دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض گرایش جبر لی

# زیرجبرهای لی نیم‌ساده‌ی موضعی از جبرهای لی به‌طور موضعی متناهی

# $\mathfrak{gl}(\infty)$، $\mathfrak{sl}(\infty)$، $\mathfrak{so}(\infty)$ و $\mathfrak{sp}(\infty)$

استاد راهنما:

خانم دکتر ملیحه یوسف‌زاده

استاد مشاور:

آقای دکتر سعید اعظم

پژوهشگر:

مریم السادات فلسفی

اسفند ماه ۱۳۹۰

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش جبر خانم مریم السادات فلسفی

## تحت عنوان:

## زیر جبرهای ماکسیمال و نیم ساده‌ی موضعی از جبرهای لی متناهی‌گون $sp(\infty)$, $sl(\infty)$, $gl(\infty)$, $so(\infty)$

در تاریخ ۹۰/۱۲/۲۳ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ......عالی...... به تصویب نهایی رسید.

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۱- استاد راهنمای پایان نامه | دکتر ملیحه یوسف زاده | با مرتبه علمی استادیار | امضاء |
| ۲- استاد مشاور پایان نامه | دکتر سعید اعظم | با مرتبه علمی استاد | امضاء |
| ۳- استاد داور داخل گروه | دکتر علیرضا نصر اصفهانی | با مرتبه علمی استادیار | امضاء |
| ۴- استاد داور خارج گروه | دکتر محمود بهبودی | با مرتبه علمی استادیار | امضاء |

مهر و امضای مدیر گروه ......................

گروه ریاضی دانشگاه اصفهان

# سپاس گزاری

به درگاه کبریا و عظمت پروردگار، سپاس و ستایش می آورم که ذات لایزال ازلی است و ازلیت بی ابتدایش لایزال و جاویدان.[1] اکنون که به فضل آن یکتای بی همتا این مهم به اتمام رسیده است، پس از سلام و درود بر حضرت محمد مصطفی (ص) و خاندان پاکش، بر خود لازم می دانم که از استاد راهنمای عزیزم، سرکار خانم دکتر ملیحه یوسف زاده تشکر کنم. به یقین بهره مندی از راهنمایی های ایشان، سعادتی بزرگ برای من بوده است، چرا که ایشان در علم و اخلاق و بزرگواری نمونه اند. هم چنین سپاس گزار استاد گرانقدرم، جناب آقای دکتر سعید اعظم هستم. بی شک شاگردی ایشان، فرصتی بوده تا در محضرشان دانه های علم و معرفت برچینم.

در ادامه نهایت سپاس و تشکر خود را تقدیم به تمام پدران و مادران می کنم، که دردانه های آفرینش اند؛ از آن جمله، به پدر و مادر مهربانم که اگر نبود دعای خیر و حمایت هاشان، روزها از پس روزهای دیگر، برایم به سختی می گذشت. در حالی که نیک می دانم در ادای حق فرزندی بسیار ضعیف بوده ام، لیک از آنان جز بزرگواری و کرامت برای من نبوده است. در انتها از خواهر و برادر عزیزم سپاس گزارم، که وجودشان سراسر خیر و برکت است و همواره هر چه از خوبی و مهربانی در توانشان بوده، بر من مضایقه نکرده اند.

---

[1] صحیفه سجادیه

این پایان نامه و هر آن چه که دارم یا ندارم را، تقدیم می دارم به

ساحت کبریایی مولا و سرورم

# اباصالح المهدی (عج)

## چکیده

در این پایان نامه جبرهای لی به‌طور موضعی متناهی $\mathfrak{gl}(\infty)$، $\mathfrak{sl}(\infty)$، $\mathfrak{so}(\infty)$ و $\mathfrak{sp}(\infty)$ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. یکی از اهداف اصلی این پایان نامه توصیف زیرجبرهای لی نیم‌ساده‌ی موضعی این چهار جبر لی می‌باشد. در واقع این توصیف براساس بیان یک شرط لازم و کافی بر روی زیرجبرهای لی جبرهای لی $\mathfrak{gl}(\infty)$، $\mathfrak{sl}(\infty)$، $\mathfrak{so}(\infty)$ و $\mathfrak{sp}(\infty)$ حاصل می‌شود. پس از آن، $\mathfrak{g}$ را یکی از این چهار جبر لی در نظر گرفته و مدول طبیعی $V$ و هم‌طبیعی $V_*$ از $\mathfrak{g}$ را به‌عنوان یک مدول برای زیرجبرهای لی به‌طور موضعی نیم‌ساده از $\mathfrak{g}$ مورد بررسی قرار می‌دهیم.

