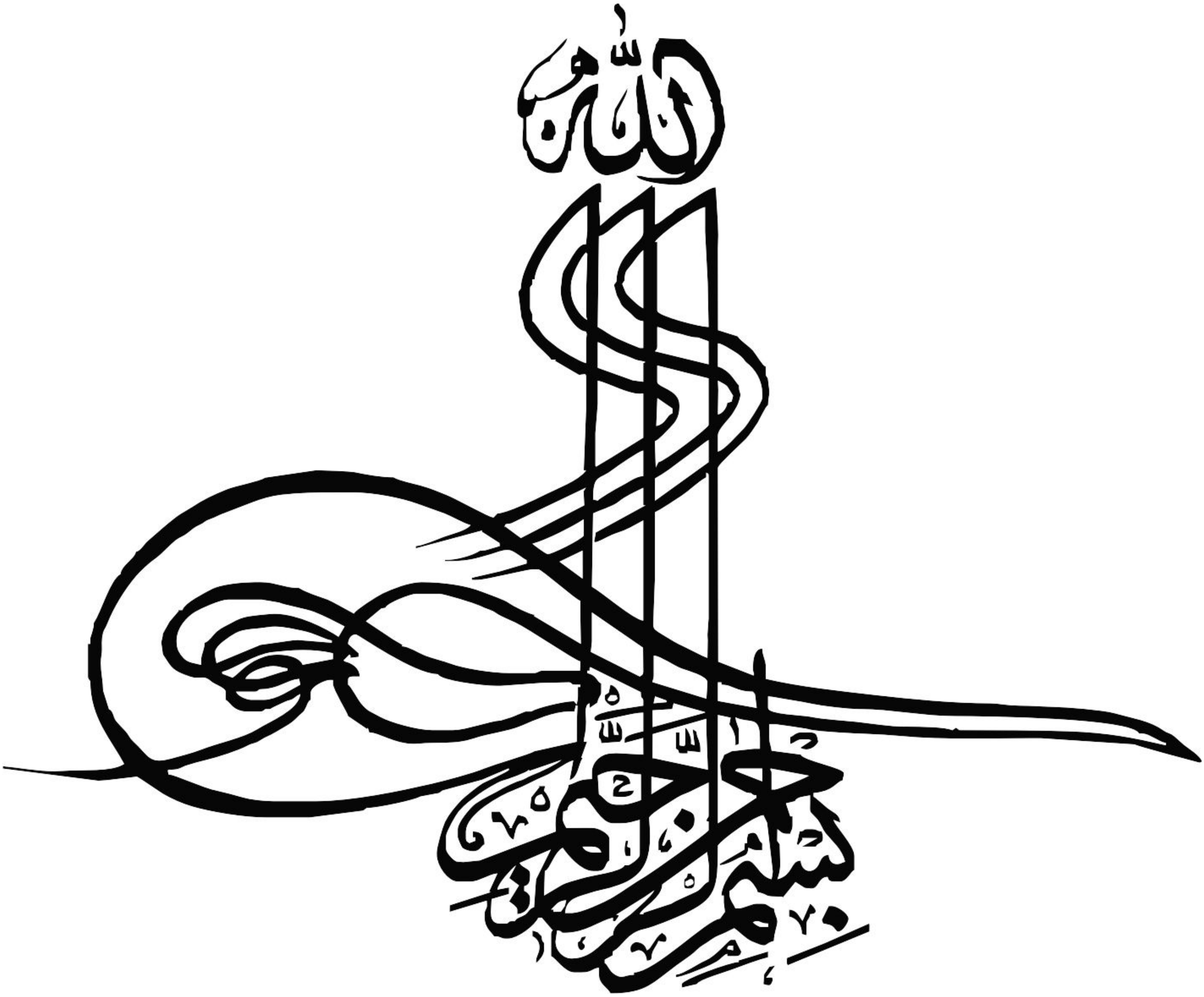
بسم الله الرحمن الرحيم

بسمه تعالی

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه **آقای محمد اقبالی** رشته **ریاضی‌محض** به شماره دانشجویی ۸۹۵۲۰۵۱۰۰۲ تحت عنوان: «**درباره مدول‌های بئر**» را در تاریخ ۱۳۹۱/۸/۹ از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیداحمد موسوی	دانشیار	
۲- استاد ناظر داخلی	دکتر سیدمحمد باقری	دانشیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر عباس حیدری	استادیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر حسین ذاکری	استاد	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر عباس حیدری	استادیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد/ ~~رساله دکتری~~ نگارنده در رشته ریاضی محض است که در سال ۱۳۹۱ در دانشکده علوم ریاضی دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار ~~خانم~~/جناب آقای دکتر سیداحمد موسوی ، مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر ــــ و مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر ــــ از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب محمد اقبالی دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: محمد اقبالی

تاریخ و امضا: ۹۱/۸/۲۲

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ٤- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ٥- این آیین‌نامه در ٥ ماده و یک تبصره در تاریخ ۸۷/٤/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/٤/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱٥ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب......محمد اقبالی......دانشجوی رشته......ریاضی محض...... ورودی سال تحصیلی......۸۹-۹۰......
مقطع ......کارشناسی ارشد...... دانشکده ......علوم ریاضی...... متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا:...............

تاریخ: ۹۱/۸/۲۲

دانشگاه تربیت مدرس
دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد گروه ریاضی محض

درباره مدول‌های بئر

نگارنده
محمد اقبالی

استاد راهنما
دکتر سیداحمد موسوی

مهر ماه ۱۳۹۱

تقدیم به پدر و مادرم

و روح پاک دایی عزیزم

سپاس گزاری...

