بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

رساله دوره دکتری(محض)

عنوان

نظریه دگردیسی و کاربرد آن در بازسازی خم‌های جبری و هموار ی فانکتورها

تدوین

علی بجروانی

استاد راهنما

دکتر آرش رستگار

استاد مشاور

دکتر علی ایرانمنش

بهمن‌ماه ۸۸

تقدیم به

پدر بزرگوار

و

روح پاک مادرم

و تقدیم به

همسرم

تقدیر و تشکر

بر خود لازم می‌دانم که در این مجال از آقای دکتر آرش رستگار که زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده داشتند تقدیر و تشکر کنم. از آقای دکتر ایرانمنش که زحمت مشاوره‌ی این رساله بر عهده ایشان بود، به خاطر حمایت‌های بی‌دریغشان کمال تشکر را دارم. از آقایان دکتر رحیم زارع‌نهندی و دکتر حسن حقیقی که زحمت مطالعه و داوری این رساله را تقبل فرمودند نهایت تشکر را دارم. همچنین از داوران داخلی آقای دکتر کاشانی، آقای دکتر حیدری و آقای دکتر رجایی که با سعه‌ی صدر زحمت مطالعه این رساله و داوری را بر عهده گرفتند سپاسگزارم.

نگارنده در این دوره‌ی تحصیلاتی به مدت شش ماه از فرصت مطالعاتی استفاده کرده است. بدین‌وسیله به خاطر حمایت‌های مادی و معنوی که در این دوره از طرف دانشگاه تربیت مدرس از این جانب صورت گرفته تشکر و قدردانی می‌کنم. فصل سوم رساله حاضر حاصل دوره‌ی مذکور می‌باشد. در این دوره‌ی مطالعاتی از مباحث ارزشمندی که با پروفسور ادواردو سرنزی داشتم استفاده‌ی زیادی کردم. در اینجا از زحمات دلسوزانه و مجدانه‌ای که ایشان برای این‌جانب کشیدند از صمیم قلب تشکر و قدردانی می‌کنم.

از خانواده‌ام که در طول تمام دوران تحصیلات همواره پشتیبانم بودند، مخصوصاً از همسرم سرکار خانم افسانه اسماعیل‌نژاد که در برابر هیچ مشکلی از حمایت و پشتیبانی اینجانب دریغ نکردند تشکر و سپاسگزاری می‌کنم.

همچنین از تمام دوستان عزیز و بزرگوارم مخصوصاً آقای سیدعلی موسوی و آقای دکتر شیرمحمدی که در تهیه‌ی نسخه الکترونیکی این رساله از هیچ‌گونه کمکی فروگذاری نکردند و نیز به خاطر تمام مباحث علمی که با هم داشتیم صمیمانه تشکر می‌کنم.

چکیده

در این رساله کران‌های بالا و پایینی برای درجه‌ی طرح تمرکز مرتبه‌ی دوم یک خم عمومی با گونای دلخواه g به‌دست می‌آوریم. همچنین حدس چندگونای‌تمرکز را برای خم‌های با گونای $g = ۶$ اثبات خواهیم کرد. این دو مطلب از نتیجه‌های اساسی این رساله هستند. با استفاده از این نتیجه‌ها، قضیه‌ای مشابه قضیه‌ی تارلی برای خم‌های عمومی با گونای ۶ ارائه می‌دهیم. در ادامه به بررسی هندسه‌ی چندگوناهای تمرکز برای خم‌های با گونای $g = ۸$ پرداخته و برای چنین خم‌هایی نیز قضیه‌ای مشابه قضیه‌ی تارلی بدست می‌آوریم. رساله را با ارائه پیشنهادهایی برای همواری تابعگون‌ها به پایان می‌بریم.

کلمات کلیدی. چندگوناهای تمرکز، خم عمومی، طرح تمرکز مرتبه‌ی دوم، تابعگون هموار، قضیه‌ی تارلی.

