



دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد آمار ریاضی

# پیش بینی در آزمون های فشار-مرحله ای

استاد راهنما  
دکتر مصطفی رزمخواه

استاد مشاور  
دکتر جعفر احمدی

نگارنده  
امینه صادق پور

آبان ماه ۱۳۹۱





خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری. خدایا چنین زیستن را تو به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم دانست... در آغاز وظیفه خود می‌دانم مراتب سپاس‌گزاری خود را از جناب آقای دکتر مصطفی رزمخواه، استادیار گروه آمار دانشگاه فردوسی مشهد که زحمات فراوانی در امر تدوین پایان‌نامه برعهده داشته‌اند که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید، ابراز دارم. از جناب آقای دکتر جعفر احمدی، استاد گروه آمار دانشگاه فردوسی مشهد که زحمت مشاوره و مطالعه این پایان‌نامه را تقبل نمودند کمال امتنان و تشکر را دارم. از جناب آقای دکتر عبدالحمید رضایی رکن‌آبادی دانشیار گروه آمار دانشگاه فردوسی مشهد و جناب آقای دکتر مهدی دوست‌پرست، استادیار گروه آمار دانشگاه فردوسی مشهد که داوری پایان‌نامه را برعهده داشته‌اند و از راهنمایی‌های خود اینجانب را بهره‌مند ساخته‌اند تقدیر و تشکر می‌کنم. همچنین از سرکار خانم دکتر برات‌پور، مدیریت گروه آمار و سایر اساتید محترم این گروه نیز تشکر و قدردانی می‌نمایم. در پایان از خانواده عزیزم به خصوص پدر و مادرم و تمامی دوستانم که با عاطفه سرشار بهترین پشتیبان من بودند از صمیم قلب تشکر می‌نمایم.

## پیش‌گفتار

با پیشرفت تکنولوژی، روزانه محصولات با کیفیت‌تری نسبت به گذشته روانه بازار می‌شود، به طوری که در اکثر موارد دستیابی به متوسط طول عمر یک محصول تحت شرایط عادی غیرممکن می‌باشد. بنابراین با طرح آزمون‌های طول عمر تسریع یافته این امکان به محقق داده می‌شود که نتایج خود را بسیار سریع‌تر از شرایط عادی به دست آورد. آزمون‌های طول عمر تسریع یافته به دو دسته کلی آزمون با فشار ثابت و آزمون فشار-مرحله‌ای تقسیم می‌شود. در این پایان‌نامه مسأله پیش‌بینی یک نمونه‌ای و دو نمونه‌ای در آزمون‌های فشار-مرحله‌ای مورد بررسی واقع شده‌است و در نهایت مطالب جمع‌آوری شده در مجموعه‌ای شامل چهار فصل دسته‌بندی و تدوین شده که خلاصه‌ای از آن‌ها در زیر آمده‌است.

• در فصل اول، مقدمات و مطالبی که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند، بیان شده‌است. خلاصه‌ای از آماره‌های مرتب و کاربرد آن‌ها به دلیل نقش به‌سزایی که در مطالعات طول عمر و تحلیل داده‌های قابلیت اعتماد دارند ارائه شده است. در ادامه به معرفی آزمون‌های طول عمر تسریع یافته پرداخته شده‌است و تاریخچه مختصری از پژوهشگرانی که در این زمینه تحقیق نموده‌اند، آورده شده‌است. از آنجایی که در آزمایشات طول عمر اغلب به دلیل عواملی از قبیل زمان، امکان شرکت دادن تمام واحدها در آزمایش وجود ندارد، از روش سانسور کردن استفاده می‌کنیم که در این فصل دو نوع سانسور که در این مجموعه استفاده شده‌است معرفی و برتری آن‌ها نسبت به یکدیگر مورد بررسی واقع شده‌است. همچنین برخی ویژگی‌های برآوردگرهای درست‌نمایی ماکسیم نیز بیان و در پایان این فصل به اهمیت پیش‌بینی در مسائل طول عمر پرداخته شده‌است.

• در فصل دوم، یکی از مفاهیم مهم در آزمون‌های فشار-مرحله‌ای یعنی مدل نمایش تجمعی در حالت کلی بررسی شده است و برای تفهیم بیشتر، این مدل تحت آزمون فشار-مرحله‌ای ساده به تفصیل بیان شده‌است.