پس از سپاس به درگاه خداوند حکیم که با لطف بی کران خود، آدمی را به زیور دانش آراست و مرا از عنایتش بهره مند ساخت، وظیفه خود می دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای بزرگوارم، جناب آقای دکتر سید احمد موسوی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده ایشان، این پژوهش به انجام نمی رسید. همچنین از آقایان دکتر حسین ذاکری، دکتر سید محمد باقری و دکتر عباس حیدری که زحمت ارزیابی و داوری این پایان نامه را پذیرفتند سپاسگزارم.

در پایان، بوسه می زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می کنم وجود مقدس شان را که در طول دوران تحصیل با صبر و عطوفت، یاورم بوده و همواره مرا در کسب علم تشویق کرده اند.

محمد اقبالی
۱۳۹۱

چکیده

دراین پایان‌نامه مدول‌های بئر و ارتباط آن‌ها با مدول‌های گسترشی را مورد مطالعه قرار داده، به بررسی حلقه‌ی درون‌ریختی آن می‌پردازیم. همچنین حلقه‌هایی را مطالعه می‌کنیم که برای آن‌ها هر مدول آزاد بئر باشد. شرایط لازم و کافی برای آنکه جمع مستقیم نسخه هایی از مدول بئر، بئر باشد نیز معرفی می‌گردد.

کلمات کلیدی: حلقه بئر، مدول بئر، مدول آزاد، حلقه (نیمه)موروثی، مدول گسترشی، حلقه $\pi-$منسجم ، مدول درونبر.

فهرست مطالب

مقدمه

کاپلانسکی[۱] در سال ۱۹۵۵، مفهوم حلقه بئر را که ریشه در آنالیز تابعی داشت، معرفی کرد [۲۱]. نام بئر به افتخار رینهولد بئر[۲] می‌باشد که درکتابش "جبر خطی و هندسه تصویری" آن را معرفی کرده است. حلقه R را بئرگوییم هرگاه پوچساز چپ هر ایده‌آل راست یا زیرمجموعه از R توسط خودتوانی در R تولید شود. به طورمعادل پوچساز راست هرایده‌آل چپ یا زیرمجموعه از R توسط خودتوانی در R تولید شود. با جایگزینی "ایده‌آل چپ" با "ایده‌آل دوطرفه" درتعریف فوق مفهوم حلقه بئر توسط کلارک[۳] [۱۲] در سال ۱۹۶۷ به حلقه شبه بئر توسیع داده شد. مدول M را گسترشی(یا CS) گوییم هرگاه هر زیرمدول آن در یک جمعوند مستقیم اساسی باشد و حلقه R گسترشی راست است هرگاه به عنوان $R-$مدول راست گسترشی باشد. در سال ۱۹۸۰ چترز[۴] وخوری[۵] [۱۰] نشان دادند که رابطه‌ای نزدیک بین حلقه‌های بئر و حلقه‌های گسترشی راست وجود دارد. سوالی که پرسیده می‌شود این است که آیا می‌توان توصیفی مشابه برای مدول‌های