فهرست مطالب

مقدمه

در مرجع‌های [10] و [11] چیلیبرتو و سرنزی نشان دادند که می‌توان خم‌جبری هموار، متعارف و ناابربیضوی C با گونای g را از چندگوناهای بریل-نوتر آنها بدست آورد. آنها ثابت کردند که C^{1}_{g-1} خانواده‌ای از زیرفضاهای خطی $\mathbf{P}^{g-1}$ را پارامتری می‌کند که با اعمال تکنیکی موسوم به تکنیک تمرکز، می‌توان خم‌جبری C را از این خانواده به‌دست آورد. به‌طور مختصر این تکنیک عبارت است از در نظر گرفتن مکان هندسی نقاطی روی یک خانواده از چندگوناها که رتبه‌ی یک ریخت بین بافه‌های خاصی مقدار ماکسیمم نمی‌گیرد. به ازای عضوی عمومی از فضای پارامتر به‌کار برده شده در مرجع [11]، مکان تمرکز، یک خم نرمال و گویاست از درجه‌ی $g-3$ در یک زیرفضای از $\mathbf{P}^{g-1}$ است. اجتماع این خم‌ها یک زیر چندگونا از فضای تصویری $\mathbf{P}^{g-1}$ است که چندگونای تمرکز نامیده می‌شود. در مرجع [12] ثابت شده که به ازای خم‌های با گونای $g=5$ این چندگونا یک ابررویه از درجه‌ی ۴۰ است. از توصیفی که در مرجع مذکور برای این ابررویه ارائه می‌شود، مشخص می‌شود که این ابررویه یک مکان هندسی مهم شامل خم مد نظر است.

به ازای خم‌عمومی، ناابربیضوی و متعارف C با گونای دلخواه g، کران‌های بالا و پایینی برای درجه‌ی طرح تمرکز مرتبه‌ی دوم به‌دست می‌آوریم و ثابت می‌کنیم برای خم‌های با گونای $g=6$، کران بالای این نامساوی به‌دست می‌آید. همچنین ثابت می‌کنیم به‌ازای خم‌های عمومی با گونای $g=6$ چندگونای تمرکز یک ابررویه شامل خم C است. فصل دوم این رساله اختصاص به این مطالب دارد.

در فصل اول پیش‌نیازها ارائه می‌شود. از جمله نظریه‌ی بریل-نوتر، نظریه‌ی دگردیسی و مطالبی عمومی در مورد تکنیک تمرکز. نامساوی‌های به‌دست آمده برای درجه‌ی طرح تمرکز مرتبه‌ی دوم نتیجه‌ی اصلی این رساله در بخش اول از فصل دوم هستند. در بخش دوم از فصل دوم به ازای خم جبری عمومی، ناابربیضوی و متعارف C ثابت می‌کنیم بعد چندگونای تمرکز، تابع نیم پیوسته‌ی پایین به‌دست می‌دهد. با استفاده از این نتیجه و با ارائه‌ی مثالی از خم‌های با گونای $g=6$ که چندگونای تمرکز آنها ابررویه است، نشان می‌دهیم چندگونای تمرکز خم‌های عمومی با گونای ۶، یک ابررویه است. در ادامه مولفه‌هایی از چندگونای تمرکز را برای خم‌هایی خاص بررسی می‌کنیم. در بخش سوم از فصل دوم با استفاده از نتیجه‌های

قسمت‌های ۲.۱ و ۲.۲ بازسازیی برای خم‌های عمومی با گونای ۶ ارائه می‌کنیم. این بازسازی خم مورد نظر را به عنوان مولفه‌ای از طرح تمرکز مرتبه‌ی دوم به‌دست می‌دهد.

در ادامه‌ی کارهای [10] و [11] در مرجع [12]، به ازای خم عمومی با گونای فرد $g = ۲n + ۱$، چندگونای $C^{۱}_{n+۲}$ به عنوان فضای پارامتر استفاده شده است. مشابه این کار در فصل سوم، برای خم‌های با گونای زوج $g = ۲n$، از چندگونای $C^{۱}_{n+۲}$ به عنوان فضای پارامتر استفاده خواهیم کرد. ثابت می‌کنیم به ازای عنصر عمومی s از فضای پارامتر، چندگونای تمرکز یک چندگونای ۳ـبعدی است. نتیجه‌ی بررسی هندسه‌ی این چندگونا، بازسازیی برای خم‌های‌عمومی با گونای ۸ است، بدین منظور از صفحه‌های تمرکز استفاده می‌شود.

امروزه هندسه‌جبری ناجابجایی از شاخه‌های فعال ریاضی محض است. در این زمینه‌ی تحقیقاتی فضاهای مورد نظر عبارتند از رسته‌های آبلی و ریخت این فضاها عبارتند از تابعگون‌های بین آنها. با این ملاحظات سئوالی طبیعی این است که چطور می‌توان مفاهیم موجود در هندسه جبری جابجایی را در هندسه جبری ناجابجایی ارائه و بررسی کرد. یکی از مفاهیم موجود در هندسه جبری جابجایی مفهوم همواری مرفیسم‌هاست. این مفهوم به زبان‌های متفاوتی قابل بیان است به عنوان مثال با استفاده از خاصیت ترفیع برای ریخت‌های هموار بین طرح‌ها به عنوان زبانی جهانی، با استفاده از پروژکتیو بودن بافه‌ی مماسی به عنوان زبان جبری، و با استفاده از القا شدن ریختی روی فضاهای مماس به عنوان زبان هندسی.