• در فصل سوم، پیش‌بینی در مدل‌های فشار-مرحله‌ای براساس سانسور نوع دو مورد بررسی واقع شده است. هدف این فصل پیدا کردن فاصله پیش‌بینی برای طول عمر، تحت فشار پایه و همچنین مشاهده آینده از آزمون فشار-مرحله‌ای می‌باشد. فرض بر این است که طول عمر واحدهای آزمایشی در هر مرحله از آزمون فشار-مرحله‌ای از توزیع نمایی با میانگین  $\theta_i$  پیروی می‌کنند. در این فصل نتایج براساس حالت خاصی که  $\theta$  تابع لگاریتم خطی از فشار باشد نیز مورد بررسی قرار گرفته‌است و با در نظر گرفتن حالت مجهول پارامترهای جامعه

و جایگذاری مقادیر برآورد شده این پارامترها با استفاده از روش برآورد درستنمایی ماکسیمم، بازه‌های پیش‌بینی برای متغیرهای مورد نظر با سطح پوشش مورد انتظار محاسبه شده‌اند. در نهایت نتایج شبیه‌سازی با نرم افزار  $R$  ارائه و مورد بحث واقع شده‌است.

• در فصل چهارم پیش‌بینی در آزمون‌های فشار-مرحله‌ای ساده تحت سانسور فزاینده نوع دو مورد بررسی قرار گرفته‌است. پیش‌بینی یک نمونه‌ای با پیدا کردن بازه پیش‌بینی برای مشاهدات طول عمر تحت فشار پایه و پیش‌بینی دو نمونه‌ای با پیدا کردن بازه پیش‌بینی برای مشاهده بعدی از آزمون فشار-مرحله‌ای زمانی که  $k$  شکست رخ داده باشد، مورد بحث و بررسی واقع شده‌است. در این فصل نیز همانند فصل سوم به بررسی حالت مجهول پارامتر  $\theta$  و حالت خاص آن یعنی زمانی که  $\theta$  تابع لگاریتم خطی از فشار است نیز پرداخته‌ایم و در آخر نتایج شبیه‌سازی ارائه و تحلیل‌های لازم صورت گرفته‌است.

به علت حجم زیاد برنامه‌های استفاده شده در این پایان‌نامه و جلوگیری از ازدیاد صفحات، یک نمونه از کدهای برنامه نویسی نرم افزار  $R$  در ضمیمه (ب) آورده شده‌است و سایر موارد نزد گردآورنده محفوظ می‌باشند. لذا در صورت تمایل، خوانندگان گرامی پایان‌نامه می‌توانند با آدرس زیر تماس حاصل فرمایند.

sadeghpour.amineh@yahoo.com

امینه صادق‌پور

آبان ماه ۱۳۹۱

گروه آمار دانشگاه فردوسی مشهد

## مقاله‌های مستخرج از پایان نامه:

۱. پیش‌بینی فاصله‌ای در آزمون‌های فشار-مرحله‌ای تحت سانسور نوع دو، سومین کارگاه آموزشی قابلیت اعتماد و کاربرد آن، دانشگاه فردوسی مشهد، تیرماه ۱۳۹۱
۲. پیش‌بینی در آزمون‌های فشار-مرحله‌ای برای طول عمر نمایی، یازدهمین کنفرانس آمار ایران، دانشگاه علم و صنعت ایران، شهریور ماه ۱۳۹۱

## نمادها

$T_i$	طول عمر $i$ امین مؤلفه
$t_i$	مقدار مشاهده $i$ امین مؤلفه
$T_{(r)}$	$r$ امین آماره مرتب
$T_{r:m:n}^{\tilde{R}}$	$r$ امین آماره مرتب سانسور فزاینده نوع دو از راست با $m$ شکست در نمونه‌ای به حجم $n$ با طرح سانسور $\tilde{R}$
$f_{\theta}(t)$	تابع چگالی احتمال
$F_{\theta}(t)$	تابع توزیع احتمال
$f_{T_{(r)};\theta}(t)$	تابع چگالی احتمال $r$ امین آماره مرتب
$f_{T_{r:m:n};\theta}(t)$	تابع چگالی احتمال $r$ امین آماره مرتب سانسور فزاینده نوع دو
$R_{\theta}(t) = 1 - F_{\theta}(t)$	تابع بقا
$L(\theta)$	تابع درست‌نمایی $\theta$
$\hat{\theta}$	برآوردگر درست‌نمایی ماکسیمم $\theta$
$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$	تابع گامای کامل
$\beta(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$	تابع بتای کامل



