بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده‌ی علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

عنوان

گراف جامع یک حلقه‌ی تعویض پذیر نسبت به ایده آل های سره

از:

زکیّه رمضانی سادات محله

استاد راهنما:

جناب آقای دکتر احمد عباسی

(مهر ۱۳۹۳)

تقدیم به قطب عالم امکان

حضرت صاحب الزمان (عج)

سپاس گذاری می کنم از چهار وجود مقدس:

آنکه ناتوان شد تا من به توانایی برسم...

موهایش سپید شد تا من روسفید شوم...

عاشقانه مرا در سختی های راه همراهی نمود...

صبورانه تحمل کرد تا روشنگر راه من باشد...

پدر مهربانم

مادر فداکارم

همسر عزیزتر از جانم

و استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر احمد عباسی

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

چکیده

گراف جامع یک حلقه‌ی تعویض پذیر نسبت به ایده آل های سره

زکیّه رمضانی سادات محله

فرض کنیم R یک حلقه‌ی تعویض پذیر و I یک ایده آل سره‌ی آن باشد. عضو $a \in R$ نسبت به I اوّل نامیده می‌شود، اگر از $ra \in I$، (که $r \in R$) آنگاه نتیجه شود که $r \in I$. فرض کنیم $S(I)$ مجموعه‌ی تمام عناصر R باشد که نسبت به I اوّل نیستند؛ به عبارت دیگر $S(I) = \{\, r \in R \mid \exists\, s \in R - I\,,\ rs \in I \,\}$.

در این پایان نامه ما به معرفی و مطالعه‌ی گراف جامع یک حلقه‌ی تعویض پذیر R نسبت به ایده آل سره‌ی I می‌پردازیم.

گراف جامع حلقه‌ی تعویض پذیر R عبارت است از، گرافی که مجموعه‌ی رئوس آن تمام عناصر R است و برای هر دو عضو متمایز $x,y \in R$ رئوس x و y مجاور گرفته می‌شوند اگر و فقط اگر $x + y \in Z(R)$ این گراف توسط اندرسون و بداوی در [۳] مطالعه شده است. گراف جامع R را با نماد $T(\Gamma(R))$ نمایش می‌دهیم.

در این پایان نامه گراف جامع یک حلقه‌ی تعویض پذیر R نسبت به ایده آل سره‌ی I گرافی تعریف می‌شود که مجموعه‌ی رئوس آن تمام عناصر R است و برای هر دو عضو متمایز $x,y \in R$، رئوس x و y مجاورند اگر و فقط اگر $x + y \in S(I)$ گراف جامع یک حلقه‌ی تعویض پذیر R نسبت به ایده آل سره‌ی I را با نماد $T(\Gamma_I(R))$ نمایش می‌دهیم.

واژه های کلیدی: حلقه های جابجایی، شمارنده‌ی صفر، گراف جامع

Abstract

The total graph of a commutative ring with respect to proper ideals

Zakieh Ramzani Sadatmahaleh

Let R be a commutative ring and I its proper ideal. We say that $a \in R$ is prime to I, if $ra \in I$ (where $r \in R$) implies that $r \in I$. Let $S(I)$ be the set of all elements of R that are not prime to I; in other words $S(I) = \{ r \in R \mid rs \in I \text{, for some } s \in R - I \}$.

In this work we introduce and study the total graph of a commutative ring R with respect to proper ideal I.

The total graph of a commutative ring with respect to proper ideals, that denoted by $T(\Gamma_I(R))$ is the graph where the vertices are all elements of R as vertices, and for distinct x , $y \in R$, the vertices x and y are adjacent if and only if $x + y \in S(I)$.

The total graph of a commutative ring, that denoted by $T(\Gamma(R))$ is the graph where the vertices are all elements of R and where there is an undirected edge between two distinct vertices x and y if and only if $x + y \in Z(R)$ which is due to Anderson and Badawi [3].

Key words: commutative rings, zero divisor, total graph.

پیش گفتار

مفهوم گراف جامع یک حلقه‌ی تعویض پذیر R، یکی از جذّاب ترین مفاهیم ساختار جبری در نظریه‌ی گراف است که نخستین بار توسط اندرسون و بداوی در [۳] معرفی شده است.

گراف جامع حلقه‌ی تعویض پذیر R را که با نماد $T(\Gamma(R))$ نشان می‌دهیم، گرافی است که مجموعه‌ی رئوس آن تمام عناصر R است و برای هر دو عضو متمایز $x,y \in R$، رئوس x و y مجاورند اگر و فقط اگر $x+y \in Z(R)$، که در آن $Z(R)$ مجموعه‌ی تمام شمارنده های صفر حلقه‌ی R است.