[۱] Kaplansky

[۲] Reinhold Baer

[۳] Clarck

[۴] Chatters

[۵] Khuri

گسترشی نامنفرد به جای حلقه‌ها پیدا کرد؟ در سال ۲۰۰۴ رزوی[۶] و رومن[۷] [۳۲] با معرفی مدول‌های بئر و شبه بئر به این سوال پاسخ دادند. هدف اصلی این پایان نامه مطالعه مدول‌های بئر است.

فصل اول شامل تعاریف و قضایای مقدماتی است.

درفصل‌دوم ضمن معرفی مدول بئر و ارائه مثال‌هایی برای آن، رابطه آن با مدول‌های گسترشی را شرح می‌دهیم.

درفصل سوم مدول‌های درونبر را معرفی کرده و ضمن ارائه مثال‌هایی برای آن، رابطه‌اش با حلقه درونریختی مدول بئر را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

درفصل چهارم تمرکز خود را روی جمع مستقیم مدول‌های بئر می گذاریم و شرط لازم و کافی برای آنکه جمع مستقیم مدول‌های بئر، بئر باشد معرفی می‌کنیم.

[۶] Rizvi

[۷] Roman

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

درفصل نخست به ذکر تعاریف، لم‌ها و قضایای مورد نیاز در این پایان‌نامه می‌پردازیم. در سراسر این پایان‌نامه منظور از R، حلقه‌ای شرکت‌پذیر یکدار است که لزوماً جابجایی نمی‌باشد. مدول‌ها $R-$مدول‌های راست فرض می‌شوند، مگر آنکه خلاف آن تصریح شود. M، $R-$مدول راست در نظر گرفته شده است، حلقه تمام $R-$درونریختی‌های M را با S نشان داده از نماد $S = End_R(M)$ استفاده می‌کنیم، با این نماد می‌توان M را به عنوان $S-$مدول چپ درنظر گرفت. برای این که بگوییم N زیرمدولی از M است، از نماد $N \leq M$ استفاده می‌کنیم و نماد $N \leq^{\oplus} M$ نشان دهنده آن است که N جمعوند مستقیمی در M می‌باشد. $N \leq^{e} M$ به این معناست که N در M اساسی است(یعنی برای هر $0 \neq L \leq M$ ، $N \bigcap L \neq 0$). $E(M)$ نشان دهنده پوشش انژکتیو M و M^n به معنای جمع مستقیم n نسخه از M است. $\mathbb{C}$، $\mathbb{R}$، $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Z}$ به ترتیب نشان دهنده حلقه اعداد مختلط، حقیقی، گویا و صحیح هستند و $\mathbb{Z}_n$ نشان دهنده $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ می‌باشد.

قضیه ۱.۱. M توسیع اساسی N است اگر و تنها اگر برای هر $m \in M$ناصفر، $r \in R$ناصفری وجود داشته باشد به طوریکه $0 \neq mr \in N$

اثبات. فرض کنید M توسع اساسی N باشد و $0 \neq m \in M$. mR زیرمدول ناصفری از M است

پس $mR \cap N \neq ۰$ و این یعنی $r \in R$ ناصفری وجود دارد به طوریکه $۰ \neq mr \in N$.

برعکس، فرض کنید K زیرمدول ناصفر دلخواهی از M باشد، پس $k \in K$ ناصفری وجود خواهد داشت، در نتیجه بنابر فرض $r \in R$ ناصفری وجود دارد به طوریکه $۰ \neq kr \in N$. اما بنابر خاصیت مدول بودن K، $kr \in K$ پس $kr \in K \cap N$ در نتیجه $K \cap N \neq ۰$ و این یعنی M توسیع اساسی N است. $\square$

قضیه فوق محک مناسبی برای توسیع اساسی بودن یک مدول می‌باشد.

