بنام خداوند لوح و قلم

۲۷۹۴۹

دانشگاه فردوسی مشهد
دانشکده علوم ۲

پایان نامه کارشناسی ارشد آمار ریاضی

«جانشینی برای آزمون دنباله‌ای t»

به راهنمایی استاد ارجمند جناب آقای
دکتر ناصررضا ارقامی

نگارش:
علیرضا نظیف

به یاد و برای پدرم

که کرامت باران بود

و نثار خاکپای مادرم

که لطافت نسیم بهاران است

علیرضا لطیف

تقدیم به پیشگاه مقدس استادم جناب آقای دکتر ناصررضا ارقامی که نه تنها با پیشنهاد ایده اصلی و به عنوان استاد راهنما در این تحقیق یاری‌ام نمودند،بلکه با دانایی، درایت و مهربانی، راهنمای راهگشای من در تمام دوران تحصیل دانشگاهی بوده‌اند.

از استاد بزرگوارم، جناب آقای دکتر شاهکار، مدیر گروه آمار دانشکده و استاد مشاور پایان‌نامه و استاد محترم، دانشمند فرهیخته جناب آقای دکتر بزرگ‌نیا که با نهایت لطف و محبت زحمت داوری پایان‌نامه را پذیرفتند، سپاسگزارم.همچنین از دوست بسیار عزیزم جناب آقای مجید سرمد که با دلسوزی و صمیمیت کم‌نظیر در مهمترین بخش این تحقیق، یعنی اجرای برنامه‌ها و شبیه‌سازیهای کامپیوتری، همکاری نمودند قدردانی می‌کنم.

از جناب آقای اتحاد مسئول کتابخانه دانشکده علوم ۲ در تهیه مراجع و مقالات، سرکار خانم حسینی منشی گروه آمار و سرکار خانم پاکرو و آقای محمدی که تایپ و تکثیر این مجموعه را انجام داده‌اند، تشکر می‌کنم.

علیرضا نظیف
۱۳۷۵/۵/۱۵

شماره ....
تاریخ ....
پیوست ....

دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکدهٔ علوم

دانشگاه فردوسی " مشهد"

دانشکده علوم

گروه آمار

صورتجلسه دفاع رسالـه کارشناسی ارشد آمارریاضی

درتاریخ ۷۵/۴/۴ خانم / آقای علیرضا نظیف از رسالهٔ کارشناسی ارشد خود

تحت عنوان :

" جانشینی برای آزمون دنباله ای t "

با بیان خلاصه ای از کار انجام شده و پاسخ به سئوالات داوران دفاع نمودند و

این رسالـه با نمره ۲۵ معادل عالی قبول / رد شد.

۱ ـ استادراهنما دکتر ناصررضاارقامی

۲ ـ اعضاء هیئت داوران ۱ ـ دکتر شاهکار (مشاور رسالـه)

۲ ـ دکتر بزرگ نیا (داور رسالـه)

۳ ـ

مدیر گروه آمار　　　　معاون آموزشی دانشکده

غلامحسین شاهکار

فهرست

عنوان	صفحه

فصل‌های اول و دوم و بخش ضمیمه بطورکامل شامل مطالبی است که برای اولین‌بار در این پایان‌نامه تحقیق و ارائه شده است. همچنین برخی از نتایج و قضیه‌ها در فصل اول توسط نگارنده اثبات شده است. این موارد در متن با علامت (*) مشخص شده‌اند.

پیش در آمد

بیان موضوع و اهداف متن حاضر

در علم استنباط آماری، آزمون فرضهای آمار در مورد پارامترهای توزیع نرمال،که مهمترین توزیع آماری است، اهمیت زیادی دارد و تاکنون دانشمندان بسیاری در این‌باره تحقیق کرده و آزمونهای متفاوتی درباره پارامترهای این توزیع در حالتهای متفاوت انجام داده‌اند.

در این میان، آزمونهای دنباله‌ای به سبب صرفه‌جویی قابل ملاحظه‌ای که در متوسط حجم نمونه نسبت به آزمونهای با حجم نمونه ثابت ایجاد می‌کنند، مورد توجه هستند. در متن حاضر انجام آزمون دنباله‌ای برای میانگین توزیع نرمال در حالتی که واریانس توزیع مقداری نامعلوم است، مورد نظر است.

اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد که هر دو پارامتر $(\mu\ ,\ \sigma^2)$ مقادیری نامعلوم هستند و $x_1\ ,\ x_2,\ldots$ مشاهداتی از این توزیع باشند، Dantzig(1940) ثابت کرد که انجام مسئله آزمون فرضهای ساده :

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu = \mu_1 \end{cases}$$

با خطای نوع اول α و خطای نوع دوم β که از قبل تعیین شده باشد، به روش آزمون با حجم نمونه ثابت ممکن نیست. پس از اثبات این مسئله روش‌های دیگری برای انجام این آزمون پیشنهاد و معرفی شده است. مهمترین آنها عبارت است از

۱ - روش دو نمونه‌ای Stein (1945)

۲ - روش نیمه دنباله‌ای Arghami-Billard (1991)

بطور کلی در آزمون فرض ساده برای میانگین توزیع نرمال به شکل فوق، مقدار واریانس توزیع (σ^2) نقش حساسی دارد. به‌این صورت که فرض مخالف μ_1 معمولاً بسته به مقدار σ^2، انتخاب می‌شود. به

عبارت دیگر مقادیر انتخاب شده برای فرض مخالف (μ_1) در محدوده $(\mu - \sigma , \mu + \sigma)$ انتخاب شده و مقادیری از μ_1 که خارج از این بازه قرار دارد حساسیت قابل توجه‌ای نداشته و مورد آزمون قرار نمی‌گیرند. بنابراین برای حذف تأثیر σ^2 می‌توان آزمونهایی به شکل زیر برای میانگین توزیع نرمال با واریانس نامعلوم انجام داد.

$$\begin{cases} H_0 : \mu/\sigma = \delta_0 \\ H_1 : \mu/\sigma = \delta_1 \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} H_0 : \delta = \delta_0 \\ H_1 : \delta = \delta_1 \end{cases}$$

که در آن $\delta = \mu/\sigma$ است.

این آزمون تاکنون به روشهای متعددی انجام شده است.

۱ـ روش آزمون با حجم نمونه ثابت

فرضهای فوق را می‌توان با حجم نمونه ثابت آزمون کرد. در این روش آماره آزمون $\frac{\bar{x}}{s}$ است، زیرا توزیع این آماره تنها به پارامتر $\delta = \mu/\sigma$ بستگی دارد.

۲ـ روش دنباله‌ای Wald(1947)، با استفاده از توابع وزنی

۳ـ روش دنباله‌ای، با استفاده از تبدیل مشاهدات که به آزمون دنباله‌ای (Sequential t-test) معروف است و توسط Barnard معرفی شده است.

۴ـ روش آزمونهای مجانبی

در این رساله روش دنباله‌ای دیگری برای آزمون فرضهای فوق ارائه می‌شود.

آزمون دنباله‌ای Wald (1947) و روش Barnard که اولی با استفاده از توابع وزنی و دومی با استفاده از تبدیل مشاهدات انجام شده است، معادل یکدیگر هستند و در این رساله معادل بودن آنها اثبات شده است و همانطور که ذکر شد این آزمونها به آزمونهای دنباله‌ای t (Sequential t-test) شهرت دارند. علت تمایل به انجام آزمون با روش دنباله‌ای در این حالت خاصیت بهینگی این آزمونهاست که شرح آن در بخش (۱ـ۵) خواهد آمد.

انجام آزمون کلاسیک دنباله‌ای t در عمل بسیار دشوار است و بدون استفاده از کامپیوتر و

نرم‌افزارهای پیشرفته میسر نیست و شاید به همین دلیل باشد که تاکنون بررسی‌های دقیق‌تری روی آن انجام نشده است.

در متن حاضر، در فصل نخست، ابتدا به معرفی اجمالی آزمونهای دنباله‌ای و آنگاه به شرح کامل آزمون کلاسیک دنباله‌ای t می‌پردازیم. در فصل دوم، روش جدیدی برای آزمون فرضهای فوق معرفی می‌شود. این روش بسیار ساده‌تر و به بیان دیگر عملی‌تر از آزمون کلاسیک دنباله‌ای t می‌باشد، زیرا انجام آن برخلاف آزمون دنباله‌ای t مستلزم محاسبه عددی انتگرالها نیست. در فصل سوم بوسیله شبیه‌سازیهای کامپیوتری در حالتهای مختلف دو آزمون را از جنبه‌های مختلف مخصوصاً از نظر متوسط حجم نمونه با هم مقایسه می‌کنیم.

ضمیمه حاوی برنامه‌هائی است که به زبان Basic و در نرم‌افزار Mathematica برای شبیه‌سازیهای لازم توسط نگارنده نوشته شده است.