**کلیدواژه‌ها:** جبر لی، جبر لی ساده‌ی به‌طور موضعی متناهی، زیرجبر لی نیم‌ساده‌ی موضعی

# فهرست مطالب

# مقدمه

یکی از شاخه‌های جدید در ریاضیات مدرن، جبر لی است. نخستین گام در زمینه‌ی جبر لی در قرن ۱۹ توسط ریاضیدانی نروژی به نام ماریوس سفوس لی[۲]، برداشته شد. بررسی معادلات دیفرانسیل جزئی، او را به سمت شاخه‌ای از ریاضیات سوق داد، که امروزه جبر لی نامیده می‌شود. در اواخر قرن ۱۹ فردریک انگل [۳] همکاری خود را با لی آغاز کرد. ریاضیدانانی نظیر کلینگ، کارتان، وایل، کز، مودی [۴] و ... کارهای ارزشمندی در این زمینه انجام داده‌اند. بیش از یک دهه پیش، جبرهای لی ساده‌ی به‌طور موضعی متناهی، از بعد نامتناهی، مورد مطالعه قرار گرفته و طبقه‌بندی شدند([۱]، [۳]، [۵]). یکی از نتایج این طبقه بندی مطالعه‌ی جبرهای لی $\mathfrak{gl}(\infty)$، $\mathfrak{sl}(\infty)$، $\mathfrak{so}(\infty)$ و $\mathfrak{sp}(\infty)$ بود. از جمله نتایج ارزشمند، در زمینه‌ی مطالعه‌ی این چهار جبر لی نتایجی در مورد زیرجبرهای کارتان و بورل این جبرهای لی می‌باشد([۱۷]، [۲۰]، [۱۱]، [۵]، [۹]). هدف اصلی این پایان‌نامه توصیف زیرجبرهای لی نیم‌ساده‌ی موضعی، از جبرهای لی $\mathfrak{gl}(\infty)$، $\mathfrak{sl}(\infty)$، $\mathfrak{so}(\infty)$ و $\mathfrak{sp}(\infty)$، با تقریب یکریختی است. نتایج، حاصل گسترش نتایج بیان شده در مقالات [۱۴] و [۱۳] به جبرهای لی به‌طور موضعی متناهی از بعد نامتناهی است.

این پایان‌نامه که بر اساس مرجع [۱۲] تدوین شده است، مشتمل بر چهار فصل می‌باشد. فصل ۱ را در شش بخش تنظیم کرده‌ایم. در این فصل، برخی تعاریف و نکات مقدماتی را که در ضمن این

