دانشگاه آزاد اسلامی

واحد تهران مرکزی

دانشکدهٔ علوم پایه، گروه ریاضی

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی‌ارشد (M.Sc.)

گرایش: تحقیق در عملیات

عنوان:

ارزیابی نتایج موتورهای جستجوی در اینترنت با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها

استاد راهنما:

دکتر مهدی طلوع

استاد مشاور:

دکتر قاسم توحیدی

پژوهشگر:

فاطمه مبیّن

تابستان ۱۳۹۱

تقدیم به:

یک موجود مقدس:

آن که ناتوان شد تا من به توانایی برسم. موهایش سپید شد تا من در اجتماع روسپید شوم و عاشقانه سوخت تا روشنگر راهم باشد و گرمابخش وجودم.

مادرم

تشکر و قدردانی

آنچه در ادامه می‌آید، تلاشی است که بی‌شک بدون کمک و همراهی بزرگوارانی میسر نمی‌گشت.

از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر مهدی طلوع در سمت استادراهنما به خاطر رهنمودهای ارزشمندشان در مسیر انجام این پایان‌نامه قدردانی می‌کنم.

از اساتید ارجمند جناب آقای دکتر قاسم توحیدی در سمت استادمشاور و جناب آقای دکتر صانعی که داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند به پاس کوشش‌ها و رهنمودهای بی‌شائبه‌شان تشکر و قدردانی می‌نمایم.

فهرست مطالب

فهرست جدول‌ها

مقدمه

از سال ۱۹۹۲ یک منبع بسیار مهم به منابع اطلاعاتی اضافه شد و آن «شبکه جهانی وب[1]» یا همان اینترنت است. به جز کاربرد در زمینه اطلاع‌رسانی اینترنت کاربردهای بیشمار و غیرقابل تصوری در تجارت و سایر زمینه‌های زندگی نیز پیدا کرده است. به بیان دیگر امروزه در هر زمینه‌ای که بتوان تصورکرد. اینترنت یک ابزار مؤثر و توانمند به حساب می‌آید.

با وجود حجم روزافزون طراحی و راه‌اندازی سایت‌های وب مختلف، نیاز به دستیابی به مرکزی برای شناسایی این پایگاه‌ها برای استفاده بهتر و بیشترکاربران وب، امر مهمی به‌شمار آمد. از آنجا که سایت‌ها و مطالبی که در وب منتشر می‌شوند، توسط هیچ مرکز رسمی بین‌المللی مسئول در اینترنت اعلام نمی‌شود تنها راه پیدا کردن یک موضوع، اطلاع داشتن دقیق از آدرس آن سایت به‌نظر می‌رسد.

موتورهای جستجو برای سهولت دسترسی کاربران به مطالب موجود در سایت‌های وب راه‌اندازی شده‌اند. در واقع بدون نیاز به موتورهای جستجو قادر نخواهیم بود تا از به روزرسانی سایت‌های وب اطلاع کسب کنیم و نیازهای تحقیقاتی، آموزش، تجاری، خبری و . . .خود را پوشش دهیم. روش‌های متعددی برای ارزیابی عملکرد موتورهای جستجوی در اینترنت وجود دارد که در این تحقیق برخی از این روش‌ها مطرح می‌شود.

در فصل اول این تحقیق، مروری می‌شود بر روش تحلیل پوششی داده‌ها، فصل دوم به بررسی عملگر OWA پرداخته و به معرفی برخی از مدل‌های معروف وکاربردی OWA می‌پردازیم. فصل سوم، کاربرد عملگر OWA در رتبه‌بندی موتورهای جستجوی را بیان می‌کند. فصل چهارم به ارزیابی نتایج موتورهای جستجوی در اینترنت با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها می‌پردازد. به علاوه در این فصل، روش استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها با روش عملگر OWA مقایسه می‌شود.