# فهرست مطالب

۱	تعاریف و مقدمات	۱
۲	۱.۱ مقدمه	۱.۱
۲	۲.۱ آماره‌های مرتب	۲.۱
۲	۱.۲.۱ کاربرد آماره‌های مرتب	۱.۲.۱
۵	۳.۱ آزمون‌های طول عمر تسریع یافته	۳.۱
۵	۱.۳.۱ مقدمه	۱.۳.۱
۷	۲.۳.۱ مدل‌های $AL$	۲.۳.۱
۱۰	۳.۳.۱ مفاهیم و کاربرد	۳.۳.۱
۱۰	۴.۱ سانسور	۴.۱
۱۲	۱.۴.۱ سانسور نوع دو	۱.۴.۱
۱۲	۲.۴.۱ سانسور فزاینده	۲.۴.۱
۱۴	۳.۴.۱ برتری سانسور فزاینده به سانسور نوع دو	۳.۴.۱
۱۵	۵.۱ روش درست‌نمایی ماکسیمم	۵.۱
۱۶	۶.۱ پیش‌بینی	۶.۱
۱۸	۲ مدل نمایش تجمعی	۲
۱۹	۱.۲ مقدمه	۱.۲
۱۹	۲.۲ توزیع‌های طول عمر نمایی	۲.۲
۲۲	۳.۲ توصیف مدل نمایش تجمعی	۳.۲
۲۷	۳ پیش‌بینی در آزمون‌های فشار-مرحله‌ای براساس سانسور نوع دو	۳

۲۸	.....	مقدمه	۱.۳
۲۹	.....	بازه پیش‌بینی برای طول عمر تحت فشار پایه زمانی که پارامترهای مدل معلوم‌اند	۲.۳
۳۰	.....	بازه پیش‌بینی برای $T_{(i)}$	۱.۲.۳
۳۲	.....	بازه پیش‌بینی برای $\bar{T}$	۲.۲.۳
		بازه پیش‌بینی برای طول عمر آینده از آزمون فشار-مرحله‌ای زمانی که پارامترهای مدل معلوم‌اند	۳.۳
۳۳	.....	معلوم‌اند	
۳۳	.....	روش تابع چگالی لاولس	۱.۳.۳
۳۹	.....	روش تابع چگالی لینگاپا	۲.۳.۳
۴۳	.....	بازه پیش‌بینی زمانی که پارامترهای مدل مجهول می‌باشند	۴.۳
۴۷	.....	برآورد درستمایی ماکسیم	۵.۳
۴۷	.....	برآورد پارامترها در حالت کلی	۱.۵.۳
۴۹	.....	برآورد پارامترها در حالتی که $\theta$ تابع لگاریتم خطی از فشار باشد	۲.۵.۳
۵۲	.....	نتایج شبیه‌سازی	۶.۳
۵۲	.....	شبیه‌سازی براساس پارامترهای $\alpha$ و $\beta$	۱.۶.۳
۵۳	.....	شبیه‌سازی براساس پارامتر $\theta$	۲.۶.۳
۵۶	.....	نتیجه‌گیری	۷.۳
۵۷		پیش‌بینی در آزمون‌های فشار-مرحله‌ای براساس سانسور فزاینده نوع دو	۴
۵۸	.....	مقدمه	۱.۴
۵۸	.....	نتایج مقدماتی	۲.۴
۵۹	.....	تابع چگالی احتمال	۱.۲.۴
۶۱	.....	خواص شرطی	۲.۲.۴
۶۲	.....	سانسور فزاینده نوع دو در آزمون فشار مرحله‌ای	۳.۴
۶۷	.....	برآورد پارامترها	۴.۴
۶۸	.....	بازه پیش‌بینی برای $T_{(i)}$	۵.۴
۶۹	.....	بازه پیش‌بینی برای $\bar{T}$	۶.۴
۶۹	.....	بازه پیش‌بینی برای مشاهده آینده از آزمون فشار-مرحله‌ای ساده	۷.۴
۷۳	.....	نتایج شبیه‌سازی	۸.۴
۷۳	.....	شبیه‌سازی براساس پارامتر معلوم $\theta$	۱.۸.۴
۷۴	.....	شبیه‌سازی براساس پارامترهای $\alpha$ و $\beta$	۲.۸.۴

۳.۸.۴ حالتی که پارامترهای مدل مجهول می‌باشند ..... ۷۵

۷۹ کتاب‌نامه

۱ آ واژه‌نامه

۳ ب کدهای برنامه‌نویسی

# لیست تصاویر

۷	.....	توزیع طول عمر در شرایط نرمال و استرس	۱.۱
۲۳	.....	مدل نمایش تجمعی با دو سطح فشار	۱.۲