فرض کنیم I یک ایده آل سره‌ی R باشد. گراف جامع حلقه‌ی تعویض پذیر R نسبت به ایده آل سره‌ی I که با نماد $T(\Gamma_I(R))$ نمایش می‌دهیم، گرافی است که مجموعه‌ی رئوس آن تمام عناصر R است و رئوس مجزای $x,y \in R$ مجاورند اگر و فقط اگر $x+y \in S(I)$. ما در فصل۲ از این پایان نامه، $T(\Gamma_I(R))$ را در دو حالت که $S(I)$ یک ایده آل اوّل است یا نه مطالعه می کنیم.

گراف شمارنده‌ی صفر R عبارت است از، گرافی با رأس های $Z(R)^* = Z(R) - \{۰\}$ که برای x و y متمایز از $Z(R)^*$، رأس های x و y مجاور هستند اگر و فقط اگر $xy = ۰$. گراف شمارنده‌ی صفر R را با نماد $\Gamma(R)$ نشان می‌دهیم. (ر.ک. [۴]).

ردموند در [۹] گراف شمارنده‌ی صفر R نسبت به ایده آل سره‌ی I را به عنوان گرافی با رئوس $V = \{x \in R - I \ : xy \in I \ , y \in R - I$ به ازای $\}$ معرفی کرد به طوری که برای هر دو عضو متمایز $x,y \in V$، رئوس x و y مجاورند اگر و فقط اگر $xy \in I$ گراف شمارنده‌ی صفر R نسبت به ایده آل سره‌ی I را به وسیله‌ی $\Gamma_I(R)$ نمایش می‌دهیم.

ردموند مثالی از حلقه های R و S و ایده آل های $I \trianglelefteq R$ و $J \trianglelefteq S$ ارائه نمود که در آن $\Gamma(R/I) \cong \Gamma(S/J)$ امّا $\Gamma_I(R) \ncong \Gamma_J(S)$. به طور مشابه در این مقاله مثالی ارائه می‌دهیم (ر.ک. مثال ۱-۲-۳) به طوری که $T(\Gamma_I(R)) \cong T(\Gamma_J(S))$ امّا $T(\Gamma(R/I)) \ncong T(\Gamma(S/J))$.

در بخش ۲ از فصل۱، یک رابطه بین متمّم های $\bar{S}(\Gamma_I(R))$ و $\mathrm{Reg}(\Gamma(R/I))$ بدست می‌آوریم و چندین نتیجه‌ی اساسی در رابطه‌ی بین $T(\Gamma_I(R))$ و $T(\Gamma(R/I))$ ارائه می‌دهیم. همچنین در بخش های ۱ و ۲ از فصل ۲، به ترتیب به مطالعه‌ی گراف های $T(\Gamma_I(R))$ و $S(\Gamma_I(R))$ و $\bar{S}(\Gamma_I(R))$ هنگامی‌که $S(I)$ یک ایده آل R است یا نه می‌پردازیم و چندین نتیجه در باره‌ی رابطه‌ی بین قطر و کمر گراف $T(\Gamma_I(R))$ و $T(\Gamma(R/I))$ ارائه می‌دهیم. این پایان نامه بر اساس [۱] تدوین یافته است.

فصل اوّل

مفاهیم و تعاریف اوّلیه

در سراسر این پایان نامه R همواره یک حلقه‌ی تعویض پذیر و یکدار ناصفر فرض شده است. همچنین مجموعه‌ی تمام شمارنده های صفر حلقه‌ی R را با نماد $Z(R)$ و مجموعه‌ی تمام اعضای منظم حلقه‌ی R را با نماد $\mathrm{Reg}(R)$ نشان می‌دهیم.

برای گراف G، مجموعه‌ی رأس ها را با $V(G)$ و مجموعه‌ی یال ها را با $E(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف۱-۱-۱: یک گراف G عبارت است از، یک سه تایی مرتب به صورت $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ که در آن $V(G)$ یک مجموعه‌ی غیرتهی از رأس هاست، $E(G)$ یک مجموعه‌ی مجزا از $V(G)$ که عضو های آن را یال گراف گوییم و ψ_G یک تابع است که به هر عضو از $E(G)$ یک زوج غیر مرتب (نه لزوماً متمایز) از $V(G)$ یعنی رأس های G رانسبت می‌دهد.

تعریف۱-۱-۲: گراف H را یک زیرگراف از G گوییم هرگاه

۱) $V(H) \subseteq V(G)$ ۲) $E(H) \subseteq E(G)$ ۳) ψ_H برابر با تحدید تابع ψ_G بر $E(H)$ باشد.

تعریف۱-۱-۳: اگر دو رأس انتهایی یک یال یکی باشد، آن یال طوقه نام دارد.