1) World Wide Web

فصل اول

مروری بر تحلیل پوششی داده‌ها

۱-۱ مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها[1]، یک برنامه‌ریزی خطی، برای ارزیابی عملکرد یک مجموعه از واحدهای مشابه است. به‌طوری‌که هر واحد، یک مقدار معین ورودی مصرف و مقدار معین خروجی، تولید می‌کند. هر واحد، مصرف منابع و تولید خروجی را کنترل نموده که به این واحدها، واحدهای تصمیم گیری[2] گویند. مسأله ارزیابی عملکرد واحدها و هم‌چنین استفاده‌ی مطلوب و بهینه از منابع در دسترس از دیر باز مورد توجه مدیران بوده است، و همواره بر این تصمیم بوده‌اند تا با ایجاد راه‌کارهای مناسب از منابع موجود، حداکثر استفاده را ببرند. محدودیت‌های عواملی چون سرمایه، نیروی انسانی، انرژی و... مدیران را به فکر پیدا کردن روشی برای استفاده‌ی بهین از این عوامل داشتند. در حقیقت اطلاع از عملکرد واحدهای تحت نظارت مدیر، بهترین وظیفه‌ی مدیریت در رابطه با تصمیم‌گیری‌های مناسب به‌منظور هدایت آنان است.پیچیدگی اطلاعات، حجم بسیار زیاد داده‌ها، اثرات عوامل بیرونی، اثرات واحدهای رقیب بر عملکرد، محدود بودن واحدها در رابطه با تصمیم‌گیری‌های مناسب تغییرات ناگهانی خط‌مشی به علت برخورد با مشکلات حاد(مانند بیکاری، تورم) و...از عواملی هستند که مدیر بدون برخورد علمی نمی‌تواند از کارکرد واحدها مطلع شود.

1) Data Envelopment Analysis   2) Decision Making Unit

۱-۲ برخی از تعاریف اولیه

۱-۲-۱ کارایی

در مسائل تصمیم‌گیری، کارایی یا خوب کارکردن یک واحد، تابعی از عوامل و شاخص‌های درون‌سازمانی است و اثربخشی یا کار خوب کردن یک واحد، تابعی از عوامل و شاخص‌های برون‌سازمانی است. اما هدف اصلی مدیران، حداکثر استفاده از منابع موجود است تا بتوانند بهترین نتیجه را به‌دست آورند. حصول بهترین نتیجه با حداکثر استفاده از منابع موجود را بهره‌وری گویند.

کارایی هر واحد حاصل مقایسه شاخص‌های آن واحد با استانداردها است. کارایی یک واحد تصمیم‌گیری حاصل مقایسه ورودی‌ها و خروجی‌ها است. در ساده‌ترین حالت که واحدهای تصمیم‌گیری دارای یک ورودی و یک خروجی هستند، و در حالتی‌که چند ورودی و چند خروجی برای هر واحد داشته باشیم، اگر هزینه و قیمت به‌ترتیب برای ورودی‌ها و خروجی‌ها مشخص باشند، خارج‌قسمت قیمت خروجی‌ها به هزینه ورودی‌ها، کارایی را نتیجه می‌دهد که «کارایی اقتصادی [1]» نامیده می‌شود. ولی، وقتی قیمت‌ها و هزینه‌ها در دسترس نباشند، تعیین کارایی اغلب مشکل خواهد بود که در این صورت کارایی به روش «مغلوب کردن[2]» بررسی می‌شود.

فرض کنید واحد تصمیم‌گیری موردنظر، با مصرف ورودی $x_1, \ldots, x_m$ خروجی $y_1, \ldots, y_s$ را تولید نماید. اگر قیمت همه خروجی‌ها و هزینه تمام ورودی ها معلوم باشد در این صورت کارایی اقتصادی برابر با عبارت زیر می‌باشد:

$$\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_r}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_i} \qquad (1-1)$$

۱-۲-۲ واحد غالب

DMU_p، را با ورودی x_p و خروجی y_p و DMU_q را با ورودی x_q و خروجی y_q در نظر بگیرید. DMU_p را بر DMU_q «غالب[3]» گویند اگر و تنها اگر

1) Economic Efficiency 2) Dominate 3) Dominated DMU

$$\begin{bmatrix} -x_q \\ y_q \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -x_p \\ y_p \end{bmatrix}$$

۱-۲-۳ کارایی مطلق

از آن‌جایی که استاندارد شاخص‌ها می‌تواند بیرون یا داخل جامعه باشد، «کارایی مطلق[1]» و «کارایی نسبی[2]» تعریف می‌شود.