تعریف ۲.۱. برای $I \subseteq S$ ، پوچساز راست I در M را با $r_M(I)$ نشان داده به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r_M(I) = \{m \in M | Im = ۰\}$$

برای $N \subseteq M$ ، پوچساز راست N در R را با $r_R(N)$ نشان داده به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r_R(N) = \{r \in R | Nr = ۰\}$$

همین طور پوچساز چپ N در S را با $l_S(N)$ نشان داده به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$l_S(N) = \{\varphi \in S | \varphi N = ۰\}$$

تذکر ۳.۱. براحتی می‌توان نشان داد که $r_M(I)$ زیرمدولی از M است. همچنین $r_R(N)$ ایده‌آل راستی از R و $l_S(N)$ ایده‌آل چپی از S است.

قضیه ۴.۱. فرض کنید $X, Y \subseteq M$، به طوریکه $X \subseteq Y$ در این صورت $l_S(Y) \subseteq l_S(X)$

اثبات. براحتی و با عضوگیری ثابت می‌شود. $\square$

تعریف ۵.۱. فرض کنید $\{M_i\}_{i\in\tau}$ خانواده‌ای از زیرمدول‌های M باشد. اگر τ ناتهی باشد، مجموعه $\sum_{i\in\tau} M_i$ را به صورت

$$\sum_{i\in\tau} M_i = \left\{ \sum_{k=۱}^{n} x_{i_k} | n \geq ۱, i_k \in \tau, x_{i_k} \in M_{i_k} \right\}$$

تعریف می‌کنیم و اگر I تهی باشد، قرار می‌دهیم $\sum_{i\in I} M_i = 0$.

براحتی می‌توان نشان داد $\sum_{i\in I} M_i$ زیر مدولی از M است.

قضیه ۶.۱. فرض کنید $\{M_i\}_{i\in\tau}$ خانواده‌ای ناتهی از زیرمدول‌های M باشد. در اینصورت شرایط زیر معادلند:

۱. $\{M_i\}_{i\in\tau}$ خانواده‌ای مستقل است؛ یعنی به ازای هر $n \geq 1$، هر عضو از τ مثل i_k و هر عضو از M_{i_k} مثل x_{i_k}، از $\sum_{i=1}^{n} x_{i_k} = 0$ نتیجه می‌شود که به ازای هر k، $1 \leq k \leq n$، $x_{i_k} = 0$؛

۲. به ازای هر عضو از τ مثل j، $M_j \cap (\sum_{i\in\tau-\{j\}} M_i) = 0$؛

۳. هر عضو از $\sum_{i\in\tau} M_i$ نمایشی منحصر به فرد بر حسب مجموعی متناهی از اعضای M_i ها دارد.

اثبات. به مرجع [۱] مراجعه شود. $\square$

تعریف ۷.۱. فرض کنید $\{M_i\}_{i\in\tau}$ خانواده‌ای ناتهی از زیرمدول‌های M باشد. اگریکی ازشرایط معادل در قضیه قبل برای این خانواده برقرار باشد، آنگاه جمع $\sum_{i\in\tau} M_i$ را جمع مستقیم می‌گوییم و آن را با $\bigoplus_{i\in\tau} M_i$ نمایش می‌دهیم.در حالتی که $\tau = \{1, ..., n\}$ به جای $\bigoplus_{i\in\tau} M_i$ می‌نویسیم $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ یا $M_1 \oplus ... \oplus M_n$.

$M^{(\tau)}$ به معنای جمع مستقیم τ نسخه از M است.

قضیه ۸.۱. فرض کنید R و S حلقه‌هایی دلخواه و M، $(R,S)-$دومدول باشد. در اینصورت ایده‌آل‌های راست حلقه $A = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$، به شکل $J_1 \oplus J_2$ هستند که در آن J_1 ایده‌آل راستی از R و J_2، $S-$زیرمدول راستی از $M \oplus S$ شامل J_1M است.