در فصل آخر این رساله سعی می‌شود مفهومی مناسب برای همواری تابعگون‌ها ارائه کنیم. بدین منظور مفاهیمی پیشنهاد می‌شود. ویژگی‌های هندسی و جبری را، که انتظار می‌رود یک تابعگون هموار داشته باشد، مد نظر قرار می‌دهیم. ایده‌ی مفهوم اول از آنجا ناشی می‌شود که تقریب‌های خطی ابزار مناسبی برای بررسی فضا هستند در نتیجه تابعگون‌هایی که این تقریب‌ها را نگه دارند کاندیدای مناسبی برای همواری تابعگون‌ها هستند. دیدگاه‌های متفاوتی برای دگردیسی وجود دارند. مفهوم دوم پیشنهادی، از دیدگاه اشلسینگری مفهوم دگردیسی ناشی می‌شود. با استفاده از این مفهوم همواری، می‌توان ریختی هموار بین فضاهای مدولی به‌دست آورد. همچنین این مفهوم همواری، زبان‌جبری مناسبی برای دگردیسی همزمان به‌دست می‌دهد. ثابت می‌کنیم با استفاده از این مفهوم همواری حلقه‌های جهانی اشیاء متناظر در دو رسته‌ی متفاوت یکسان هستند. در این مفاهیم از نظریه‌ی‌دگردیسی به عنوان ابزاری اساسی استفاده

می‌شود.   مفهوم پیشنهادی سوم با الهام از یک قضیه‌ی بازسازی روزنبرگ، که از ایده‌های گروتندیگ ناشی می‌شود، ارائه خواهد شد.

مراجع ۳ و ۴ مقاله‌های مستخرج از این رساله هستند.

فصل اول

تکنیک تمرکز و بازسازی خم‌های جبری

در این فصل به بیان پیش‌نیازهایی در باره‌ی بازسازی خم‌های جبری با گونای ۶ و ۸ می‌پردازیم. بخصوص نظریه بریل-نوتر[1] متناظر با خم‌های متعارف، دگردیسی زیر فضاهای خطی یک فضای تصویری و مطالبی کلی در باره‌ی تکنیک تمرکز مطالب مورد تاکید ما در این فصل هستند. بجز اثبات لم ۱-۳ و اثبات قضیه ۱-۱۱، بقیه مطالب این فصل از مراجع موجود انتخاب شده‌اند که به مرجع‌های استفاده شده در جای خود اشاره می‌شود.

1) Brill-Noether

۱-۱ چندگوناهای بریل-نوتر خم‌های جبری متعارف

در سراسر این فصل فرض می‌کنیم، k میدان بسته‌ی جبری با مشخصه‌ی صفر است. همه‌ی چندگوناها روی چنین میدانی در نظرگرفته می‌شوند. همچنین همه‌ی خم‌ها هموار در نظرگرفته می‌شوند. توجه داریم که به ازای هر بافه‌ی معکوس‌پذیر روی چندگونای X می‌توان یک کلاف خطی (با مفهوم هندسه‌ی‌ریمانی) متناظرکرد و این تناظر دوسویی است. برای مطالعه‌ی این ساختار مرجع [24] را ببینید. با در نظرگرفتن این تناظر، در این رساله یک کلاف خطی روی خم C عبارت است از یک بافه‌ی معکوس‌پذیر روی C.

فرض کنید L کلاف خطی موثری از درجه‌ی d روی خم C باشد که فضای برداری برش‌های سراسری آن توسط $\sigma_۱, \cdots, \sigma_{r+۱}$ تولید شده باشد، به ازای چنین کلاف خطی، تابع ϕ_L با تعریف پایین یک نگاشت گویاست

$$\phi_L : U \subset C \quad \rightarrow \mathbf{P}^r$$

$$\phi_L(x) \ = \ (\sigma_۱(x), \cdots, \sigma_{r+۱}(x))$$

از تعریف ϕ_L به راحتی دیده می‌شود که این نگاشت در نقاطی از خم C تعریف نشده است که در آنها همه‌ی برش‌های σ_i صفر می‌شوند. از این مطلب نتیجه می‌شود که نگاشت ϕ_L وقتی می‌تواند به تمام خم C گسترش پیدا کند که مجموعه‌ی $B = \{x \in C : \sigma_۱(x) = \cdots = \sigma_{r+۱}(x) = ۰\}$ تهی باشد. این مطلب انگیزه‌ی تعریف پایین است.