فرض کنید برای واحد تصمیم‌گیری خاص استاندارد جهانی برای یک واحد ورودی، خروجی برابر $y_\circ^*$ است. اگر واحد تصمیم‌گیری با مصرف یک واحد ورودی، $y_\circ$ خروجی تولید کند در این صورت کارایی مطلق به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{y_o}{y_o^*} \qquad (۱-۲)$$

۱-۲-۴ کارایی نسبی

فرض کنید n واحد تصمیم‌گیری متجانس مورد ارزیابی باشند. به‌طوری‌که، هر واحد با مصرف $\mathbf{x}_j$ واحد از ورودی، $\mathbf{y}_j$ واحد خروجی تولید می‌نماید. در این صورت، کارایی نسبی DMU_k را با RE_k نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$RE_k = \frac{\frac{y_k}{x_k}}{\max\{\frac{y_j}{x_j} : j = ۱, \ldots, n\}} \qquad (۱-۳)$$

۱-۲-۵ مجموعه امکان تولید

فارل در سال ۱۹۵۷، با استفاده از مشاهدات و اصول زیر، مجموعه امکان تولید را تعریف نمود و مرز آن را تابع تولید نامید. همان‌طورکه بیان شد، با داشتن تابع تولید می‌توان به‌راحتی کارایی یک واحد تصمیم‌گیری را محاسبه کرد. اما، به دلایل مختلف تابع تولید به‌راحتی قابل محاسبه نیست و در بعضی مواقع به‌دست آوردن صورت تحلیلی آن غیرممکن است. ازاین رو مجموعه‌ای به‌نام امکان تولید (PPS) می‌سازیم و مرز آن تقریبی از تابع

1) Absolute Efficiency 2) Relative Efficiency

تولید حاصل از مجموعه امکان تولیدها یک مرز تقریبی است که با توجه به تکنولوژی‌های مورد نظر است. مجموعه امکان تولید که آن‌را با T نمایش می‌دهند به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$T = \{(x, y) | \text{بردار نامنفی } x \text{ بتواند بردار نامنفی } y \text{ را تولید کند}\}$$

تعریف فوق باتوجه به تکنولوژی تولید، مجموعه‌ی امکان تولید را مشخص می‌کند. با درنظرگرفتن نوع تکنولوژی تولید می‌توان مجموعه امکان تولیدهای متفاوتی ساخت. حال به شرح قدیمی‌ترین مجموعه امکان تولید می‌پردازیم. فرض کنید n مشاهده به‌صورت $(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j)$ برای $j = ۱, \ldots, n$ موجود باشند که در آن‌ها بردار ورودی $\mathbf{x}_j$ بردار خروجی $\mathbf{y}_j$ را تولید می‌نماید. و فرض براین است که $\mathbf{x}_j \geq ۰$ و $\mathbf{x}_j \neq ۰$ $(j = ۱, \ldots, n)$ و $\mathbf{y}_j \geq ۰$ و $\mathbf{y}_j \neq ۰$ $(j = ۱, \ldots, n)$ مجموعه T را طوری درنظر می‌گیریم که در اصول زیر صدق کند.

۱-اصل شمول مشاهدات (ناتهی بودن[1]): اصلی که قابل قبول همگان در ساختن مجموعه T است. یعنی، تمام مشاهدات، متعلق به مجموعه امکان تولید باشند. در جهت دفاع از این اصل استدلال بر آن است که مشاهدات حاصل ورودی‌ها در جهت تولید خروجی‌های به‌دست آمده است. این اصل بلامنازع مورد قبول همگان است. به‌عبارت دیگر، تولید واقعی جامعه است و نمایش ریاضی آن به‌صورت زیر است:

$$\forall j, \quad j = ۱, \ldots, n, \quad (x_j, y_j) \in T$$

۲-اصل امکان‌پذیری[2]: اگر $(x, y) \in T$، یعنی x بتواند y را تولید کند، آنگاه بتوان با هر ورودی بیشتر یا مساوی x، y را نیز تولید کرد و با همان مقدار x نیز بتوان خروجی کمتر یا مساوی y را تولید کرد. به‌عبارت دیگر، اگر $(x, y) \in T$ و $\bar{x} \geq x$ و $\bar{y} \leq y$، آنگاه $(\bar{x}, \bar{y}) \in T$.