اثبات. به قضیه ۱.۱۷ در مرجع [۲۶] مراجعه شود. $\square$

تعریف ۹.۱. $R-$مدول M را نیمساده یا به‌طورکامل تحویل‌پذیر گویند هرگاه هر زیرمدول از M جمعوند مستقیمی از M باشد، یعنی به ازای هر زیر مدول از M مثل K، زیرمدولی از M مثل P موجود باشد که $M = K \oplus P$.

تعریف ۱.۱۰. فرض کنید $N \leq M$، زیرمدول $C \subseteq M$ را مکمل N (در M)گوییم هرگاه C نسبت به این خاصیت که $C \cap N = 0$ در ماکسیمال باشد.

تعریف ۱.۱۱. زیرمدول $C \subseteq M$ را مکمل در M گوییم(با نماد $C \subseteq_c M$) هرگاه زیرمدولی چون $N \subseteq M$ وجود داشته باشد که C مکمل N در M باشد.

تذکر ۱.۱۲. با در نظر گرفتن خانواده $\Gamma = \{L \leq M | L \cap N = 0\}$ و استفاده از لم زرن براحتی می‌توان نشان داد که هر زیرمدول مثل N دارای یک مکمل است.

مثال ۱.۱۳. اگر $M = C \oplus N$ آنگاه C مکمل N خواهد بود. زیرا فرض‌کنید چنین نباشد، پس $Q \leq M$ وجود دارد بطوریکه $Q \cap N = 0$ و $C \subsetneqq Q$ ، در اینصورت $q \in Q$ ناصفر وجود دارد که $q \notin C$. می‌نویسیم $q = c + n$ که در آن $c \in C$ و $n \in N$ ناصفر است، زیرا در غیر اینصورت $q \in C$ که تناقض است. داریم $q - n \in C$ در نتیجه $q - n \in Q$ پس $n \in Q$ و لذا $n \in Q \cap N = 0$ پس $n = 0$ که تناقض است.

تذکر ۱.۱۴. اگر C مکمل N باشد، داریم: $C \oplus N \leq^e M$، زیرا درغیراینصورت $L \leq M$ ناصفری وجود خواهد داشت که $L \cap (C \oplus N) = 0$ یعنی مجموع مستقیم $L \oplus C \oplus N$ معنی پیدا می‌کند، پس $(L \oplus C) \cap N = 0$ و $C \subsetneqq L \oplus C$ که این در تناقض با مکمل بودن C است.

قضیه ۱.۱۵. فرض کنید $C \subseteq N \subseteq M$. در اینصورت اگر $C \subseteq_c N$ و $N \subseteq_c M$ آنگاه $C \subseteq_c M$.

اثبات. فرض کنید C مکمل U در N و N مکمل T در M باشد، ادعا می‌کنیم C مکمل $U \oplus T$ در M است.ابتدا می‌بینیم که چون $U \subseteq N$، $U \cap T \subseteq N \cap T$ اما $N \cap T = 0$ پس $U \cap T = 0$ ولذا جمع مستقیم $U \oplus T$ بامعنی است. ازطرفی $C \cap (U \oplus T) = 0$ زیرا اگر $c \in C$ و $c \in U + T$، پس $c = u + t$. از آنجا که $U \subseteq N$ پس $c \in N + T$ یعنی $c = n + t'$ پس $t' = c - n$، از $C \subseteq N$ نتیجه می‌گیریم $t' \in N$ چون $N \cap T = o$ پس $t' = 0$ لذا $c = n$ پس $n = u + t$ یا $t = n - u$ اما $U \subseteq N$ پس $t \in N$ پس $t = 0$ در نتیجه $c = u$ پس $c \in U$ ولذا $c = 0$.