تعریف ۱-۱ با نمادهای بالا نقطه‌ی $x \in C$ یک نقطه‌ی ثابت کلاف خطی L گفته می‌شود هرگاه داشته باشیم: $\sigma_۱(x) = \cdots = \sigma_{r+۱}(x) = ۰$.

کلاف خطی L آزاد از نقطه‌ی ثابت گفته می‌شود هر گاه داشته باشیم

$$B_L = \{x \in C : \sigma_۱(x) = \cdots = \sigma_{r+۱}(x) = ۰\} = \emptyset$$

بدیهی است که اگر $B_L = \emptyset$، آنگاه نگاشت ϕ_L در تمام نقاط C تعریف شده است.

لم ۱-۱ فرض کنید C خمی با گونای $g \geq ۲$ و ω_C کلاف خطی متعارف C باشد، آنگاه کلاف خطی ω_C آزاد از نقطه‌ی ثابت است.

برهان. لم ۵.۱ از فصل ۴ در مرجع [24] را ببینید. $\square$

تعریف ۱-۲ خم جبری C ابر بیضوی گفته می‌شود هرگاه یک ریخت درجه‌ی ۲ از C به $\mathbf{P}^۱$ موجود باشد.

گزاره ۱-۱ فرض کنید C خمی با گونای $g \geq ۲$ باشد. نگاشت

$$\phi_{\omega_C} : C \to \mathbf{P}^{g-۱}$$

نشاننده‌ی بسته است اگر و تنها اگر C خم ابر بیضوی نباشد.

برهان. گزاره‌ی ۵.۲ از فصل ۴ در مرجع [24] را ببینید. $\square$

ریخت ϕ_{ω_C} در گزاره‌ی بالا، ریخت متعارف گفته می‌شود. خم جبری C با گونای $g \geq ۲$ خم متعارف گفته می‌شود هرگاه توسط کلاف خطی متعارف خود در فضای تصویری متعارف خود، $\mathbf{P}^{g-۱}$، نشانده شده باشد. مجموعه‌ی همه‌ی خم‌های جبری با گونای g تشکیل یک چندگونای جبری می‌دهد که بعد آن برای $g \geq ۲$ برابر $۳g - ۳$ است. این چندگونا را فضای مدولی خم‌های با گونای g می‌نامند و با نماد $\mathbf{M}_g$ نمایش می‌دهند. خم C را خم عمومی گویند هرگاه در یک زیرمجموعه‌ی باز فضای مدولی $\mathbf{M}_g$ تغییر کند. فرض کنید C خم‌جبری با گونای g باشد. dـامین ضرب متقارن C را با C_d نشان می‌دهیم، که یک چندگونای جبری هموار d بعدی است. این چندگونا در واقع چندگونای خارج‌قسمتی چندگونای $\underbrace{C \times C \times \cdots \times C}_{d-times}$ است که گروه متقارن σ_d بر آن با تغییر اندیس‌ها عمل می‌کند. می‌توان C_d را به عنوان فضای مدولی مقسم‌های موثر با درجه‌ی d در نظر گرفت. کلاف خطی L از درجه d، که بعد فضای برش‌های سراسری آن برابر $r + ۱$ باشد، با نماد g^r_d نشان داده می‌شود. کلاس یکریختی بافه‌های معکوس‌پذیر(کلاف‌های خطی) روی خم Cبا عمل $\otimes$ تشکیل یک گروه می‌دهد که با نماد $\mathrm{Pic}(C)$ نشان داده می‌شود. این گروه تجزیه‌ای به شکل پایین دارد.

$$\mathrm{Pic}(C) = \oplus_n \mathrm{Pic}^n(C)$$

که در آن $\mathrm{Pic}^n(C)$ عبارت است از تمام کلاف‌های خطی درجه‌ی n روی C. همچنین توجه داریم که زیر مجموعه‌ی $\mathrm{Pic}^{\circ}(C)$ یک زیر گروه از $\mathrm{Pic}(C)$ است. به ازای کلاف‌خطی $M \in \mathrm{Pic}^n(C)$، نگاشت

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Pic}^{\circ}(C) & \to & \mathrm{Pic}^n(C) \\ L & \mapsto & L \otimes M \end{array}$$