$$\forall (x, y), \forall (\bar{x}, \bar{y}); [((x, y) \in T, \bar{x} \geq x, \bar{y} \leq y) \longrightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \in T]$$

۳-اصل بی‌کرانی اشعه[3] (بازده به مقیاس ثابت)[4]: به‌ازای هر $(x, y) \in T$ و به ازای هر عدد ثابت $\lambda \geq ۰$ داریم، $(\lambda x, \lambda y) \in T$. به‌عبارت دیگر، اگر x بتواند y را تولید کند، آنگاه هر مضربی از x، همان مضرب از y را تولید می‌کند. یعنی، هر افزایش در ورودی باعث همان افزایش در خروجی و یا هر کاهش در ورودی باعث همان کاهش در خروجی می‌گردد. هم‌چنین، این اصل بیان می‌کند، اگر (x, y) دارای کارایی نسبی e باشد،

1) Nonempety 2) Possibility 3) Unbounded Ray 4) Constant Returns to Scale

آن‌گاه کارایی نسبی $(\lambda x, \lambda y) \in T$ برای هر $\lambda \geq 0$ نیز برابر e است. یعنی، این DMU با هر اندازه‌ای، کارایی ثابتی خواهد داشت.

$$\forall (x,y), \forall \lambda; [(x,y) \in T, \lambda \geq 0 \longrightarrow (\lambda x, \lambda y) \in T]$$

الف) بازده به مقیاس ثابت: حالتی است که در آن نسبت تغییرات خروجی‌ها به تغییرات ورودی‌ها برابر با یک است، خروجی‌ها نیز به همان میزان، با همان نرخ رشد خواهند کرد.

ب) بازده به مقیاس افزایشی: حالتی است که در آن نسبت تغییرات خروجی‌ها به تغییرات ورودی‌ها بیش‌تر از یک است، در این حالت میزان و نرخ تغییرات در خروجی‌ها بیش‌تر از میزان و نرخ تغییرات در ورودی‌ها است.

۴-اصل تحدب[1]: اگر x، y را و هم‌چنین $\bar{x}$، $\bar{y}$ را بتواند تولید کند، آن‌گاه $\lambda x + (1-\lambda)\bar{x}$ هم می‌تواند $\lambda y + (1-\lambda)\bar{y}$ را تولید کند. یعنی،

$$\forall (x,y), \forall (\bar{x},\bar{y}), \forall \lambda; [((x,y),(\bar{x},\bar{y}) \in T, \lambda \in [0,1]) \longrightarrow \lambda(x,y) + (1-\lambda)(\bar{x},\bar{y}) \in T]$$

۵-اصل کمینه درون‌یابی[2]: مجموعه امکان تولید T کوچکترین مجموعه‌ای است که در اصول ۱ تا ۴ صدق می‌کند.

با توجه به پذیرفتن اصل بازده به مقیاس ثابت و تحدب، مجموعه تمام DMUهای مجازی به‌صورت زیر است:

$$T_C = \{(x,y) | x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j, y = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j, \lambda_j \geq 0, j = 1, \ldots, n\}$$

از این‌رو با توجه به اصل امکان‌پذیری و نامنفی بودن ورودی‌ها و خروجی‌ها مجموعه منحصر به‌فرد امکان تولید که در اصول فوق صدق می‌کند به‌صورت زیر است:

$$T_C = \{(x,y) | x \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j, y \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j, \lambda_j \geq 0, j = 1, \ldots, n\}$$

1) Convexity 2) Minimum Extrapolation Theorem

اندیس C در T_C برای تأکید بر آن است که در این تکنولوژی بازده به مقیاس ثابت پذیرفته شده است. مرز مجموعه T_C که یک سطح قطعه‌ای خطی است، مرز کارا است. هر DMU که روی مرز قرار داشته باشد، کارای نسبی است. در غیراین صورت، ناکارا است.