[۲] Marius Sophus Lie

[۳] Friedrich Engel

[۴] Killing، Cartan، Weyl، Kac، Moody

پایان‌نامه به آن‌ها نیاز خواهیم داشت بیان می‌کنیم. فصل ۲ شامل چهار بخش است. در بخش اول برخی مطالب مقدماتی‌تر آورده شده است. دو بخش بعد به معرفی جبرهای لی $\mathfrak{gl}(\infty)$، $\mathfrak{sl}(\infty)$، $\mathfrak{so}(\infty)$ و $\mathfrak{sp}(\infty)$ می‌پردازد. در بخش ۲، شکل ماتریسی این جبرهای لی را بیان می‌کنیم؛ در حالی که در بخش ۳، این جبرهای لی را با استفاده از فضای دوگان معرفی خواهیم کرد. در بخش آخر این فصل، به تعریف یک جبر لی به‌طور موضعی متناهی پرداخته و خواهیم دید که جبرهای لی $\mathfrak{gl}(\infty)$، $\mathfrak{sl}(\infty)$، $\mathfrak{so}(\infty)$ و $\mathfrak{sp}(\infty)$ به‌طور موضعی متناهی هستند. فصل سوم، که مهمترین فصل این پایان‌نامه است، نیز شامل چهار بخش می‌باشد. در بخش اول مفهوم حد مستقیم یک دستگاه مستقیم از جبرهای لی بیان می‌شود. مهمترین گزاره این بخش نشان می‌دهد، جمع مستقیم حد مستقیم یک خانواده از دستگاه‌های مستقیم، تحت یکریختی، با حد مستقیم جمع مستقیم آن خانواده برابر است. در بخش دوم این فصل، ابتدا با تعریف یک اشباع استاندارد آشنا می‌شویم. در ادامه، برای هر کدام از جبرهای لی $\mathfrak{sl}(\infty)$، $\mathfrak{so}(\infty)$ و $\mathfrak{sp}(\infty)$ یک اشباع استاندارد معرفی خواهیم کرد. در بخش سوم با مفهوم شاخص برای یک جبر لی-همریختی از جبرهای لی ساده‌ی با بعد متناهی آشنا می‌شویم. بخش آخر شامل اصلی‌ترین نتیجه‌ی این پایان‌نامه است. در این بخش ابتدا با مفهوم یک زیرجبر لی نیم‌ساده‌ی موضعی آشنا می‌شویم. سپس با بیان قضیه‌ای به توصیف زیرجبرهای لی نیم‌ساده‌ی موضعی جبرهای لی $\mathfrak{gl}(\infty)$، $\mathfrak{sl}(\infty)$، $\mathfrak{so}(\infty)$ و $\mathfrak{sp}(\infty)$ می‌پردازیم. این توصیف بر اساس یافتن یک شرط معادل برای تعریف یک زیرجبر لی نیم‌ساده‌ی موضعی از جبرهای لی $\mathfrak{gl}(\infty)$، $\mathfrak{sl}(\infty)$، $\mathfrak{so}(\infty)$ و $\mathfrak{sp}(\infty)$ است. بنابر این قضیه یک شرط معادل برای زیرجبرهای لی به‌طور موضعی نیم‌ساده‌ی $\mathfrak{s}$ از جبرهای لی $\mathfrak{gl}(\infty)$، $\mathfrak{sl}(\infty)$، $\mathfrak{so}(\infty)$ و $\mathfrak{sp}(\infty)$ بیان می‌شود. در فصل ۴، با در نظر گرفتن هر یک از جبرهای لی $\mathfrak{gl}(\infty)$، $\mathfrak{sl}(\infty)$، $\mathfrak{so}(\infty)$ و $\mathfrak{sp}(\infty)$، به بررسی ساختار مدول طبیعی $V$ و هم‌طبیعی $V_*$ این جبرها، به‌عنوان مدول‌هایی از زیرجبر لی نیم‌ساده‌ی موضعی $\mathfrak{s}$ از $\mathfrak{g}$ خواهیم پرداخت. می‌دانیم، قضیه‌ی وایل بیان می‌کند که هر مدول با بعد متناهی از یک جبر لی نیم‌ساده‌ی از بعد متناهی به صورت جمع مستقیمی از زیرمدول‌های تحویل‌ناپذیر، نوشته می‌شود. با توجه به این‌که برای یک زیرجبر لی نیم‌ساده‌ی موضعی $\mathfrak{s}$ از $\mathfrak{gl}(\infty)$،

$\mathfrak{sl}(\infty)$، $\mathfrak{so}(\infty)$ یا $\mathfrak{sp}(\infty)$، $V$ و $V_*$، $\mathfrak{s}-$مدول‌های از بعد نامتناهی هستند، لذا تجزیه‌ی آن‌ها به صورت جمع مستقیم زیرمدول‌های تحویل‌ناپذیر، نیاز به بررسی دارد که در این فصل به آن پرداخته می‌شود.

# فهرست نمادها

# فصل ۱

# مفاهیم اولیه

## ۱.۱ مباحثی از نظریه‌ی مدول‌ها

در این پایان نامه همواره میدان را اعداد مختلط $\mathbb{C}$ در نظر می‌گیریم، مگر این‌که خلاف آن فرض شود. هم‌چنین به‌جز در مواردی که ذکر خواهد شد، $i, j, k, l, m, n, r, s, t$، اعداد طبیعی هستند.