# لیست جداول

۸	روابط بین توابع در شرایط نرمال و استرس	۱.۱
۵۲	بازه پیش‌بینی ۹۵٪ با $\beta$ معلوم به ازای $m = 2$	۱.۳
۵۳	بازه پیش‌بینی ۹۵٪ با $\beta$ معلوم به ازای $m = 3$	۲.۳
۵۳	بازه پیش‌بینی ۹۵٪ با $\theta$ معلوم به ازای $m = 2$	۳.۳
۵۴	بازه پیش‌بینی ۹۵٪ با $\theta$ معلوم به ازای $m = 3$	۴.۳
۵۵	بازه پیش‌بینی ۹۵٪ با $\beta$ مجهول به ازای $m = 2$	۵.۳
۵۵	بازه پیش‌بینی ۹۵٪ با $\beta$ مجهول به ازای $m = 3$	۶.۳
۵۵	بازه پیش‌بینی ۹۵٪ با $\theta$ مجهول به ازای $m = 2$	۷.۳
۵۶	بازه پیش‌بینی ۹۵٪ با $\theta$ مجهول به ازای $m = 3$	۸.۳
۷۴	بازه پیش‌بینی ۹۵٪ با $\theta$ معلوم به ازای $m = 2$	۱.۴
۷۵	بازه پیش‌بینی ۹۵٪ با $\beta$ معلوم به ازای $m = 2$ و $x_1 = 2$	۲.۴
۷۶	بازه پیش‌بینی ۹۵٪ با $\theta$ مجهول به ازای $m = 2$	۳.۴
۷۷	بازه پیش‌بینی ۹۵٪ با $\beta$ مجهول به ازای $m = 2$ و $x_1 = 2$	۴.۴

# فصل ۱

## تعاريف و مقدمات

## ۱.۱ مقدمه

در این فصل، مفاهیم و نمادهایی را که در این پایان نامه مورد استفاده قرار خواهد گرفت، معرفی می‌کنیم. در بخش دوم، آماره‌های مرتب و برخی کاربردهای آن بیان شده است. در بخش سوم، برخی مفاهیم پایه‌ای آزمون‌های طول عمر تسریع یافته، تاریخچه و کاربرد آن‌ها توضیح داده شده است. در بخش چهارم ضمن معرفی مفاهیم سانسورها و انواع آن‌ها، چند نوع خاص را بیشتر بررسی نموده‌ایم، در بخش پنجم برآوردهای درست‌نمایی ماکسیمم و برخی ویژگی‌های مهم آن‌ها بیان شده است و در بخش ششم به معرفی مفاهیم مربوط به پیش‌بینی‌های آماری پرداخته‌ایم.

## ۲.۱ آماره‌های مرتب

فرض کنید  $T_1, \dots, T_n$  متغیر تصادفی باشند. اگر آن‌ها را به ترتیب صعودی مرتب کنیم و مقادیر مرتب شده را به صورت  $T_{(1)} \leq T_{(2)} \leq \dots \leq T_{(n)}$  نشان دهیم، در این صورت  $T_{(j)}$ ،  $(j = 1, \dots, n)$  را  $j$ امین آماره مرتب در نمونه‌ای به حجم  $n$  گویند. کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین آماره مرتب، یعنی  $T_{(1)}$  و  $T_{(n)}$  به مقادیر فرین معروف هستند و در مطالعات آماری بیشتر مورد توجه می‌باشند.

### ۱.۲.۱ کاربرد آماره‌های مرتب

آماره‌های مرتب در قسمت‌های مختلف توصیفی و استنباطی علم آمار، دارای کاربرد می‌باشند. یکی از کاربردهای این آماره‌ها در آمار توصیفی، کشف مشاهدات پرت - داده‌های خیلی کوچک یا خیلی بزرگ - در یک مجموعه از داده‌ها می‌باشد. همان‌گونه که می‌دانیم یکی از ضعف‌های استفاده از میانگین به عنوان معیاری جهت تمرکز داده‌ها، میزان حساسیت بالای آن نسبت به داده‌های دورافتاده و تغییرات الگو است، در عوض میانه یا میانگین اصلاح شده، که این معیارها نیز جزء معیارهای تمرکز می‌باشند، نسبت به تغییرات الگو از حساسیت کمتری برخوردار هستند و در محاسبه آن‌ها، آماره‌های مرتب نقش عمده‌ای ایفا می‌کنند.