در اینجا باید توجه داشت که اگر مجموعه‌ی T را با ملحوظ داشتن اصول ۱ تا ۴ بسازیم، آن‌گاه درنظر گرفتن اصل پنجم ضروری نخواهد بود. پس، اگر بگوییم مجموعه T ، مجموعه‌ای است که در اصول پنج‌گانه فوق صدق می‌کند معادل با این است که مجموعه را با درنظر گرفتن اصول ۱ تا ۴ بسازیم، PPSای که در اصول ۱ تا ۵ صدق می‌کند را با T_C یا T_{CCR} نمایش می‌دهیم.

۱-۳ مدل CCR

۱-۳-۱ مدل مضربی CCR

در صورتی‌که هدف، بررسی کارایی n واحد با m ورودی و s خروجی باشد، کارایی واحد jام با استفاده از فرمول زیر محاسبه می‌گردد:

$$\theta_j = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \qquad (۱-۴)$$

که در آن x_{ij}= میزان ورودی iام برای واحد jام،

y_{ij}= میزان خروجی rام برای واحد jام،

u_r= وزن داده شده به خروجی rام (قیمت خروجی rام)،

v_i= وزن داده شده به ورودی iام (قیمت ورودی iام)،

برای ماکسیمم نمودن کارایی واحد jام، باید رابطه‌ی بالا حداکثر شود و از آن‌جایی که حداکثر کارایی ۱ است لذا، نکته‌ی مهم این است که وزن‌های به‌دست آمده برای واحد jام، باید طوری تعیین گردد تا کارایی سایر واحدها نیز، کوچک‌تر یا مساوی یک باشد. در نتیجه، مدل زیر که معروف به فرم کسری مدل CCR است، توسط چارنز، کوپر و رودز در سال ۱۹۸۷ ارائه شده است.

$$
\begin{aligned}
&\max\theta = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}} \\
\text{s.t.}\quad & \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \le 1, \qquad j = 1,\dots,n \\
& v_i \ge 0, \qquad i = 1,\dots,m \\
& u_r \ge 0, \qquad r = 1,\dots,s
\end{aligned}
\tag{۱ − ۵}
$$

با استفاده از تبدیلات چارنز و کوپر (۱۹۷۸) می‌توان مدل کسری قبل را به فرم یک مسألهٔ برنامه‌ریزی خطی، به‌صورت زیر ساخت که به مدل مضربی CCR معروف است.

$$
\begin{aligned}
&\max \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} \\
\text{s.t.}\quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 0, \qquad j = 1,\dots,n \\
& \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} = 1 \\
& u_r \ge 0, \qquad r = 1,\dots,s \\
& v_i \ge 0, \qquad i = 1,\dots,m
\end{aligned}
\tag{۱ − ۶}
$$

فصل دوم

روش عملگر OWA و کاربرد آن در مسائل تصمیم‌گیری

۲-۱ تاریخچه OWA

«رونالد یاگر[1]» در سال ۱۹۸۸ عملگر تجمیع جدیدی تحت عنوان عملگر میانگین وزن‌دار مرتب (OWA) را برای اولین بار معرفی کرد. این عملگر قالبی واحد برای تصمیم‌گیری در شرایط غیرقطعی ایجاد می‌کند به گونه‌ای که در این روش سیاست‌های تصمیم‌گیری مختلف مانند می‌نیمم ماکسیمم (خوش‌بینانه)، ماکسیمم می‌نیمم (بدبینانه)، با عملگرهای مختلف و در نتیجه با بردارهای وزن مختلف مشخص می‌شوند. یک مسئله مهم در تئوری عملگر OWA نحوه تعیین وزن‌های این عملگر است.