یک نگاشت دوسویی است. ثابت می‌شود که زیر گروه $\mathrm{Pic}^{\circ}(C)$، همچنین $\mathrm{Pic}^n(C)$، یک چندگونای هموار تحویل‌ناپذیر تصویری با بعد $g = g(C)$ است و نگاشت بالا یکریختی بین چندگوناهاست. برای ملاحظه‌ی اثبات این مطلب مرجع [3] را ببینید. چندگونای $\mathrm{Pic}^{\circ}(C)$ ژاکوبی خم C نامیده می‌شود و با نماد $\mathrm{J}(C)$ نشان داده می‌شود. با توجه به دلایل تکنیکی، از جمله راحتی استفاده از قضیه‌ی ریمان-رخ، معمولا $\mathrm{Pic}^{g-1}(C)$ را به عنوان ژاکوبی خم C، با استفاده از یکریختی بالا، در نظر می‌گیرند. برای خم‌های با گونای پایین، ژاکوبی آن را می‌توان با روش‌های مقدماتی تعیین کرد.

در حالت $g = 0$ خم C یکریخت با خم $\mathbf{P}^1$ است و با توجه به اینکه هرکلاف خطی از درجه‌ی n یکریخت کلاف خطی $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(n)$ است نتیجه می‌شود $\mathrm{J}(C)$ تک‌عضوی است.

در حالت $g = 1$ چندگونای $\mathrm{J}(C)$ یک خم است. به ازای نقطه‌ی $p_\circ \in C$ ریخت بین خمهای

$$\begin{array}{rcl} C & \to & \mathrm{Pic}^{\circ}(C) \\ p & \mapsto & \mathcal{O}(p - p_\circ) \end{array}$$

را در نظر می‌گیریم. این ریخت ثابت نیست چون در صورت ثابت بودن این ریخت نتیجه می‌شود که خم C یکریخت با $\mathbf{P}^1$ است که یک تناقض است، بنابراین ریخت بالا، ریختی پوشاست. همچنین از یک‌به‌یک نبودن این ریخت نتیجه می‌شود که روی خم C نقاطی مثل p و q وجود دارند که به عنوان بخشیاب معادل هستند. از این مطلب نتیجه می‌شود خم C یکریخت با $\mathbf{P}^1$ است که یک تناقض است. بنابراین نتیجه می‌شود $C \cong Pic^{\circ}(C) = \mathrm{J}(C)$.

همه‌ی مقسم‌های با درجه‌ی d که بعد فضای برش‌های سراسری آنها ناکمتر از $r + 1$ باشد، تشکیل یک

طرح می‌دهند. این طرح را با نماد C_d^r نشان می‌دهیم. به‌طور مشابه مجموعه‌ی

$$W_d^r = L \in W_d : h^0(L) \geq r+1\}$$

تشکیل طرح می‌دهد. همچنین قرار می‌دهیم $C_d^0 = C_d$ و $W_d^0 = W_d$.

به ازای خم جبری C با گونای g، چندگونای $W_{g-1} \subset \mathrm{Pic}^{g-1}(C)$، ساختار یک بخشیاب دارد که بخشیاب تیتای خم C گفته می‌شود. همچنین بدیهی است که $W_d^{r+1} \subset W_d^r$. در حالت کلی طرح‌های W_d^r و C_d^r تحویل‌پذیر و کاهیده هستند پس چندگونا نیستند. برای مطالعه‌ی بیشتر در مورد این طرح‌ها و ساختار آنها و همچنین برای جزئیات مثال پایین به مرجع [3] مراجعه شود.

مثال ۱-۱ فرض کنید C خم جبری هموار با گونای g باشد که g_3^1 داشته باشد. در این صورت، W_{g-1}^1 دارای دو مولفه است. عضو عمومی یکی ازمولفه‌ها به شکل

$$P + Q + R + P_1 + \cdots + P_{g-4}$$

است، که در آن $P+Q+R \in g_3^1$ و $P_1, \ldots, P_{g-4}$ عضوهای دلخواهی از خم C هستند.

به ازای کلاف خطی L، نگاشت

$$\mu_L : H^0(L) \otimes H^0(KL^{-1}) \to H^0(K)$$

$$\alpha \otimes \beta \quad \mapsto \quad \alpha \times \beta$$

به نگاشت پتری [2] معروف است. با استفاده از لم زیر می‌توان هسته‌ی این تبدیل خطی از فضاهای برداری را به دست آورد. این لم تکنیک آزاد از نقطه‌ی ثابت گفته می‌شود.