یکی دیگر از کاربردهای آماره‌های مرتب، مباحث طول عمر است. در قابلیت اعتماد  $T_{(1)}$  طول عمر یک سیستم سری با  $n$  مؤلفه است. همچنین  $T_{(n)}$ ، طول عمر یک سیستم موازی است. یک سیستم  $k$  از  $n$ ، به عنوان یک سیستم منسجم، تعمیمی از سیستم‌های متوالی و موازی است. یک سیستم شامل  $n$  جزء را  $k$  از  $n$  گوئیم هرگاه فعال بودن آن مستلزم فعال بودن حداقل  $k$  ( $k \leq n$ ) جزء از  $n$  جزء آن باشد. در این حالت  $T_{(n-k+1)}$  مورد توجه است.

در آمار استنباطی نیز می‌توان به مثال‌های زیر در خصوص کاربرد آماره‌های مرتب اشاره نمود.

۱- در محاسبه تابع توزیع تجربی نیازمند استفاده از آماره‌های مرتب هستیم و از آنجا که در آزمون‌های نیکویی برازش، اغلب تمرکز روی تغییرات بین تابع توزیع تجربی و تابع توزیع فرضی است، آماره‌های مرتب در این آزمون‌ها نقش اساسی دارند.

۲- در موضوعات کنترل کیفیت برای بررسی در کنترل بودن تولیدات، اغلب از نمودار میانگین و دامنه تغییرات و یا از نمودار میانه و دامنه تغییرات استفاده می‌شود که برای محاسبه میانه و دامنه تغییرات ناچار به استفاده از آماره‌های مرتب می‌باشیم.

۳- آماره‌های مرتب، در بسیاری از موارد به عنوان آماره‌های بسنده معرفی می‌شوند و برآوردگرهای ناریب با کمترین واریانس، فواصل اطمینان و پرتوان‌ترین آزمون برای پارامترهای مجهول را فراهم می‌کنند.

۴- در آزمایشات طول عمر، اغلب به دلیل فاکتورهایی از قبیل زمان یا اعتبار مالی، امکان شرکت دادن تمام واحدها در آزمایش وجود ندارد. بنابراین مشاهده طول عمر تمام واحدها امکان‌پذیر نیست، به همین دلیل از روش‌های سانسور استفاده می‌کنیم و آماره‌های مرتب نقش مهمی در سانسورها دارند.

برای جزئیات بیشتر در مورد خواص آماره‌های مرتب و کاربرد آن‌ها، می‌توان به دیوید و ناگارا<sup>۱</sup> (۲۰۰۳) یا آرنولد و همکاران<sup>۲</sup> (۲۰۰۸) مراجعه نمود.

همان‌طور که در بخش قبل توضیح داده شد آماره‌های مرتب نقش به‌سزای در مطالعات طول عمر و تحلیل داده‌های قابلیت اعتماد دارند. در این بخش این آماره‌ها را در حالتی که توزیع تحت بررسی نمایی است مورد مطالعه قرار می‌دهیم. فرض کنید  $T_1, T_2, \dots, T_n$  نمونه تصادفی به حجم  $n$  از توزیعی پیوسته با تابع توزیع  $F$ ، تابع تابع چگالی  $f$  و تابع بقای  $R$  باشد. آماره‌های ترتیبی نمونه را به صورت  $T_{(1)} \leq T_{(2)} \leq \dots \leq T_{(n)}$  نمایش می‌دهیم. در بین دلایل مختلف اهمیت آماره‌های ترتیبی در قابلیت اعتماد، به دو دلیل زیر اشاره می‌کنیم:

الف) در یک سیستم  $(n - k + 1)$  از  $n$ ، طول عمر سیستم برابر با  $T_{(k)}$  است.

ب) در برآورد متوسط طول عمر مثلاً یک قطعه الکتریکی، هنگامی که قرار است  $n$  داده تولید کنیم  $n$  قطعه را در زمان  $t = 0$  وارد آزمایش می‌کنیم و زمان شکست آن‌ها را ثبت می‌کنیم. واضح است که زمان شکست قطعات مقادیر آماره ترتیبی  $T_{(1)}, \dots, T_{(n)}$  خواهند بود.