روش‌های متعددی برای تعیین وزن‌های عملگر OWA مطرح شده است. به عنوان نمونه روش مطالعه وزن‌ها براساس داده‌ها از جمله این روش‌ها است که در سال ۱۹۹۸ توسط «فیلو[2]» و یاگر مطرح شده است. به علاوه یاگر روش تجمیع براساس کمیت‌سنج‌ها را برای تعیین وزن‌ها پیشنهاد داده است.

روش قابل توجه دیگری که برای تعیین وزن‌ها مورد توجه محققین قرارگرفته است، روش حل مسئله‌های مقید برای تعیین وزن‌ها، است. اولین مسئله بهینه‌سازی مقید توسط «اُهاگن[3]» مطرح شده است که به روش

1) R. Yager 2) Filv 3) OHagen

حداکثر بی‌نظمی معروف است. فیلو و یاگر در سال ۱۹۹۵ به بررسی ویژگی‌های این روش پرداختند. از جمله مدل‌های قابل توجه در این روش می‌توان به مدل می‌نیمم واریانس اشاره کرد که در سال ۲۰۰۳ توسط «فولر و ماجلندر[1]» جهت تعیین وزن‌ها ارائه شده است. اگرچه حل این دسته از مدل‌ها برای تعیین وزن‌ها، به عنوان روش کاربردی مورد توجه بوده است، اما مدل‌های مطرح شده دارای دو ضعف اساسی هستند. اولاً، مدل‌های مطرح شده تا این مرحله مدل‌های غیرخطی مقید هستند و حل اینگونه مسئله‌های بهینه‌سازی پیچیده است. ثانیاً، تعیین میزان یایی توسط تصمیم‌گیرنده همواره با مشکلاتی روبه‌رو است.

«ژو و دا[2]» در سال ۲۰۰۳ بدون استفاده از میزان یایی تعریف شده، با استفاده از اطلاعات متفاوتی از وزن‌ها به تعیین وزن‌ها پرداخته‌اند. ماجلندر در سال ۲۰۰۵ روش حداکثر بی‌نظمی «رنی[3]» را برای تعیین یک کلاس پارامتری از عملگرهای OWA و تعیین وزن‌های حداکثر بی‌نظمی رنی ارائه داد. قابل توجه است که، مدل‌های مطرح شده تا این مرحله غیرخطی هستند.

«وانگ و پارکان[4]» اولین مدل خی OWA را در سال ۲۰۰۵ مطرح کردند که به مدل می‌نیمم ماکسیمم فاصله معروف است. «لیو[5]» در سال ۲۰۰۷ نشان داد که روش می‌نیمم ماکسیمم فاصله با روش می‌نیمم واریانس معادل است. در روش‌های مطرح شده، وزن‌ها، عموماً از یک رابطه مانند تصاعد حسابی یا هندسی پیروی می‌کنند، که این ویژگی از معایب روش‌های مطرح شده است.

بنابراین، «امین و امروزنژاد[6]» در سال ۲۰۰۶ مدل می‌نیمم ماکسیمم فاصله را توسعه داده به‌طوری‌که وزن‌های حاصل از مدل توسعه‌یافته از تصاعد حسابی پیروی نمی‌کنند. بعلاوه از جمله مدل‌هایی که برای رفع این مشکل مطرح شده است، مدل‌هایی است که توسط «وانگ و همکاران[7]» برای تعیین وزن‌ها ارائه شده است. همچنین، یاگر در سال ۲۰۰۹ به بررسی برخی ویژگی‌های عملگر OWA پرداخته و برای تعیین وزن‌های مربوط به این عملگر از ماکسیمم می‌نیمم پراکندگی استفاده کرده و جواب بهینه متوسط را با استفاده از این دو حالت نهایی تعیین کرده است.

1) Fuller & Majlender 2) Xu & Da 3) Renyi 4) Wang & Parkan 5) Liu 6) Amin & Emrouznejad 7) Wang et.al.

۲-۲ ساخت فرمول مسئله تجمیع

مسئله «تصمیم‌گیری چند معیاره[1]» یکی از انواع مسائل تصمیم‌گیری است که در آن تمایل به اتخاذ یک تصمیم کلی براساس چند معیار مختلف داریم. بنابراین در مسئله تصمیم‌گیری چندمعیاره هدف، تجمیع[2] معیارها با یک «تابع تصمیم کلی[3]» است.