حال زیرمدول دلخواه $C \subsetneq D$ را در نظر بگیرید، کافی است نشان دهیم $D \cap (U \oplus T) \neq 0$ زیرا در آن صورت C نسبت به خاصیت $C \cap (U \oplus T) = 0$ در ماکسیمال بوده،یعنی $C \subseteq_c M$.
بدون از دست دادن کلیت می‌توان فرض کرد $D \cap N = C$ (زیرا از آنجا که $C \subsetneq D$ و $C \subseteq N$، داریم $C = C \cap N \subseteq D \cap N$. حال اگر $C \subsetneq D \cap N$ از آنجاکه C مکمل U در N است $(D \cap N) \cap U \neq 0$، اما $D \cap N \cap U \subseteq D \cap U \subseteq D \cap (U \oplus T)$ پس $D \cap (U \oplus T) \neq 0$). از اینکه $C \subsetneq D$، $d \in D$ وجود دارد به طوریکه $d \notin C$ پس $d \notin D \cap N$ پس $d \notin N$ لذا $N \subsetneq N + dR$ پس $(N + dR) \cap T \neq 0$، در نتیجه داریم:

$$n + dr = t \neq 0 \tag{۱.۱}$$

که در آن $n \in N, r \in R, t \in T$.

اگر $n \in C$ آنگاه $n + dr \in D$ لذا $t \in D$ پس $D \cap T \neq 0$ در نتیجه $D \cap (U \oplus T) \neq 0$. اما اگر $n \notin C$ آنگاه $C \subsetneq C + nR$ ولذا $(C + nR) \cap S \neq 0$ پس داریم: $c + nr' = s \neq 0$ که در آن $c \in C, r' \in R, s \in S$. حال از معادله (۱.۱) خواهیم داشت:

$$s - tr' = c + nr' - tr' = c + (n - t)r' = c - drr' \in D \cap (S \oplus T)$$

از طرفی $s - tr' \neq 0$ زیرا درغیراینصورت $s = tr'$ و لذا $s \in T$ اما $S \cap T = 0$ پس $s = 0$ که تناقض است.پس $s - tr' \neq 0$ و در نتیجه $D \cap (S \oplus T) \neq 0$ $\square$

تعریف ۱.۱۶. زیرمدول C از M را بسته اساسی (یا به طورخلاصه بسته) در M گوییم هرگاه C توسیع اساسی سره نداشته باشد.

قضیه ۱.۱۷. برای $C \leq M$ موارد زیر معادلند:

۱. $C \subseteq_c M$.

۲. C در M بسته(اساسی)است.

۳. $C = X \cap M$ برای جمعوند مستقیمی چون X از $E(M)$.

اثبات. به قضیه ۶.۳۲ در مرجع [۲۷] مراجعه شود. $\square$

نتیجه ۱۸.۱. اگر C در N بسته، و N در M بسته باشد، آنگاه C در M بسته خواهد بود.

اثبات. ازقضیه قبل داریم $C \subseteq_c N$ و $N \subseteq_c M$، حال بنابرقضیه ۱۵.۱، $C \subseteq_c M$ پس بنابر قضیه قبل C در M بسته خواهد بود. $\square$

تعریف ۱۹.۱. $m \in M$ را عنصر منفرد M گوییم هرگاه $ann_r(m) \leq^e R_R$ که در آن $ann_r(m) = \{r \in R | mr = 0\}$ و یا به طور معادل برای $I \leq^e R_R$ ای داشته باشیم: $mI = 0$.

مجموعه تمام عناصرمنفرد M رابا $Z(M)$ نمایش داده، M_R را منفرد گوییم هرگاه $Z(M) = M$ و M_R را نامنفرد گوییم هرگاه $Z(M) = 0$. به خصوص می‌گوییم R نامنفرد راست است هرگاه $Z(R_R) = 0$.

تذکر ۲۰.۱. می‌توان نشان داد که $Z(M)$ زیرمدولی از M است.

قضیه ۲۱.۱. برای $N \leq M$ داریم: $Z(N) = N \cap Z(M)$

اثبات. براحتی و با عضوگیری ثابت می‌شود. $\square$

نتیجه ۲۲.۱. هر زیرمدول از یک مدول نامنفرد، نامنفرد است.