تعریف۱-۱-۴: گراف ساده گرافی است که طوقه و یال چندگانه (هنگامی که بیش از یک یال بین دو رأس وجود داشته باشد) ندارد.

تعریف۱-۱-۵: دو رأس u و v از گراف G را مجاور گوییم هرگاه یک یال بین آن دو وجود داشته باشد (که آن را به صورت $u - v$ نشان می‌دهیم). در این صورت گوییم که رئوس u و v بر آن یال واقع هستند. به همین ترتیب دو یال متمایز از G را مجاور گوییم هرگاه حداقل یک رأس مشترک داشته باشند.

تعریف۱-۱- ۶: دنباله ای از یال ها به صورت $v_۰v_۱ , v_۱v_۲ , v_۲v_۳ , \dots , v_{m-۱}v_m$ را در نظر می‌گیریم. این دنباله را به صورت $v_۰ — v_۱ — v_۲ — \dots — v_{m-۱} — v_m$ نیز نشان می‌دهیم. اگر رئوس $v_۰ , v_۱ , v_۲ , \dots , v_m$ متمایز باشند، آنگاه به این دنباله از یال ها یک مسیر می‌گویند.

تعریف۱-۱-۷: فرض کنیم $v_۰ , v_۱ , v_۲ , \dots , v_{m-۱}$ که $m \geq ۳$ رأس هایی متمایز از گراف G باشند که به ازای هر $۰ \leq i \leq m-۱$، رأس های v_i و $v_{i+۱}$ مجاور باشند. مادامی‌که رأس های $v_۰$ و $v_{m-۱}$ نیز مجاور باشند، در این صورت $v_۰ — v_۱ — v_۲ — \dots — v_{m-۱} — v_۰$ را یک دور به طول m گوییم.

تعریف۱-۱-۸: اگر $v_0 , v_1 , v_2 , \dots , v_{m-1}$ رأس های متمایزی از گراف G باشند، آنگاه $v_0 — v_1 — \dots — v_{m-1}$ یک مسیر به طول m است. یک گراف که بین هر دو رأس متمایز آن یک مسیر وجود داشته باشد را یک گراف همبند گوییم.

تعریف۱-۱-۹: اگر هیچ یک از دو رأس G مجاور نباشد، آنگاه گراف G کلاً ناهمبند خوانده می‌شود.

تعریف۱-۱-۱۰: فرض کنیم x و y دو رأس از G باشند که دست کم یک مسیر بین آنها وجود داشته باشد. طول کوتاه‌ترین مسیر از x به y را با نماد $d(x,y)$ نمایش می‌دهیم و آن را فاصله‌ی بین x و y می‌نامیم. اگر چنین مسیری از x به y موجود نباشد، آنگاه می‌نویسیم $d(x,y) = \infty$. همچنین قرار می‌دهیم $d(x,x) = 0$.

تعریف۱-۱-۱۱: سوپریمم فاصله های بین رئوس متمایز گراف G را قطر گراف G گوییم و آن را با نماد $diam(G)$ نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر

$$diam\,(G) = Sup\left\{d(x,y) \,\middle|\, \text{رأس های متمایز هستند } y \text{ و } x\right\}.$$

تعریف۱-۱-۱۲: طول کوتاه‌ترین دور در گراف G را با $gr(G)$ نشان می‌دهیم و آن را کمر گراف G گوییم. اگر G شامل هیچ دوری نباشد، آنگاه می‌نویسیم $gr(G) = \infty$.

تعریف۱-۱-۱۳: یک گراف ساده را که هر دو رأس متمایز آن مجاور باشند، یک گراف کامل می‌نامیم. یک گراف کامل با n رأس را به صورت K^n نمایش می‌دهیم.

تعریف۱-۱-۱۴: فرض کنیم مجموعه‌ی رئوس یک گراف را بتوان به دو مجموعه‌ی مجزای V_1 و V_2 چنان افراز کرد به طوری که هر یال G یک رأس از V_1 را به یک رأس از V_2 وصل کند. در این صورت G را یک گراف دو بخشی گوییم و به صورت $G(V_1 ,V_2)$ نشان می‌دهیم.

تعریف۱-۱-۱۵: در یک گراف دو بخشی لزوماً هر رأس از V_1 به هر رأس از V_2 وصل نیست. امّا اگر چنین باشد و اگر G ساده باشد، آنگاه G را یک گراف دو بخشی کامل گوییم. هنگامی که G دوبخشی کامل متناهی باشد آن را با $K^{m,n}$ نشان می‌دهیم، که در آن m و n به ترتیب تعداد رئوس در V_1 و V_2 هستند.