لم ۱-۲ فرض کنید L بافه‌ی معکوس‌پذیر و $\mathcal{F}$ بافه‌ی آزاد از تاب $\mathcal{O}_C$-مدولی روی خم C باشند. همچنین فرض کنید s_1 و s_2 برش‌های سراسری مستقل خطی از L بوده و $V \subset H^0(C, L)$ زیر فضای برداری تولید شده توسط این برش‌ها باشد. آنگاه هسته‌ی تبدیل خطی تعریف شده‌ی پایین

$$V \otimes H^0(C, \mathcal{F}) \to H^0(C, \mathcal{F} \otimes L)$$

2) Petri Map

که با ضرب برش‌های سراسری تعریف می‌شود با فضای برداری $H^{0}(C, \mathcal{F} \otimes L^{-1}(B))$ یکریخت است که در آن B مکان هندسی نقاط ثابت سری خطی ۱-بعدی تولید شده توسط برش‌های s_1 و s_2 است.

برهان. فصل سوم مرجع [3] را ببینید. $\square$

نگاشت پایین

$$\alpha_d : C_d \to W_d$$

که هر بخشیاب D را به کلاف خطی متناظرش می‌نگارد نگاشت آبل-ژاکوبی گفته می‌شود. به ازای کلاف خطی $L = \alpha_d(D) \in W_d$، تار نگاشت آبل-ژاکوبی روی نقطه‌ی L عبارت است از سری خطی $| D |$ که یک فضای تصویری، بنابراین همبند، است. به راحتی می‌توان دید که تساوی $W_d = \alpha_d(C_d)$ برقرار است.

به ازای $d \geq g$ از قضیه‌ی ریمان-رخ نتیجه می‌شود، نگاشت آبل-ژاکوبی پوشاست. در واقع به ازای هر کلاف خطی L از قضیه‌ی ریمان-رخ نتیجه می‌شود

$$h^{0}(L) = h^{0}(KL^{-1}) + d - g + 1 \geq 1$$

نامساوی بالا نشان می‌دهد که کلاف خطی L، حداقل یک برش سراسری دارد. حال به راحتی ثابت می‌شود که بخش‌یاب متناضر به هر برش سراسری L، توسط نگاشت آبل-ژاکوبی به کلاف خطی L نگاشته می‌شود، که پوشا بودن نگاشت آبل-ژاکوبی از آن به دست می‌آید.

تحدید نگاشت آبل-ژاکوبی به طرح C_d^r را با نماد α_d^r نشان می‌دهیم. به ازای خم جبری دلخواه C، ویژگی‌های هندسی و جبری نگاشت α_d و طرح‌های C_d^r و W_d^r، از جمله پیدا کردن بعد C_d^r و W_d^r، برای مدت بیشتر از یک قرن مسائل باز بودند. در این زمینه قضیه‌های پایین در دهه‌ی هشتاد به اثبات رسیده‌است.

قضیه ۱-۲ فرض کنید C خم هموار با گونای g باشد. همچنین فرض کنید d و r عددهای صحیح با

شرط $r \geq ۰$ و $d \geq ۱$ باشند، آنگاه $W_d^r \neq \emptyset$ هرگاه

$$\begin{aligned}\rho = \rho(g,d,r) &:= g - (r+۱)(g-d+r)\\ &= \dim H^{۰}(K) - \dim H^{۰}(L)\dim H^{۰}(KL^{-۱}) \geq ۰\end{aligned}$$

عدد صحیح ρ به عدد بریل‌ـنوتر[3] معروف است. توجه داریم که اگر نگاشت پتری متناظر به کلاف خطی L یک‌به‌یک باشد آنگاه عدد بریل-نوتر برابر بعد زیر فضای برداری عمود بر تصویر نگاشت پتری در فضای برداری $H^{۰}(C,K)$ است.

علاقمندان می‌توانند اثبات کامل این قضیه و قضیه‌های ۱-۳ و ۱-۴ را در مرجع‌های [3] و [4] ببینند.

قضیه ۱-۳ فرض کنید C، d و r مانند قضیه قبل باشند و $\rho \geq ۱$، آنگاه W_d^r همبند است.

با توجه به اینکه تارهای نگاشت آبل‌ـژاکوبی همبند هستند از قضیه‌ی ۱-۳ نتیجه می‌شود C_d^r نیز چندگونای همبند است.