اثبات. فرض کنیم M نامنفرد باشد و $N \leq M$. بنابر قضیه فوق داریم:

$Z(N) = N \cap Z(M) = N \cap 0 = 0$

پس N نامنفرد است. $\square$

قضیه ۲۳.۱. R_R نامنفرد است اگر و تنها اگر برای هر $A \leq^e R_R$ داشته باشیم: $ann_l(A) = 0$ که در آن $ann_l(A) = \{r \in R | rA = 0\}$

اثبات. فرض کنید R_R نامنفرد باشد و $A \leq^e R_R$ دلخواه باشد. $r \in ann_l(A)$ در نظر بگیرید پس داریم: $rA = 0$ برای $A \leq^e R_R$. در نتیجه $r \in Z(R_R)$، اما $Z(R_R) = 0$ پس $r = 0$ یعنی $ann_l(A) = 0$.

برعکس، فرض کنیم به ازای هر $A \leq^e R_R$ داشته باشیم: $ann_l(A) = 0$. $r \in Z(R_R)$ در نظر بگیرید، پس $rA = 0$ برای $A \leq^e R_R$ ای. پس $r \in ann_l(A)$ و در نتیجه بنابر فرض $r = 0$. $r \in Z(R_R)$ دلخواه بود پس $Z(R_R) = 0$ یعنی R_R نامنفرداست. □

تعریف ۲۴.۱. دومین زیرمدول منفرد M را که با $Z_2(M)$ نشان می‌دهیم، زیرمدولی از M شامل $Z(M)$ است بطوریکه:

$$\frac{Z_2(M)}{Z(M)} = Z(\frac{M}{Z(M)})$$

.

به راحتی و با استفاده از تعریف می‌توان نشان داد:

$m \in Z_2(M)$ اگر و تنها اگر $ann_r(m + Z(M)) \leq^e R_R$.

قضیه ۲۵.۱. همواره $\frac{M}{Z_2(M)}$ نامنفرد است.

اثبات. به مرجع [۳۳] مراجعه شود. □

تعریف ۲۶.۱. M را چندشکل گوییم هرگاه برای هر $K \leq M$ و هر R−همریختی مثل $f : K \to M$، $kerf$ زیر مدول بسته‌ای از M باشد.

قضیه ۲۷.۱. هر مدول نامنفرد، چندشکل است.

اثبات. فرض کنید این چنین نباشد، یعنی مدولی مثل M وجود داشته که نامنفرد بوده ولی چند شکل نیست. پس $K \leq M$ و $f : K \to M$ وجود دارد به طوریکه $kerf$ زیرمدول بسته‌ای از M نیست، یعنی توسیع اساسی سره ای مثل N دارد. چون $kerf \lneq N$ پس $n \in N$ای وجود دارد که $n \notin kerf$. تعریف کنید: $I = \{r \in R | nr \in kerf\}$

می‌توان براحتی نشان داد I ایده‌آل راستی از R است. از طرفی I ناصفر است، زیرا ازآنجاکه N توسیع اساسی $kerf$ است بنابر قضیه ۱.۱ برای هر $x \in N$ ناصفر، $r \in R$ناصفری وجود دارد به طوریکه $0 \neq xr \in kerf$، از جمله برای $n \in N$. $I \leq^e R_R$، زیرا فرض کنید $0 \neq a \in R$ دلخواه باشد، اگر $a \in I$ قرار دهید $r' = 1$ دراینصورت $0 \neq ar' \in I$، اگر $a \notin I$ تعریف I ایجاب می‌کند $na \notin kerf$. حال از آنجا که $kerf \lneq^e N$ و $na \in N$ پس، بنابر قضیه ۱.۱، $r' \in R$ای ناصفر وجود دارد به طوریکه $0 \neq nar' \in kerf$ پس $0 \neq ar' \in I$. از آنجا که برای هر $b \in I$، $f(nb) = 0$ پس $f(nI) = 0$. حال داریم: $0 = f(nI) = f(n)I$ پس $f(n) \in Z(M)$ ولی $f(n) \neq 0$ زیرا $n \notin kerf$ و این در تناقض با نامنفرد بودن M است. $\square$

تعریف ۲۸.۱. R–مدول ناصفر M را تجزیه‌ناپذیر گوییم هرگاه نتوان آن را به صورت جمع مستقیم دو زیر مدول ناصفر نوشت.