روش «میانگین وزن‌دار مرتب[4]» (OWA) با استفاده از عملگرهای تجمیع، به معرفی تابع تصمیم کلی می‌پردازد. رونالد یاگر در سال ۱۹۸۸ برای اولین بار روش OWA را پیشنهاد کرده است.

عملگر OWA، یک کلاس پارامتری از عملگرهای تجمیع را فراهم می‌کند. یک عملگر OWA از بعد n به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F : I^n \longrightarrow I, \qquad I = [۰, ۱]$$
$$F(a_۱(x), \dots, a_n(x)) = \sum_{j=۱}^{n} w_j b_j$$

به‌طوری‌که برای هر معیار a_i، $a_i(x) \in [۰, ۱]$ نشان دهنده درجه‌ای است که x، معیار iام را برآورده می‌کند. به‌علاوه، b_j بزرگ‌ترین مؤلفه از a_iها است که به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$b_۱ \geq b_۲ \geq \dots \geq b_n$$
$$b_۱ = \max\{a_۱(x), \dots, a_n(x)\}$$
$$b_۲ = \max\{\{a_۱(x), \dots, a_n(x)\} \backslash b_۱\}$$
$$b_۳ = \max\{\{a_۱(x), \dots, a_n(x)\} \backslash \{b_۱, b_۲\}\}$$
$$\vdots$$
$$b_n = \max\{\{a_۱(x), \dots, a_n(x)\} \backslash \{b_۱, \dots, b_{n-۱}\}\}$$

همچنین w_j مجموعه‌ای از وزن‌های عملگر OWA است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) $w_j \in [۰, ۱]$

۲) $\sum_{j=۱}^{n} w_j = ۱$

اگر ind را یک اندیس تعریف کنیم، به‌گونه‌ای‌که $\text{ind}(j)$، اندیس j بزرگ‌ترین مولفه از a_iها باشد یعنی

1) Multi Criteria Decision Making 2) Aggregation 3) Overall Decision Function 4) Ordered Weighted Averaging

$b_j = a_{\mathrm{ind}(j)}$ آنگاه می‌توان تابع F را به صورت زیر بیان کرد:

$$F(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j a_{\mathrm{ind}(j)}$$

قرار می‌دهیم $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ و این بردار را «بردار وزن OWA[1]» می‌نامیم. با استفاده از این بردار می‌توان تابع F را به صورت زیر بیان کرد:

$$F(a_1, \ldots, a_n) = \mathbf{w}\mathbf{B}^T$$

که در آن $\mathbf{B} = (b_1, \ldots, b_n)$. به بردار $\mathbf{B}$، بردار آرگومان OWA گفته می‌شود. تابع تصمیم کلی $D(x)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D(x) = F(a_1(x), \ldots, a_n(x))$$

به‌طوری‌که برای هر جواب x، $D(x) \in I$ نشان‌دهنده درجهٔ برآورد شدن کلیه معیارها توسط x باشد. می‌توان بیان کرد که تابع F دارای خواص «یکنوایی[2]» و «تقارن[3]» است.

خاصیت یکنوایی:

$$\forall j, \qquad a_j(x) \geq a_j(y) \Longrightarrow D(x) \geq D(y)$$

خاصیت مطرح شده به این معنی است که اگر x تک‌تک معیارها را با درجه‌ی بیشتری نسبت به y برآورده کند آن‌گاه، کلیه معیارها را با درجه‌ی رضایت‌مندی کلی بیشتری نسبت به y برآورده خواهد کرد.