تعریف۱-۱-۱۶: یک گراف دوبخشی کامل به صورت $K^{1,s}$ یک گراف ستاره‌ای نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۱-۱۷: عضو $a \in R$ نسبت به I اوّل نامیده می‌شود، اگر از $ra \in I$، (که $r \in R$) آنگاه نتیجه شود که $r \in I$.
$S(I)$ را مجموعه‌ی تمام عناصر R تعریف می‌کنیم که نسبت به I اوّل نیستند؛ به عبارت دیگر

$$S(I) = \{ r \in R \mid \exists\, s \in R - I\,,\ rs \in I \}.$$

نکته ۱-۱-۱۸: اگر I یک ایده آل سره و غیرصفر R باشد، آنگاه $S(I) \neq \emptyset$.

برهان: فرض کنیم I یک ایده آل سره‌ی R باشد. بنابراین $I \neq R$ پس عضوی مانند s موجود است به طوری که $s \in R - I$. از آنجا که I غیر صفر است، پس $r \in I \subset R$. همچنین از اینکه I ایده آلی از R است داریم، $rs \in I$. بنابراین $r \in S(I)$. در نتیجه $S(I) \neq \emptyset$.

نکته ۱-۱-۱۹: اگر $S(I)$ یک ایده آل R باشد، آنگاه یک ایده آل سره‌ی R است.

برهان: فرض کنیم $S(I)$ یک ایده آل R باشد. فرض کنیم $S(I)$ یک ایده آل سره‌ی R نباشد. در این صورت $S(I) = R$. از آنجا که R یک حلقه‌ی یکدار است، پس $1 \in S(I)$. پس عضوی مانند $s \in R - I$ وجود دارد به طوری که $s = 1s \in I$، که این یک تناقض است. در نتیجه $S(I)$ یک ایده آل سره‌ی R است.

نکته ۱-۱-۲۰: اگر I یک ایده آل اوّل R باشد، آنگاه $S(I) = I$.

برهان: فرض کنیم I یک ایده آل R باشد. نشان می‌دهیم $I \subseteq S(I)$.

فرض کنیم $x \in I$. از آنجا که I یک ایده آل اوّل R است بنابراین $I \neq R$. پس عضوی مانند y موجود است به طوری که $y \in R - I$. از اینکه I یک ایده آل R است، پس $xy \in I$ به طوری که $y \in R - I$. از این رو، $x \in S(I)$. در نتیجه $I \subseteq S(I)$.

اکنون فرض کنیم I یک ایده آل اول R باشد. در این صورت ثابت می‌کنیم $S(I) \subseteq I$. فرض کنیم $x \in S(I)$. در این صورت عضوی مانند t موجود است به طوری که $t \in R - I$ و $xt \in I$. با توجّه به اینکه I یک ایده آل اوّل R است، پس $x \in I$ یا $t \in I$. از طرفی $t \notin I$ (زیرا $t \in R - I$). بنابراین $x \in I$. از این رو، $S(I) \subseteq I$. در نتیجه $S(I) = I$.

نکته ۱-۱-۲۱: اگر $S(I)$ یک ایده آل R باشد، آنگاه یک ایده آل اوّل R است.

برهان: فرض کنیم $S(I)$ یک ایده آل R باشد. همچنین فرض کنیم به ازای هر $x,y \in R$، $xy \in S(I)$ و $y \notin S(I)$.

از آنجا که $xy \in S(I)$ پس عضوی مانند $z \in R - I$ وجود دارد به طوری که $(xy)z \in I$. پس $x(yz) = (xy)z \in I$ و $yz \notin I$ ($y \notin S(I)$). در نتیجه $x \in S(I)$. از این رو، $S(I)$ یک ایده آل اوّل R است.

نکته۱-۱-۲۲: مجموعه‌ی $S(I)$ لزوماً یک ایده آل R نیست(الزاماً نسبت به جمع بسته نیست).

تعریف ۱-۱-۲۳: ایده آل سره‌ی I را یک ایده آل P- اولی[۱] R می‌نامیم هرگاه $P = S(I)$. در این حالت P را یک ایده آل الحاقی I می‌خوانیم.

تعریف ۱-۱-۲۴: عضو $x \in R$ را یک شمارنده‌ی صفر R گوییم اگر عضوی مانند $0 \neq y \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $xy = 0$. مجموعه‌ی تمام شمارنده های صفر حلقه‌ی R را با $Z(R)$ نشان می‌دهیم. همچنین $\mathrm{Reg}(R) = R - Z(R)$، که در آن$\mathrm{Reg}(R) = \{ r \in R \mid rs \neq 0 ,$ به ازای هر $0 \neq s \in R \}$، مجموعه‌ی تمام اعضای منظم حلقه‌ی R است.