قضیه ۱-۴ فرض کنید C خمی هموار و عمومی با گونای g باشد. همچنین عددهای صحیح r و d چنان باشند که $\rho(g,d,r) = g-(r+۱)(g-d+r) \geq ۰$. آنگاه W_d^r و C_d^r چندگوناهای هموار با بعد ρ و $\rho + r$ هستند.

نتیجه‌های ۱-۱ و ۱-۲ از قضیه‌ی بالا بدست می‌آید. تعریف‌های پایین در بیان این نتیجه‌ها لازم خواهند بود.

تعریف ۱-۳ فرض کنید D بخشیابی روی خم C باشد. سری خطی $\mid D \mid$ را ترکیبی گویند هرگاه بخشیاب‌های $D_۱$ و $D_۲$ روی C موجود باشند به طوری که

$$\begin{aligned}\dim(\mid D_۱ \mid) + \dim(\mid D_۲ \mid) &= \dim(\mid D \mid)\\ \deg(D_۱) + \deg(D_۲) &= \deg(D)\end{aligned}$$

3) Brill-Noether number

تعریف ۱-۴ فرض کنید D بخشیابی روی خم C به شکل $p_1 + \cdots + p_r$ باشد. محمل بخشیاب D، که با نماد $\mathrm{Supp}(D)$ نشان داده می‌شود، عبارت است از مجموعه‌ی $\{p_1, \cdots, p_r\}$. نقطه‌ی $p \in C$ را یک نقطه‌ی ثابت سری خطی $\mid D \mid$ گویند هرگاه $p \in \bigcap_{D_\lambda \in |D|} \mathrm{Supp}(D_\lambda)$. سری خطی $\mid D \mid$ را آزاد از نقطه‌ی ثابت (بدون نقطه‌ی ثابت) گویند هرگاه اشتراک مذکور تهی باشد.

نتیجه ۱-۱ به ازای هر عنصر عمومی $D \in C_d^r$، بعد سری خطی $|D|$ برابر r است.

برهان. به برهان خلف، فرض کنید به ازای عنصر عمومی $D \in C_d^r$ و به ازای عدد صحیح $\delta \geq 1$ تساوی $\dim(|D|) = r + \delta$ برقرار باشد. تساوی مذکور به سهولت تساوی $\dim(C_d^{r+\delta}) = \dim(C_d^r)$ را نتیجه می‌دهد که این نیز به نوبه خود تساوی

$$\dim W_d^r - \dim W_d^{r+\delta} = \delta$$

را به دست خواهد داد. حال با استفاده از قضیه‌ی ۱-۴ تساوی‌های پایین به راحتی به دست می‌آید

$$\begin{aligned}\dim W^{r+\delta} &= g - (r+\delta+1)(g-d+r+\delta) \\ &= g - (r+1)(g-d+r) - \delta(g-d+2r+1+\delta).\end{aligned}$$

با مقایسه دو تساوی فوق نتیجه می‌شود $\delta = \delta(g-d+2r+1+\delta)$. این تساوی فقط وقتی امکانپذیر است که $g-(d-2r)+1+\delta = 1$، واین تساوی به نوبه خود معادل است با این که $g-(d-2r)+\delta = 0$. اما با استفاده از قضیه ریمان-رخ نتیجه می‌شود $g-(d-2r) > 0$، که نشان می‌دهد تساوی فوق امکانپذیر نیست. □

نتیجه ۱-۲ فرض کنید به ازای کلاف خطی عمومی L در W_d^r، بخش‌یاب $D \in C_d^r$ طوری باشد که $\alpha_d^r(D) = L$. در این صورت سری خطی $|D|$ ترکیبی نیست. بویژه سری خطی $|D|$ آزاد از نقطه‌ی ثابت است.

برهان. به ازای اعداد نامنفی $d_۱$، $d_۲$، $r_۱$ و $r_۲$ صادق در روابط $d_۱ + d_۲ = d$ و $r = r_۱ + r_۲$ نامساوی پایین که از قضیه‌ی ۱-۴ حاصل می‌شود، نتیجه می‌دهد که بعد سری‌های خطی ترکیبی از بعد W_d^r کمتر است، و این بدان معنی است که عنصر عمومی W_d^r ترکیبی نیست.

$$\begin{aligned}\dim W_{d_۱}^{r_۱} + \dim W_{d_۲}^{r_۲} &= g - (r_۱ + ۱)(g - d_۱ + r_۱) + g - (r_۲ + ۱)(g - d_۲ + r_۲) \\ &= g - (r + ۱)(g - d + r) - r_۱(d_۲ - r_۲) - r_۲(d_۱ - r_۱) < \dim W_d^r\end{aligned}$$