قضیه ۲۹.۱. M تجزیه‌ناپذیر است اگر و تنها اگر $S = End(M)$ خودتوانی غیر از صفر و یک نداشته باشد.

اثبات. فرض کنید M تجزیه‌ناپذیر باشد، و $f^2 = f \in S$. می‌توان دید که $M = kerf \oplus Imf$ اما از آنجا که M تجزیه‌ناپذیر است بایستی $kerf = 0$ یا $Imf = 0$. فرض کنیم $kerf = 0$، برای هر $m \in M$ داریم: $f(f(m)) = f(m)$ پس $f(m) - m \in kerf = 0$ واین یعنی $f = 1$ (منظور از ۱ همان نگاشت همانی بروی M است). اما $Imf = 0$ به وضوح به معنای آن است که $f = 0$.

برعکس، فرض کنیم $End(M)$ خودتوانی غیر از صفر و یک نداشته ولی M تجزیه‌پذیر باشد پس می‌توان زیرمدول‌های ناصفر مثل M_1 و M_2 از M چنان یافت که $M = M_1 \oplus M_2$. حال نگاشت پوشای تصویر کانونی $\pi_1 : M \to M_1$ را در نظر بگیرید. به وضوح $\pi_1^2 = \pi_1$، اما $\pi_1 \neq 0$، زیرا $M_1 \neq 0$ و $\pi_1 \neq 1$ زیرا در غیراینصورت اگر $\pi_1 = 1$، $0 = ker\pi_1 = M_2$ که تناقض است. پس π_1 خودتوانی نابدیهی در S بوده و این در تناقض با فرض مسئله است، پس M تجزیه‌ناپذیر خواهد بود. $\square$

تعریف ۳۰.۱. مدول ناصفر M را یکنواخت گوییم هرگاه اشتراک هر دو زیرمدول ناصفرش، ناصفر باشد (یا به طورمعادل هر زیرمدول ناصفرش تجزیه ناپذیر باشد؛ و یا هرزیرمدول ناصفرش در M اساسی باشد).

مثال ۳۱.۱. $\mathbb{Z}$ به عنوان $\mathbb{Z}-$مدول یکنواخت است، زیرا هر زیر مدول ناصفر آن به شکل $n\mathbb{Z}$ ، برای عدد طبیعی مثل n، بوده و برای هر $n, m \in \mathbb{N}$ داریم: $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = [n, m]\mathbb{Z} \neq ۰$ که در آن منظور از $[n, m]$ کوچکترین مضرب مشترک دو عدد n و m است.

تعریف ۳۲.۱. برای عدد اول p مجموعه

$$J_p = \left\{ \sum_{i=۰}^{\infty} a_i p^i | a_i \in \mathbb{Z}, ۰ \leq a_i \leq p - ۱ \right\}$$

را در نظربگیرید. فرض کنید $\pi = a_۰ + a_۱ p + ... + a_n p^n + ...$ و $\rho = b_۰ + b_۱ p + ... + b_n p^n + ...$ دو عضو از J_p باشند، تعریف کنید:

$$\pi + \rho = c_۰ + c_۱ p + ... + c_n p^n + ...$$

و

$$\pi\rho = c'_۰ + c'_۱ p + ... + c'_n p^n + ...$$

که در آن

$$c_۰ = a_۰ + b_۰ - k_۰ p$$

$$c_n = a_n + b_n + k_{n-۱} - k_n p$$

$$c'_۰ = a_۰ b_۰ - m_۰ p$$

$$c'_n = a_۰ b_n + a_۱ b_{n-۱} + ... + a_n b_۰ + m_{n-۱} - m_n p (n = ۱, ۲, ...)$$

که درآن اعداد صحیح $k_۰, k_n, m_۰, m_n$ به طورمنحصربه فرد، از آنجا که c_n و c'_n بین ۰ و $p - ۱$ هستند، تعیین می‌شوند. J_p با جمع وضرب بالا تشکیل یک حلقه می‌دهد که به آن حلقه اعداد