نکته ۱-۱-۲۵: با توجّه به تعاریف بالا به سادگی دیده می‌شود که

$$\mathrm{Z}(R/I) = \{a + I : a \in S(I)\}.$$

برهان: داریم
$$\mathrm{Z}(R/I) = \left\{a + I \in R/I : (a+I)(s+I) = 0 \ , \ 0 \neq s + I \in R/I \text{ به ازای } \right\}$$
$$= \left\{a + I \in R/I : as + I = 0, \ s \notin I \text{ به ازای } \right\}$$
$$= \left\{a + I \in R/I : as \in I \ , \ s \in R - I \text{ به ازای } \right\}$$
$$= \{a + I : a \in S(I)\}$$

---
[۱] P-primal

تعریف۱-۱-۲۶: گراف شمارنده‌ی صفر R عبارت است از، گرافی با رأس های $Z(R)^* = Z(R) - \{\circ\}$ به طوری که برای x و y متمایز از $Z(R)^*$، رأس های x و y مجاور هستند اگر و فقط اگر $xy = \circ$. گراف شمارنده‌ی صفر را با نماد $\Gamma(R)$ نشان می‌دهیم.

تعریف۱-۱-۲۷: گراف شمارنده‌ی صفر R نسبت به ایده آل سره‌ی I، گرافی است با مجموعه‌ی رئوس $V = \{x \in R - I : xy \in I \,,\, y \in R - I$ به ازای $\}$، به طوری که برای هر دو عضو متمایز $x,y \in V$، رئوس x و y مجاورند اگر و فقط اگر $xy \in I$. گراف شمارنده‌ی صفر نسبت به ایده آل سره‌ی I را به وسیله‌ی $\Gamma_I(R)$ نمایش می‌دهیم. (ر.ک. [۹])

نکته۱-۱-۲۸: اگر $I = \{\circ\}$ ، آنگاه $\Gamma_I(R) = \Gamma(R)$.

برهان: کافی است نشان دهیم

۱) $V(\Gamma(R)) = V(\Gamma_{(\circ)}(R))$ ۲) $E(\Gamma(R)) = E(\Gamma_{(\circ)}(R))$

برهان۱: گراف شمارنده‌ی صفر R، $\Gamma(R)$ گرافی با رأس های $Z(R)^* = Z(R) - \{\circ\}$ است؛ به عبارت دیگر $V(\Gamma(R)) = Z(R)^*$. از طرفی $V(\Gamma_{(\circ)}(R)) = \left\{x \in R - (\circ) \,\middle|\, xy = \circ,\ y \in R - (\circ) \text{ به ازای }\right\}$. بنابراین $V(\Gamma(R)) = V(\Gamma_{(\circ)}(R))$.

۲: فرض کنیم $x,y \in Z(R)^*$. در این صورت x مجاور y در $\Gamma(R)$ است اگر و فقط اگر $xy = \circ$. از طرفی مجموعه‌ی رئوس $\Gamma_{(\circ)}(R)$ به صورت $V = \left\{x \in R - (\circ) \,\middle|\, xy \in (\circ)\,,\ y \in R - (\circ) \text{ به ازای }\right\}$ است. پس در $\Gamma(R)$، $xy = \circ$ است اگر و فقط اگر $xy = \circ$، در $\Gamma_{(\circ)}(R)$ باشد. لذا x و y در $\Gamma(R)$ با یکدیگر مجاورند اگر و فقط اگر x و y در $\Gamma_{(\circ)}(R)$ با یکدیگر مجاور باشند.

تعریف ۱-۱-۲۹: گراف جامع حلقه‌ی تعویض پذیر R را که با نماد $T(\Gamma(R))$ نشان می‌دهیم، گرافی است که مجموعه‌ی رئوس آن تمام عناصر R است و برای هر دو عضو متمایز $x,y \in R$ رئوس x و y مجاورند اگر و فقط اگر $x + y \in Z(R)$ ، که در آن $Z(R)$ مجموعه‌ی تمام شمارنده های صفر حلقه‌ی R است.

تعریف۱ -۱-۳۰: فرض کنیم I یک ایده آل سره‌ی R باشد. گراف جامع حلقه‌ی تعویض پذیر R نسبت به ایده آل سره‌ی I که با نماد $T(\Gamma_I(R))$ نمایش می‌دهیم، گرافی است که مجموعه‌ی رئوس آن تمام عناصر R است و رئوس مجزای $x,y \in R$ مجاورند اگر و فقط اگر $x+y \in S(I)$.

نکته۱ -۱-۳۱: اگر $I=\{\circ\}$ ، آنگاه $T(\Gamma_I(R)) = T(\Gamma(R))$.