با انتخاب $r_۱ = ۰$ نتیجه می‌شود عضو عمومی C_d^r بدون نقطه‌ی ثابت است. □

قضیه‌ی تکینی ریمان چندگانگی چندگونای W_d را در نقطه‌ی L مشخص می‌کند، بویژه اینکه نتیجه می‌شود

$$\mathrm{Sing}(W_{g-۱}) = \mathrm{Sing}(\Theta_C) \subseteq W_{g-۱}^{۱}.$$

که در آن Θ_C بخشیاب تیتای خم C است. برای خم‌های جبری عمومی، شمول مذکور به تساوی تبدیل می‌شود. همچنین قضیه‌ی ۱-۵، که تعمیم کمف[۴] از قضیه‌ی ریمان است، مخروط مماسی تصویری چندگونای W_d^r را در نقطه‌ی L، به عنوان اجتماع زیر فضاهای خطی تولید شده توسط بخشیاب‌های واقع در سری خطی $|D|$، تشریح می‌کند.

تعریف ۱-۵ فرض کنید $D = p_۱ + \cdots + p_r$ بخشیاب موثری روی خم C باشد. زیرفضای خطی تولید شده توسط بخشیاب D، که با نماد $\langle D\rangle$ نشان داده می‌شود، عبارت است از اشتراک تمام ابرصفحه‌هایی که شامل خم C هستند و یا اشتراک آنها با خم C شامل نقاط $p_۱, \cdots, p_r$ است. اگر D بخشیابی از درجه‌ی d و بعد برش‌های سراسری r باشد، شکل هندسی قضیه‌ی ریمان-رخ بیان می‌کند

$$\dim\langle D\rangle = d - r - ۱$$

قضیه ۱-۵ فرض کنید $|D|$ سری خطی با درجه‌ی d و بعد برش‌های سراسری برابر r باشد، آنگاه

$$\mathbf{P}T_{\mu(D)}(W_d) = \bigcup_{D_\lambda \in |D|} \langle D_\lambda\rangle.$$

4) G. Kempf

از قضیه‌ی کمف‌ـریمان و شکل هندسی قضیه‌ی ریمان‌ـرخ نتیجه می‌شود مخروط مماسی W_d^r در نقطه‌ی L عبارت است از فضای تصویری فضای برداری عمود بر تصویر نگاشت پتری. از این ملاحظات نتیجه می‌شود قضیه‌ی ۱-۴ معادل است با این که، به ازای عضو عمومی L از W_d^r نگاشت پتری متناظر به L یک‌به‌یک است. برای مطالعه‌ی جزئیات این مطالب مرجع [3] را ببینید.

۱-۲ دگردیسی زیر فضاهای‌خطی فضای‌تصویری

یکی از ایده‌های مهمی که در فصل بعد از آن استفاده می‌شود، ارتباطی است که بین بخشیاب‌های موثر روی یک خم متعارف از یک طرف و از طرف دیگر ریخت‌های ۱ـجنریک که بر زیرفضاهای خطی خاصی از $\mathbf{P}^{g-1}$ تعریف می‌شوند، برقرار است. این ارتباط توسط دگردیسی‌های فضاهای خطی مذکور قابل بیان است. در این قسمت به بیان مطالبی در باره‌ی دگردیسی چندگوناها و طرح‌های جبری می‌پردازیم.

تعریف ۱-۶ طرح جبری X را در نظر بگیرید. یک دگردیسی از X روی طرح همبند S عبارت است از طرحی مثل χ که دیاگرام پایین

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \chi \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathrm{Spec}(k) & \longrightarrow & S \end{array}$$

که در آن π ریخت یکدست است، تعویض‌پذیر بوده و داشته باشیم $\mathrm{Spec}(k) \times_S \chi = X$.

در حالت $S = \mathrm{Spec}(k[\varepsilon])$، طرح χ را یک دگردیسی مرتبه اول X گوییم.

فرض کنید $Y \subseteq X$ یک زیرطرح بسته از طرح X باشد. یک دگردیسی از Y روی طرح همبند S به عنوان یک زیرطرح X، عبارت است از یک زیرطرح $\Sigma \subset X \times S$، که دیاگرام پایین تعویض‌پذیر، ریخت π یکدست بوده و داشته باشیم $\mathrm{Spec}(k) \times_S \Sigma = Y$.

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \Sigma \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathrm{Spec}(k) & \longrightarrow & S \end{array}$$