به راحتی می‌توان نشان داد که تابع قابلیت اعتماد و تابع چگالی احتمال  $k$  امین آماره ترتیبی، به ترتیب برابرند با،

$$R_{(k)}(t) = P(T_{(k)} > t) = \sum_{j=n-k+1}^n \binom{n}{j} (\bar{F}(t))^j (F(t))^{n-j}$$

<sup>۱</sup>David and Nagaraja

<sup>۲</sup>Arnold, Balarishnan and Nagaraja



$$f_{(k)}(t) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} (F(t))^{k-1} (1-F(t))^{n-k} f(t)$$

تفاضل بین دو آماره ترتیبی متوالی  $T_{(k)} - T_{(k-1)}$  به ازای  $k = 1, 2, \dots, n$ ، با  $T_{(0)} = 0$  که به آن‌ها فاصله بند<sup>۳</sup> بین دو آماره ترتیبی گوئیم و با  $D_k$  نمایش می‌دهیم، نقش مهمی در آزمون‌های طول عمر ایفا می‌کنند. در حالتی که توزیع تحت بررسی نمایی است فاصله‌بندها خواص بسیار جالبی دارند که در قضیه زیر بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۱. (آرنولد و همکاران (۲۰۰۸)، صفحه ۷۲) فرض کنید  $T_{(1)} \leq T_{(2)} \leq \dots \leq T_{(n)}$  آماره‌های ترتیبی از توزیع نمایی استاندارد باشند. در این صورت، متغیرهای تصادفی  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  که در آن

$$Z_i = (n - i + 1)(T_{(i)} - T_{(i-1)})$$

با  $T_{(0)} = 0$ ، همگی به‌طور آماری مستقل‌اند و دارای توزیع نمایی استاندارد هستند.

در آزمون‌های طول عمر کمیتی به نام زمان کل آزمون<sup>۴</sup> که آن را با  $TTT$  نمایش می‌دهیم نقش محوری ایفا می‌کند. این کمیت، طول عمر صرف شده برای کلیه آزمودنی‌ها در آزمون را نشان می‌دهد. فرض کنید در برآورد متوسط طول عمر لامپ‌های تولیدی یک کارخانه،  $n$  لامپ را در زمان  $t = 0$  روشن کرده و منتظر می‌مانیم تا لامپ‌ها از کار افتاده و زمان شکست آن‌ها را ثبت می‌کنیم. طبیعی است که زمان شکست لامپ‌ها آماره‌های ترتیبی  $T_{(1)}, T_{(2)}, \dots, T_{(n)}$  خواهند بود که در آن  $T_{(1)}$  زمان اولین شکست و  $T_{(n)}$  زمان آخرین شکست در بین لامپ‌ها خواهد بود. فرض کنید  $T_{(k-1)} \leq t \leq T_{(k)}$  آنگاه زمان کل آزمایش در فاصله  $(0, t)$  برابر است با

$$TTT = nT_{(1)} + (n-1)(T_{(2)} - T_{(1)}) + \dots + (n-k+1)(t - T_{(k-1)}).$$

دلیل درستی این مطلب را می‌توان به صورت زیر بیان کرد. با توجه به اینکه در زمان اولین شکست  $n$  لامپ در آزمایش بوده‌اند، لذا  $TTT$  برابر با  $nT_{(1)}$  است. زمان صرف شده از اولین تا دومین شکست برابر  $T_{(2)} - T_{(1)}$  است که در این مرحله  $(n-1)$  لامپ داریم و بنابراین زمان کل آزمایش تا دومین شکست برابر است با  $nT_{(1)} + (n-1)(T_{(2)} - T_{(1)})$  است و الی آخر ... بنابراین زمان کل آزمایش در فاصله  $(0, t)$  برابر با  $TTT$  خواهد بود. در حالت خاص که  $t = T_{(k)}$ ، کمیت  $TTT$  اهمیت ویژه‌ای دارد. بویژه در این حالت زمانی که توزیع تحت بررسی نمایی است. توزیع  $TTT$  را می‌توان به راحتی تعیین کرد.

<sup>۳</sup>Spacing

<sup>۴</sup>Total time on test

## ۳.۱ آزمون‌های طول عمر تسریع یافته

### ۱.۳.۱ مقدمه

از نقطه نظر آماری یکی از وجوه تمایز مطالعات طول عمر با سایر بخش‌ها، نحوه جمع‌آوری مشاهدات است. امروزه با وجود محصولات با قابلیت اعتماد بالا به دست آوردن تعداد معقولی مشاهده جهت انجام استنباط آماری معمولاً کار ساده‌ای نیست. یکی از روش‌های متداول در آزمون‌های طول عمر، برای بدست آوردن مشاهدات، به کار بردن آن‌ها در شرایطی سخت‌تر از شرایط نرمال است. این روش‌ها را روش‌های آزمون‌های طول عمر تسریع یافته (ALT)<sup>۵</sup> می‌گویند. در آزمون‌های  $AL$  مشاهدات خیلی سریع‌تر از حالتی که واحدها در شرایط نرمال مورد استفاده قرار می‌گیرند به دست می‌آیند.