فصل اول

درآمد

۱-۱ مقدمه

در این فصل روشهای دنباله‌ای بطور عام و آزمون دنباله‌ای نسبت احتمال بطور خاص معرفی شده، خواص این آزمون بطور کامل بیان می‌شود. توابع مشخصه عملکرد و متوسط حجم نمونه که نقش مهمی در آزمونهای دنباله‌ای دارد، در بخش چهارم این فصل معرفی می‌شوند. ویژگیها، محاسن و معایب آزمونهای دنباله‌ای بطور خلاصه در بخش پنجم بیان می‌شود.

مسئله آزمون فرضهای مرکب به روش دنباله‌ای و مشکلی که این آزمونها در فرضهای مرکب دارد موضوع بخش ششم را تشکیل می‌دهد. در پایان بخش ششم، معرفی اجمالی آزمونهای دنباله‌ای کامل شده، آنگاه در بخش هفتم روش توابع وزنی Wald و روش تبدیل مشاهدات را در فرضهای مرکب بیان کرده تا در فصل هشتم به شرح کامل آزمون دنباله‌ای t پرداخته شود. در انتهای این فصل نقاط ضعف آزمون کلاسیک دنباله‌ای t بیان می‌شود.

۲-۱ روش‌های دنباله‌ای Sequential Method

در روشهای استنباط آماری، روشهایی که در آن تعداد مشاهدات (حجم نمونه) مقداری ثابت نیست و از قبل تعیین نمی‌شود، روشهای دنباله‌ای نام دارد. به عبارت دیگر در روشهای دنباله‌ای حجم نمونه خود یک متغیر تصادفی است. این روشها کاربرد فراوان و مؤثری در نظریه برآورد آماری، آزمون فرضهای آماری و نظریه تصمیم آماری دارد. دلایل مختلفی در اتخاد روش‌های دنباله‌ای وجود دارد که مهمترین آنها عبارت است از:

۱ - عملی نبودن روشهای غیر دنباله‌ای

۲ - کارایی بیشتر روشهای دنباله‌ای

۳ - ملاحظات انسانی یا اقتصادی

در نظریه برآورد آماری، دلیل استفاده از روشهای دنباله‌ای اغلب عملی نبودن روشهای غیر دنباله‌ای (روشهای حجم نمونه ثابت) است، حال آنکه دلیل عمده استفاده از این روشها در نظریه آزمون فرضهای آماری کارایی بیشتر این روشهاست. البته در این قسمت نیز گاهی انجام آزمون با روشهای حجم نمونه ثابت عملی نیست.

سومین دلیل در مواردی اتفاق می‌افتد که انجام آزمایش به تعداد حداقل مورد نیاز در نظر باشد. مانند تحقیقات و آزمایشهای پزشکی و داروسازی، آزمایشهای مربوط به محیط‌زیست یا آزمایشهایی که انجام آن به هزینه زیادی نیاز دارد.

در این متن، موضوع مورد تحقیق آزمونهای دنباله‌ای است و همانگونه که قبلاً اشاره شد، دلیل آن کارایی بیشتر این آزمونها نسبت به آزمونهای با حجم نمونه ثابت است.

اساس نظریه آزمونهای دنباله‌ای توسط A.Wald در سال ۱۹۴۷ تدوین و ارائه شد. او در مقدمه کتاب خود به نام Sequential Analysis بیان می‌کند که در سال ۱۹۴۳ حل مسئله‌ای مربوط به آنالیز دنباله‌ای توسط M.Fridman و W.Wallis به او پیشنهاد شد و این اتفاق دلیل گرایش او به تدوین و ارائه نظریه آنالیز دنباله‌ای شده است. Wald در کتاب ارزشمند خود تئوری کامل آزمونهای دنباله‌ای را برای فرضهای ساده و مرکب ارائه کرد، روش تقریبی برای محاسبه متوسط حجم نمونه در این آزمونها بدست آورد و نشان داد که نوع خاصی از آزمونهای دنباله‌ای موسوم به آزمون دنباله‌ای نسبت احتمال (SPRT) برای فرضهای ساده در میان تمامی آزمونها از متوسط حجم نمونه کمتری برخوردار است، که این ویژگی، بهینگی آزمونهای دنباله‌ای نامیده می‌شود.