در این بخش به‌طور اجمالی مفاهیمی از نظریه مدول‌ها، شامل ضرب تانسوری و جمع مستقیم بیان می‌شود. لازم به ذکر است که مراجع اصلی این بخش [۲۸] و [۲۹] می‌باشند.

### ۱.۱.۱ ضرب تانسوری

**تعریف ۱.۱.۱.** (الف) فرض می‌کنیم $R$ یک حلقه باشد. یک گروه آبلی $A$ به همراه تابع

$$R \times A \longrightarrow A$$

$$(r, a) \longmapsto ra$$

را یک $R$ - *مدول* چپ می‌نامیم اگر به ازای هر $r, s \in R$ و $a, b \in A$، داشته باشیم

۱. $r(a+b) = ra + rb$،

۲. $(r+s)a = ra + sa$،

۳. $r(sa) = (rs)a$.

(ب) اگر $R$ یک حلقه‌ی یکدار، با $1_R$ باشد و علاوه بر شرایط قسمت (الف) در شرط

۴. به ازای هر $a \in A$، $1_R a = a$،

نیز صدق کند، آن‌گاه $A$ را یک $R$-*مدول چپ یکانی* می‌نامیم.

(ج)در صورتی که $R$ یک حلقه‌ی بخشی باشد، هر $R$-مدول چپ یکانی، یک *فضای برداری* چپ نامیده می‌شود.

(د)حلقه‌ی $R$ و $R$-مدول چپ $A$ را در نظر می‌گیریم. اگر $B$ یک زیرگروه جمعی $A$ باشد و به ازای هر $b \in B$ و $r \in R$، $rb \in B$، آن‌گاه $B$ را یک (چپ) *زیرمدول* $A$ می‌نامیم. هر (چپ) زیرمدول یک فضای برداری چپ، یک (چپ) *زیرفضا* نام دارد.

حال فرض می‌کنیم $A$ یک $R$-مدول چپ و $X$ یک زیرمجموعه از $A$ باشد. اگر از

$$r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_nx_n = 0,$$

برای عناصر متمایز $x_1, x_2, \ldots, x_n$ در $X$ و $r_1, r_2, \ldots, r_n \in R$، بتوان نتیجه گرفت که برای هر $1 \leq i \leq n$، $r_i = 0$، آن‌گاه $X$ را یک مجموعه‌ی *مستقل خطی* می‌نامیم. مجموعه‌ای که مستقل خطی نباشد *وابسته‌ی خطی* نامیده می‌شود.

**تعریف ۲.۱.۱.** (الف) یک زیرمجموعه‌ی $X$ از مدول چپ $A$ روی حلقه‌ی $R$ را در نظر می‌گیریم. اشتراک تمام زیرمدول‌هایی از $A$ که شامل $X$ هستند، *زیرمدول تولید شده به وسیله‌ی* $X$ نامیده می‌شود.

(ب) فرض می‌کنیم $R$ یک حلقه و $A$ یک $R$-مدول باشد. زیرمجموعه‌ی مستقل خطی $X$ از $A$، که $A$ را تولید کند، یک *پایه برای* $A$ نامیده می‌شود.

**گزاره ۳.۱.۱.** *حلقه‌ی یکدار $R$ و $R$- مدول یکانی $A$ را در نظر می‌گیریم. زیرمجموعه‌ی $X$ از $A$، $A$ را تولید می‌کند اگر و تنها اگر*

$$A = \{\sum_{i=1}^{s} r_i y_i |\ s \in \mathbb{N}, y_i \in X, r_i \in R\}.$$

*اثبات.* به قضیه ۵.۱، از فصل۴، مرجع [۲۸] مراجعه شود. □

**تعریف ۴.۱.۱.** حلقه‌ی یکدار $R$ را در نظر می‌گیریم. اگر $R$- مدول چپ یکانی $A$، یک پایه داشته باشد، $A$ را یک $R$- *مدول چپ آزاد* می‌نامیم.