آزمون‌های تسریع یافته طول عمر به دو دسته کلی آزمون با فشار ثابت<sup>۶</sup> و آزمون فشار-مرحله‌ای<sup>۷</sup> تقسیم می‌شود. در آزمون‌های تسریع یافته طول عمر با فشار ثابت  $n$  واحد آزمایشی به دو دسته یا بیشتر تقسیم می‌شوند و هر دسته از واحدهای آزمایشی را در یک سطح فشار تا زمان خاتمه آزمون آزمایش می‌نمایند. در آزمون  $m$  فشار-مرحله‌ای، تمام  $n$  واحد آزمایشی در سطح فشار  $x_1$  قرار می‌گیرند و زمان‌های خرابی مشاهده شده ثبت می‌گردد. سپس در لحظه از پیش تعیین شده  $\tau_1$ ، سطح فشار از  $x_1$  به  $x_2$  تعویض می‌شود و زمان‌های خرابی مشاهده شده ثبت می‌گردد. سپس در لحظه از پیش تعیین شده  $\tau_2$ ، سطح فشار از  $x_2$  به  $x_3$  تغییر می‌کند. به همین صورت ادامه می‌دهیم تا در لحظه  $\tau_{m-1}$  سطح فشار از  $x_{m-1}$  به  $x_m$  تعویض می‌شود. واضح است که زمان‌های خرابی مشاهده شده در یک آزمون تسریع طول عمر، یک نمونه مرتب می‌باشند. در حالتی که  $m = 2$  باشد به آزمون فشار-مرحله‌ای، آزمون فشار-مرحله‌ای ساده می‌گویند.

آزمون‌های طول عمر تسریع یافته توسط نویسندگان زیادی مطالعه شده‌اند. نلسون<sup>۸</sup> (۱۹۸۰) برآوردگرهای درست‌نمایی ماکسیمم را تحت قانون توان معکوس با استفاده از داده‌های زمان شکست عایق‌بندی الکتریکی برای پارامترهای توزیع وایبل در آزمون فشار-مرحله‌ای برآورد نموده‌است. میلر و نلسون<sup>۹</sup> (۱۹۸۳) طرح آزمون بهینه فشار-مرحله‌ای ساده را براساس مینیمم‌سازی واریانس مجانبی برآوردگرهای درست‌نمایی ماکسیمم مورد مطالعه

<sup>۵</sup> Accelerated life testing

<sup>۶</sup> Constant Stress

<sup>۷</sup> Step-Stress

<sup>۸</sup> Nelson

<sup>۹</sup> Miller and Nelson

قرار داده‌اند. شیکد و سینگپوروالا<sup>۱۰</sup> (۱۹۸۳) مدلی براساس مدل‌های ضربه‌ای<sup>۱۱</sup> و فرایند فرسایش<sup>۱۲</sup> ارائه داده‌اند و برای توزیع طول عمر در شرایط نرمال برآوردهای ناپارامتری را بدست آورده‌اند. بای و همکاران<sup>۱۳</sup> (۱۹۸۹) آزمون‌های تسریع یافته طول عمر فشار-مرحله‌ای ساده را در زمان سانسور از پیش تعیین شده‌ای بهینه‌سازی نموده‌اند. نلسون (۱۹۹۰) منبع جامعی از قضایا و مثال‌ها برای آزمون‌های  $AL$  فراهم نموده‌است. بای و کیم<sup>۱۴</sup> (۱۹۹۳) طرح فشار-مرحله‌ای برای توزیع وایبل مورد بررسی قرار دادند. زیانگ<sup>۱۵</sup> (۱۹۹۸) مدل فشار-مرحله‌ای را تحت سانسور نوع دو در توزیع نمایی مورد مطالعه قرار داد. بالاکریشنان و همکاران (۲۰۰۷) مدل فشار-مرحله‌ای ساده را تحت سانسور نوع دو برای داده‌های طول عمر نمایی با مدل لگ-خطی بررسی نمودند. بالاکریشنان و همکاران (۲۰۰۹) مسئله مشابهی را تحت سانسور نوع یک بررسی نمودند. کاتری<sup>۱۶</sup> و بالاکریشنان (۲۰۰۸) طرح فشار-مرحله‌ای ساده را برای توزیع وایبل مطالعه نمودند. چون نتوانستند فرم بسته‌ای برای برآوردهای درست‌نمایی ماکسیمم بدست آورند با استفاده از الگوریتم نیوتن-رافسون در یک مثال مقدار عددی آن‌ها را محاسبه کردند. گوانا<sup>۱۷</sup> و همکاران (۲۰۰۴) مسئله تعیین نقطه بهینه در آزمون‌های فشار-مرحله‌ای را تحت سانسور نوع یک بررسی نمودند. فرد و لی<sup>۱۸</sup> (۲۰۰۹) طرح بهینه در آزمون‌های فشار-مرحله‌ای ساده با زمان‌های خرابی که از توزیع وایبل تحت سانسور نوع یک به دست آمده‌اند، مورد مطالعه قرار داد. بالاکریشنان و هان<sup>۱۹</sup> (۲۰۰۹) مسئله بهینگی را در آزمون‌های فشار-مرحله‌ای با  $k$  سطح فشار برای داده‌هایی از توزیع نمایی تحت سانسور فزاینده نوع یک بررسی نمودند. برزویی (۱۳۸۷) استنباط آماری تحت آزمون‌های فشار-مرحله‌ای و کاربرد آن در مباحث قابلیت اعتماد و عارفی (۱۳۹۱) آزمون‌های فشار-مرحله‌ای را براساس داده‌های طول عمر گسسته مورد مطالعه قرار دادند. وانگ و یوو<sup>۲۰</sup> (۲۰۰۹) طرحی را در آزمون‌های