برهان: کافی است نشان دهیم

۱) $V(T(\Gamma(R))) = V(T(\Gamma_{(\circ)}(R)))$ ۲) $E(T(\Gamma(R)) = E(T(\Gamma_{(\circ)}(R)))$

برهان۱: واضح است. زیرا $V(T(\Gamma(R)) = V(T(\Gamma_{(\circ)}(R)) = R$.

۲: فرض‌کنیم $x,y \in R$. در این صورت x با y در $T(\Gamma(R))$ مجاور است اگر و فقط اگر $x+y \in Z(R)$. از طرفی $S(\circ) = \{ r \in R \mid \exists\, s \in R-(\circ) ,\ rs = \circ\} = Z(R)$. از این رو، $x+y \in Z(R)$ اگر و فقط اگر $x+y \in S(\circ)$ لذا x و y در $T(\Gamma(R))$ با یکدیگر مجاورند اگر و فقط اگر x و y در $T(\Gamma_{(\circ)}(R))$ با یکدیگر مجاور باشند.

تعریف۱-۱-۳۲: $S(\Gamma_I(R))$ نشان دهنده‌ی زیرگراف $T(\Gamma_I(R))$ القا شده با رئوس $S(I)$ است.

تعریف۱-۱-۳۳: $\bar{S}(\Gamma_I(R))$ نشان دهنده‌ی زیرگراف $T(\Gamma_I(R))$ القا شده با رئوس $R-S(I)$ است.

تعریف۱-۱-۳۴: فرض کنیم $\{G_\theta \mid \theta \in \Lambda\}$ خانواده ای از گراف ها باشد. برای گراف G، اگر همه‌ی رأس ها و یال های هر G_θ در G باشند و هیچ دو تا از این G_θ ها رأس مشترک نداشته باشند، $\{G_\theta\}_{\theta\in\Lambda}$ را یک مجموعه از زیرگراف های مجزای G گوییم.

تعریف ۱-۱-۳۵: زیرمجموعه‌ی ناتهی $S_\circ \subseteq R$ را یک زیرمجموعه‌ی ضربی بسته‌ی R گوییم هرگاه

۱) $\circ \notin S_\circ$ ۲) $1 \in S_\circ$ ۳) به ازای هر $a , b \in S_\circ$، داشته باشیم $ab \in S_\circ$.

تعریف۱-۱-۳۶: زیرمجموعه‌ی ناتهی $S_\circ \subseteq R$ را یک زیرمجموعه‌ی اشباع شده‌ی R گوییم، اگر به ازای $xy \in S_\circ$ ، آنگاه $x \in S_\circ$ و $y \in S_\circ$.

قضیه ۱-۱-۳۷: گزاره های زیر برای زیرمجموعه‌ی $S_\circ$ از حلقه‌ی R معادلند:

(۱) $S_\circ$ یک زیر مجموعه‌ی ضربی بسته‌ی اشباع شده‌ی R است.

(۲) متمّم $S_\circ$ اجتماعی از ایده آل های اوّل R است.

برهان: ر.ک. قضیه‌ی ۲ فصل ۱ از [۸].

مثال ۱-۱-۳۸: فرض کنیم $R \neq \circ$ و $S_\circ$ شامل تمام عناصر منظم R باشد. در این صورت $S_\circ$ یک زیر مجموعه‌ی ضربی بسته‌ی اشباع شده‌ی R است. همچنین هر ایده آل مینیمال R مشمول در $D = R - S_\circ$ است. حلقه‌ی $S_\circ^{-1}R$ حلقه‌ی جامع کسرها نامیده می‌شود.

به سادگی دیده می‌شود که $S_\circ$ یک زیر مجموعه‌ی ضربی بسته‌ی اشباع شده‌ی R است. همچنین هر ایده آل مینیمال R مشمول در $D = R - S_\circ$ است. ر.ک. مثال ۹ فصل ۳ از [۵].

نکته ۱-۱-۳۹: مجموعه‌ی $S(I)$ اجتماعی از ایده آل های اوّل R شامل I است؛ به عبارت دیگر $S(I) = \bigcup p_i$ ، که در آن به ازای هر i، p_i یک ایده آل اوّل R شامل I است.

برهان: فرض کنیم $\mathrm{Reg}(R) = S_\circ$. در این صورت از آنجا که $S_\circ$ مجموعه‌ی تمام عضوهای منظم R است. بنابراین طبق مثال ۱-۱-۳۸، $S_\circ$ یک زیر مجموعه‌ی ضربی بسته‌ی اشباع شده‌ی R است.