خاصیت تقارن: به این معنی است که اهمیت یکسان معیارهای مختلف، امکان جابه‌جایی بین آرگومان‌ها را فراهم می‌کند. برای توضیح بیشتر فرض کنید، اگر $n = 4$، داریم:

$$F(a_1, a_2, a_3, a_4) = F(a_2, a_4, a_3, a_1)$$

یکی دیگر از موارد قابل توجه، رابطه‌ی متقابل بین معیارهاست که دو حالت مشخص نهایی برای آن مطرح شده است. اولین حالت مشخص نهایی، حالتی است که در آن تمایل به برآورده شدن همه معیارها داریم. یعنی در نظر داریم که x، کلیه معیارهای a_1، a_2،... و a_n را برآورده کند. در این حالت، برآورده شدن همه معیارها با خاصیت «وبودن[4]» انجام می‌پذیرد. حالت دیگر مشخص نهایی، حالتی است که تمایل داریم یکی از معیارها

1) OWA weight vector 2) Monotonicity 3) Symmetry 4) Anding

برآوده شود یعنی، در نظر داریم که x معیار a_1 یا a_2... یا a_n را برآورده کند. در این حالت، برآورده شدن یکی از معیارها با خاصیت «یا بودن[1]» انجام می‌پذیرد.

در دنیای واقعی، رابطه متقابل بین معیارها معمولاً از ۲ حالت مشخص مطرح شده پیروی نمی‌کنند. برای مثال، حالت‌هایی که در آن تمایل به برآورده شدن «بیشترین[2]» تعداد از معیارها یا «عده‌ای[3]» از معیارها یا «حداقل نیمی[4]» از معیارها و یا «بیشتر از چهار[5]» معیار را داریم، حالت‌هایی بین این دو حالت مشخص نهایی هستند.

اولین مفهوم اساسی که در OWA نقشی اساسی دارد، مفهوم «یایی[6]» است. در ادامه به تعریف و تفسیر این مفهوم پرداخته می‌شود. فرض کنید F یک عملگر OWA و $\mathbf{w}$ بردار وزن مربوط به این عملگر است، به‌گونه‌ای که $w_n = 1$ و $w_j = 0$ و $j \neq n$. در چنین شرایطی می‌توان گفت که F یک عملگر «و» خالص است. در این حالت وزن یک به بدترین جواب داده شده است. از طرف دیگر، عملگر «یا» خالص در شرایطی اتفاق می‌افتد که $w_1 = 1$، $w_j = 0$ و $j \neq 1$. در این حالت وزن یک به بهترین جواب داده می‌شود.

اندازه خوش‌بینی مربوط به بردار وزن $\mathbf{w}$ که اولین بار توسط یاگر مطرح شده است، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\alpha = \mathrm{Orness}(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j (n-j)/(n-1)$$

قابل توجه است که:

$$\mathrm{Orness}(\mathbf{w}^*) = 1, \qquad \mathrm{Orness}(\mathbf{w}_*) = 0, \qquad \mathrm{Orness}(\mathbf{w}_A) = 0/5$$

مفهوم یایی در OWA با نحوه توزیع وزن‌ها رابطه‌ای مستقیم دارد. به عبارت دیگر، میزان یایی، تعیین کننده‌ی نحوه‌ی توزیع وزن‌ها است. به عنوان مثال، اگر بردار وزن به گونه‌ای باشد که $w_1 = 1$ و $w_j = 0$، $j \neq 1$ آن‌گاه، $\mathrm{Orness}(\mathbf{w}^*) = 1$. همچنین اگر $w_n = 1$، $w_j = 0$ و $j \neq n$ آنگاه $\mathrm{Orness}(\mathbf{w}_*) = 0$ به‌علاوه، $\mathrm{Orness}(\mathbf{w}_A) = 0/5$.

از مطالب مطرح شده می‌توان نتیجه‌گیری کرد که درجه خوش‌بینی تصمیم‌گیرنده، همان مفهوم یایی است. همان‌طور که مطرح شد، برآورده شدن همه معیارها به کمک عملگری با خاصیت خالص «و بودن» و برآورده شدن یکی از معیارها به کمک عملگری با خاصیت خالص «یا بودن» تحقق می‌یابد. درحالی‌که، در دنیای واقعی گاهی تصمیم‌گیرنده نه تمایل به برآورده شدن همه معیارها و نه تمایل به برآورده شدن یکی از آن‌ها را دارد. عملگر

1) Oring 2) Most 3) Many 4) At least half 5) More than four 6) Orness