از آن‌جا که گروه‌های آبلی همان $\mathbb{Z}$- مدول‌ها هستند، لذا هر $\mathbb{Z}$- مدول آزاد را یک *گروه آبلی آزاد* می‌نامیم.

**تذکر ۵.۱.۱.** (الف) *$R$- مدول راست، $R$- مدول راست یکانی، فضای برداری راست، (راست) زیرمدول، زیرفضای راست و مدول راست آزاد* به طور مشابه تعریف می‌شوند.

(ب) اگر $R$ یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر باشد و $A$ را به همراه

$$R \times A \longrightarrow A$$
$$(r, a) \longmapsto ra$$

یک $R$- مدول چپ در نظر بگیریم، به آسانی دیده می‌شود که می‌توان، یک ساختار $R$- مدولی راست به صورت

$$A \times R \longrightarrow A$$
$$(a, r) \longmapsto ar,$$

به $A$ نظیر کرد.

**تعریف ۶.۱.۱.** حلقه‌ی $R$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $A$ و $B$ دو $R$-مدول چپ باشند. تابع $\varphi: A \longrightarrow B$ را $R$-همریختی می‌نامیم اگر

۱. به ازای هر $x, y \in A$، $\varphi(x, y) = \varphi(x) + \varphi(y)$،

۲. به ازای هر $x \in A$ , $r \in R$، $\varphi(rx) = r\varphi(x)$.

لازم به ذکر است که اگر $A$ و $B$ دو $R$-مدول راست باشند تعریف فوق به‌طور مشابه برقرار است.

**گزاره ۷.۱.۱.** *به ازای هر مجموعه‌ی $X$ یک گروه آبلی با پایه‌ی $X$ موجود است. این گروه آبلی که تحت یکریختی یکتاست را گروه آبلی آزاد بر مجموعه‌ی $X$ می‌نامیم.*

*اثبات.* به قضیه ۱.۱ از مرجع [۲۸] مراجعه شود. □

**تعریف ۸.۱.۱.** مدول راست $A$ و مدول چپ $B$ روی حلقه‌ی $R$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $F$ گروه آبلی آزاد بر مجموعه‌ی $A \times B$ و $K$ زیرگروهی از $F$ باشد که به وسیله‌ی تمام عناصر به شکل

$$(a + a', b) - (a, b) - (a', b),\ (a, b + b') - (a, b) - (a, b'),\ (ar, b) - (a, rb)$$

جایی که $r \in R$، $b, b' \in B$ و $a, a' \in A$، تولید می‌شود. گروه خارج‌قسمتی $F/K$ را *حاصل‌ضرب تانسوری $A$ و $B$* می‌نامیم. این گروه آبلی با $A \bigotimes_R B$ نمایش داده می‌شود. در صورتی که احتمال اشتباه نباشد، حاصل‌ضرب تانسوری $A$ و $B$ را با $A \bigotimes B$ نیز نمایش می‌دهیم. هم‌چنین هم مجموعه‌ی $(a, b) + K \in F/K$، با $a \otimes b$ نشان داده می‌شود.

از آن‌جا که $F$ به وسیله‌ی مجموعه‌ی $A \times B$ تولید شده است، لذا گروه خارج قسمتی

$$F/K = A \bigotimes_R B,$$

به وسیله‌ی تمام عناصر به شکل $a \otimes b$، که در آن $a \in A$, $b \in B$، تولید می‌شود.

حلقه‌ی $R$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $A$ یک $R$- مدول راست، $B$ یک $R$- مدول چپ و $C$ یک $\mathbb{Z}$- مدول باشد. یک *نگاشت خطی میانی* از $A\times B$ به $C$ تابعی مانند $f : A\times B \longrightarrow C$ است به طوری که به ازای هر $b, b' \in B$، $a, a' \in A$ و $r \in R$،

$$f(a+a', b) = f(a, b)+f(a', b),\ \ f(a, b+b') = f(a, b)+f(a, b'),\ \ f(ar, b) = f(a, rb)$$

به‌علاوه اگر $R$ یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر باشد و $C$ یک $R$- مدول چپ فرض شود، نگاشت خطی میانی $f : A \times B \longrightarrow C$ را یک *نگاشت دوخطی* می‌نامیم هرگاه به ازای هر $a \in A$، $b \in B$ و $r \in R$، $f(ar, b) = f(a, rb) = rf(a, b)$.