اکنون با توجّه به قضیه‌ی ۱-۱-۳۷(۲)، متمّم $\mathrm{Reg}(R) = S_\circ$، اجتماعی از ایده آل های اوّل R است. از آنجا که $\mathrm{Z}(R) = R - \mathrm{Reg}(R)$، پس $\mathrm{Z}(R)$ اجتماعی از ایده آل های اوّل R است. بنابراین $\mathrm{Z}(R/I)$ اجتماعی از ایده آل های اوّل R/I است. این ایده آل ها به صورت P/I هستند به طوری که P یک ایده آل اوّل R شامل I است. در نتیجه $\mathrm{Z}(R/I) = \bigcup_{I \subseteq P \in A} P/I$ که در آن $A \subseteq spec(R)$

اینک با توجّه به نکته‌ی ۱-۱-۲۵، داریم $Z(R/I) = S(I)/I$. از این رو، $S(I)/I = Z(R/I) = \bigcup_{I \subseteq P \in A} P/I$. در نتیجه $S(I) = \bigcup_{I \subseteq P \in A} P$ که در آن $A \subseteq spec(R)$

نکته ۱-۱-۴۰: با توجّه به نکته‌ی ۱-۱-۳۹، $S(I)$ اجتماعی از ایده آل های اوّل R شامل I است. همچنین $S(I)$ دارای این ویژگی است که به ازای هر $x,y \in R$ ، اگر $xy \in S(I)$ آنگاه $x \in S(I)$ یا $y \in S(I)$.

زیرا فرض کنیم $x,y \in R$. در این صورت از آنجا که $xy \in S(I) = \bigcup p_i$ ، پس i ای وجود دارد به طوری که $xy \in p_i$. از اینکه به ازای هر i، p_i یک ایده آل اوّل R است. در نتیجه $x \in p_i$ یا $y \in p_i$.

اگر $x \in p_i$ آنگاه $x \in \bigcup p_i = S(I)$ ، بنابراین $x \in S(I)$ یا به طور مشابه $y \in S(I)$.

تعریف۱-۱-۴۱: فرض کنیم R یک حلقه و n کوچک‌ترین عدد طبیعی باشد که $n.۱_R = ۰$. در این صورت n را مشخصه‌ی R گوییم و آن را با نماد $Char\ (R) = n$ نشان می‌دهیم.

تعریف۱-۱-۴۲: فرض کنیم J ایده آل سره‌ای از R باشد. J را یک ایده آل ماکسیمال گوییم اگر $J \subseteq m \subseteq R$، (که در آن m یک ایده آل دلخواه از R است) آنگاه $J = m$ یا $m = R$.

تعریف۱-۱-۴۳: اشتراک تمام ایده آل های ماکسیمال R را رادیکال ژاکوبسون R نامیم و آن را با نماد $Jac(R)$ نشان می‌دهیم.

تعریف۱-۱-۴۴: عضو $x \in R$ را یک عضو یکّه R گوییم اگر عضوی مانند $y \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $xy = ۱$. مجموعه‌ی تمام عضوهای یکّه را با $U(R)$ نشان می‌دهیم.

تعریف۱-۱-۴۵: فرض کنیم که Q یک ایده آل سره‌ی R باشد. گوییم Q یک ایده آل اولیه‌ی R است اگر برای هر $a,b \in R$، $ab \in Q$ ایجاب کند که $a \in Q$ یا به ازای $n \in N$، $b^n \in Q$.

تعریف۱-۱-۴۶: فرض کنیم که Q یک ایده آل اولیه باشد. در این صورت $\sqrt{Q} = p$ یک ایده آل اول است. بنابراین Q را یک ایده آل p - اولیه می‌نامیم.

مثال۱-۱-۴۷: هر ایده آل اوّل یک ایده آل اولیه است.

اثبات واضح است.

مثال۱-۱-۴۸: اگر به ازای هر عدد اوّل p و هر $n \in N$، $(p)^n = (p^n)$، آنگاه Q یک ایده آل اولیه‌ی $\mathbb{Z}$ است. بنابراین Q یک ایده آل $p = (p)$ - اولیه‌ی $\mathbb{Z}$ است.

فرض کنیم که $Q = (p^n)$ و $a,b \in \mathbb{Z}$، به طوری که $ab \in Q$. به ازای $r \in \mathbb{Z}$ داریم $ab = rp^n$. اگر $a \in Q$، آنگاه چیزی برای اثبات نداریم. فرض کنیم $a \notin Q$. در این صورت $p^n \nmid a$. یعنی، $p|b$ و از آنجا که، $p^n \mid b^n$. بنابراین $b^n \in Q$.
در نتیجه (p^n) یک ایده آل اولیه‌ی $\mathbb{Z}$ است.