<sup>۱۰</sup> Sheked and Singpurwalla

<sup>۱۱</sup> Shock models

<sup>۱۲</sup> Wear processes

<sup>۱۳</sup> Bai, Kim and Lee

<sup>۱۴</sup> Bai and Kim

<sup>۱۵</sup> Xiong

<sup>۱۶</sup> Kateri

<sup>۱۷</sup> Gouno

<sup>۱۸</sup> Fard and Li

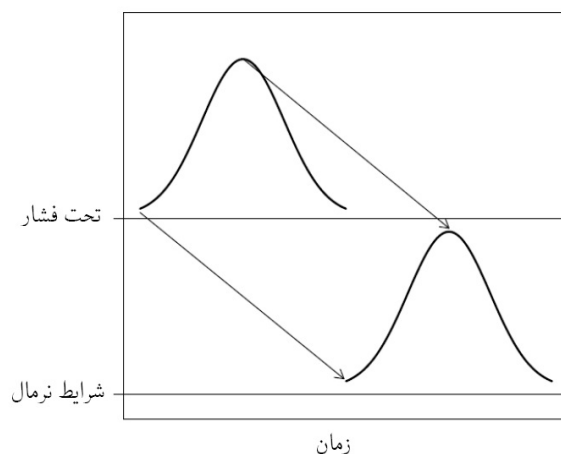
<sup>۱۹</sup> Han

<sup>۲۰</sup> Wang and Yu

فشار-مرحله‌ای ساده تحت سانسور فزاینده نوع دو از توزیع نمایی بررسی کردند. لینگ<sup>۲۱</sup> و همکاران (۲۰۱۱) نقطه بهینه تغییر سطح فشار در آزمون‌های فشار-مرحله‌ای ساده را تحت سانسور هیبرید نوع یک به دست آوردند. کاتری و همکاران (۲۰۱۱) این مسئله را برای سانسور نوع دو تحقیق نمودند.

### ۲.۳.۱ مدل‌های $AL$

مفهوم آزمون‌های  $AL$  به طور شهودی یک مفهوم ساده است و آن به دست آوردن مشاهدات سریع‌تر از حالت استفاده در شرایط نرمال است. اما باید تأکید کنیم مکانیزم شکست واحدها در شرایط غیرنرمال باید کاملاً مشابه با مکانیزم شکست در شرایط نرمال باشد. تنها تفاوت این است که آزمایش طول عمر سریع‌تر انجام می‌شود. این امر که زمان شکست سریع‌تر اتفاق می‌افتد در واقع نوعی انتقال مقیاس زمان است. به عبارت دیگر اگر فرض کنیم زمان شکست واحد مورد آزمایش در شرایط نرمال  $t_N$  است و زمان شکست آن در شرایط با استرس بیشتر  $t_S$  است آنگاه تابع تبدیلی وجود دارد که  $t_S$  را به  $t_N$  تبدیل می‌کند (به شکل ۱.۱ توجه کنید).



شکل ۱.۱: توزیع طول عمر در شرایط نرمال و استرس

<sup>۲۱</sup>Ling