**مثال ۹.۱.۱.** فرض می‌کنیم $A$ یک مدول راست و $B$ یک مدول چپ روی حلقه‌ی $R$ باشند. به آسانی تحقیق می‌شود که نگاشت

$$\begin{aligned} \iota : A \times B &\longrightarrow A \bigotimes\nolimits_R B \\ (a, b) &\longmapsto a \otimes b \end{aligned}$$

یک نگاشت خطی میانی است. نگاشت $\iota$ را *نگاشت خطی میانی کانونی* می‌نامیم.

اگر $R$ یک حلقه تعویض‌پذیر باشد، آن‌گاه نگاشت خطی میانی کانونی $\iota$، یک نگاشت دوخطی است. در این حالت $\iota$ را *نگاشت دوخطی کانونی* می‌نامیم.

**گزاره ۱۰.۱.۱.** *دو حلقه‌ی $R$ و $S$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $A$ یک $R$- مدول راست و یک $S$- مدول چپ باشد. هم‌چنین $B$ را یک $R$- مدول چپ در نظر می‌گیریم. در این صورت $A \bigotimes_R B$ به همراه تابع*

$$\begin{aligned} S \times A \bigotimes\nolimits_R B &\longrightarrow A \bigotimes\nolimits_R B \\ (s, a \otimes b) &\longmapsto sa \otimes b \end{aligned}$$

*یک $S$- مدول چپ است.*

*اثبات.* به قسمت (۲) قضیه ۵.۵، از فصل ۴ مرجع [۲۸] مراجعه شود. □

**گزاره ۱۱.۱.۱.** *(الف) فرض می‌کنیم $A$ یک مدول راست و $B$ یک مدول چپ روی حلقه‌ی $R$ باشد. به ازای هر $\mathbb{Z}$-مدول $C$ و هر نگاشت خطی میانی $f : A \times B \longrightarrow C$، $\mathbb{Z}$-همریختی منحصر به فرد $\bar{f} : A \bigotimes_R B \longrightarrow C$ موجود است به طوری که برای نگاشت خطی میانی کانونی $\iota : A \times B \longrightarrow A \bigotimes_R B$ داریم، $\bar{f}\iota = f$. به عبارت دیگر دیاگرام*

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[d, "\iota"] \arrow[dr, "f"] & \\ A \bigotimes_R B \arrow[r, dotted, "\bar{f}"'] & C \end{tikzcd}$$

*جابه‌جایی است. این خاصیت، $A \bigotimes_R B$ را، با تقریب یکریختی، به‌طور منحصر به فرد معین می‌کند و آن را خاصیت جهانی $A \bigotimes_R B$ می‌نامیم.*

*(ب) اگر $R$ یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر باشد، قسمت (الف) با تبدیل "$\mathbb{Z}$" به "$R$" و "خطی میانی" به "دوخطی" برقرار می‌ماند.*

*اثبات.* به فصل ۴، مرجع [۲۸] مراجعه شود. □

**گزاره ۱۲.۱.۱.** *(شرکت‌پذیری ضرب تانسوری ) حلقه‌های $R$ و $S$ را در نظر می‌گیریم. هرگاه $C$ یک $S$-مدول چپ، $B$ یک $S$-مدول راست و یک $R$-مدول چپ و $A$ یک $R$-مدول راست باشد، آن‌گاه*

$$(A \bigotimes_R B) \bigotimes_S C \cong A \bigotimes_R (B \bigotimes_S C).$$

*به‌عبارت دیگر ضرب تانسوری خاصیت شرکت‌پذیری دارد، لذا حذف پرانتزها در ضرب تانسوری معنی‌دار است.*

*اثبات.* به قضیه ۸.۵، از فصل ۴، مرجع [۲۸] مراجعه شود. □

**گزاره ۱۳.۱.۱.** *حلقه‌ی تعویض‌پذیر $R$ را در نظر می‌گیریم. هرگاه برای هر $1 \le i \le n$، $A_i, A'_i$*