در آزمونهای دنباله‌ای نمونه‌ها تک به تک گرفته می‌شوند و این کار تا زمانی که فرض مورد آزمون پذیرفته یا رد شود ادامه می‌یابد. بنابراین آزمونهای دنباله‌ای بر دو اصل کلی مبتنی است.

۱- قاعده توقف

در هر مرحله از نمونه‌گیری قاعده توقف مشخص می‌کند که آیا نمونه‌گیری باید خاتمه پذیرد یا اینکه لازم است نمونه دیگری گرفته شود.

۲- قاعده تصمیم

هنگامی که نمونه‌گیری خاتمه می‌یابد، چه تصمیمی باید گرفته شود. به عبارت دیگر فرض آزمون باید پذیرفته یا رد شود.

۱-۳- آزمون دنباله‌ای نسبت احتمال Sequential Probability Ratio test

آزمون دنباله‌ای نسبت احتمال که بطور مختصر آن را با نماد (SPRT) نشان می‌دهند برای آزمون فرض ساده به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۱-۳-۱- فرض کنید $X_1 , X_2,...$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی باشد که توزیع آنها به پارامتر نامعلوم θ بستگی دارد. برای آزمون فرضهای ساده

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta = \theta_1 \end{cases} \qquad (۱-۳-۱)$$

با خطاهای نوع اول و دوم α و β، آزمونی که به صورت زیر تعریف می‌شود، آزمون دنباله‌ای نسبت احتمال (SPRT) نامیده می‌شود. ابتدا کمیت λ_n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\lambda_n = \frac{f(x_1, ..., x_n \mid \theta_1)}{f(x_1, ..., x_n \mid \theta_0)} \qquad (۲-۳-۱)$$

مشاهدات یکی یکی اخذ می‌شوند و در هر مرحله (به عنوان مثال مرحله n ام)

اگر $B < \lambda_n < A$ نمونه‌گیری با مشاهده $(n + ۱)$ ام ادامه پیدا می‌کند.

اگر $\lambda_n \geq A$ نمونه‌گیری متوقف شده، فرض H_0 رد می‌شود.

و اگر $\lambda_n \leq B$ نمونه‌گیری متوقف شده ، فرض H_0 پذیرفته می‌شود.

A و B دو عدد حقیقی مثبت هستند، طوری که $B < A$ و به نحوی انتخاب می‌شوند که خطاهای

دوگانه آزمون به ترتیب برابر α و β باشد. ■

بنابراین اگر متغیرهای X_i، $i = 1, 2, ...$، متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع باشند و اگر $f(x;\theta)$ تابع چگالی احتمال X_i ها باشد.

$$\lambda_n = \frac{f(x_1;\theta_1)\dots f(x_n;\theta_1)}{f(x_1;\theta_0)\dots f(x_n;\theta_0)} = \prod_{i=1}^{n} \frac{f(x_i;\theta_1)}{f(x_i;\theta_0)} \qquad (۱-۳-۳)$$

در نتیجه اگر $X_i \underset{\sim}{iid} f(x;\theta)$ و $i = 1, 2, ...$ آزمون SPRT را می‌توان به صورت زیر انجام داد.

تعریف می‌کنیم:

$$z_i = \text{Ln}\frac{f(x_i;\theta_1)}{f(x_i;\theta_0)} \qquad (۱-۳-۴)$$

پس:

$$\text{Ln}\,\lambda_n = \sum_{i=1}^{n} z_i$$

آنگاه در مرحله n ام

اگر $\text{Ln}\,B < \sum_{i=1}^{n} z_i < \text{Ln}\,A$ نمونه‌گیری با مشاهده $(n + 1)$ ادامه پیدا می‌کند

اگر $\sum_{i=1}^{n} z_i \ge A$ نمونه‌گیری متوقف شده و فرض H_0 رد می‌شود

و اگر $\sum_{i=1}^{n} z_i \le B$ نمونه‌گیری متوقف شده و فرض H_0 پذیرفته می‌شود

استفاده از این روش سهولت بیشتری در انجام فرایند آزمون ایجاد خواهد کرد.

در آزمون دنباله‌ای نسبت احتمال (SPRT) به دو سئوال مهم باید پاسخ داد.

۱ - آیا این آزمون سرانجام خاتمه پیدا می‌کند یا اینکه ممکن است نمونه‌گیری تا بی‌نهایت ادامه داشته باشد.

۲ - مقادیر ثابت A و B را چگونه تعیین کنیم تا خطاهای نوع اول و دوم آزمون مقادیر از قبل مشخص شده α و β باشد.