اکنون فرض کنیم $Q = (p)^n$. در این صورت $\sqrt{Q} = \sqrt{(p)^n}$. از آنجا که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $\sqrt{I} = \sqrt{I^n}$. از این رو، $\sqrt{Q} = \sqrt{(p)}$. از طرفی از اینکه به ازای هر ایده آل اوّل p از R داریم، $\sqrt{p} = p$. بنابراین $\sqrt{Q} = (p) = p$. در نتیجه Q یک ایده آل $p = (p)$ - اولیه است.

۱-۲ پیش فرض های مرتبط با گراف های جبری، گراف های شمارنده‌ی صفر و گراف های جامع

در این بخش رابطه‌ی بین $T(\Gamma_I(R))$ و $T(\Gamma(R/I))$ را بررسی می کنیم.

نکته ۱-۲-۱: گزاره زیر برقرار است:

$$\mathrm{Reg}(R/I) = \{a + I : a \notin S(I)\}.$$

برهان: داریم $\mathrm{Reg}(R/I) = \left\{a + I \in R/I : (a + I)(s + I) \neq ۰ \text{ ، به ازای هر } ۰ \neq s + I \in R/I\right\}$.

$$= \left\{a + I \in R/I : as + I \neq ۰,\ s \notin I \text{ به ازای هر}\right\}$$

$$= \left\{a + I \in R/I : as \notin I,\ s \in R - I \text{ به ازای هر}\right\}$$

$$= \{a + I : a \notin S(I)\}$$

نکته۱-۲-۲: $Z(R/I)$ یک ایده آل R/I است اگر و فقط اگر $S(I)$ یک ایده آل R باشد.

برهان: بنابر نکته‌ی ۱-۱-۲۵، واضح است.

نمادگذاری: فرض کنیم $\mathrm{Reg}(\Gamma(R/I))$ یک زیرگراف از $T(\Gamma(R/I))$ القا شده با رئوس $\mathrm{Reg}(R/I)$ باشد که در آن $\mathrm{Reg}(R/I)$ مجموعه‌ی تمام اعضای منظم R/I است. همچنین $Z(\Gamma(R/I))$ یک زیرگراف از $T(\Gamma(R/I))$ القا شده با رئوس $Z(R/I)$ است.

مثال۱-۲-۳: فرض کنیم $R = \mathbb{Z}_۸$، $S = \mathbb{Z}_۴ \times \mathbb{Z}_۲$ و $I = \{\bar{۰}, \bar{۲}, \bar{۴}, \bar{۶}\} \trianglelefteq R$، $J = \{\bar{۰}\} \times \mathbb{Z}_۲ \trianglelefteq S$. در این صورت

(۱) $S(I) = I$

(۲) $S(J) = \{(\bar{۰}, \bar{۰}), (\bar{۰}, \bar{۱}), (\bar{۲}, \bar{۰}), (\bar{۲}, \bar{۱})\}$.

برهان: (۱) فرض کنیم $R = \mathbb{Z}_۸ = \{\bar{۰}, \bar{۱}, \bar{۲}, \bar{۳}, \bar{۴}, \bar{۵}, \bar{۶}, \bar{۷}\}$.

از آنجا که $S(I) = \left\{r \in R \;\middle|\; rs \in I,\ s \in R - I \text{ به ازای}\right\}$ بدیهی است که همواره $I \subseteq S(I)$.

کافی است نشان دهیم $S(I) \subseteq I$. فرض کنیم $x \in S(I)$. در این صورت عضوی مانند y موجود است به طوری که $y \in R - I$ و $xy \in I$. از آنجا که $I = \{\bar{۰}, \bar{۲}, \bar{۴}, \bar{۶}\}$ و y عددی فرد است، پس x باید عددی زوج باشد. پس $x \in I$. بنابراین $S(I) \subseteq I$، در نتیجه $S(I) = I$.

(۲): فرض کنیم $J = \{\bar{۰}\} \times \mathbb{Z}_۲ = \{\bar{۰}\} \times \{\bar{۰}, \bar{۱}\} = \{(\bar{۰}, \bar{۰}), (\bar{۰}, \bar{۱})\} \trianglelefteq \mathbb{Z}_۴ \times \mathbb{Z}_۲$. در این صورت

$$S(J) = \left\{(a , b) \in S = \mathbb{Z}_۴ \times \mathbb{Z}_۲ \;\middle|\; (a , b)(c , d) \in J ,\ \ (c , d) \in S - J \text{ به ازای } \right\}.$$

از آنجا که $S = \mathbb{Z}_۴ \times \mathbb{Z}_۲ = \{(\bar{۰}, \bar{۰}), (\bar{۰}, \bar{۱}), (\bar{۱}, \bar{۰}), (\bar{۱}, \bar{۱}), (\bar{۲}, \bar{۰}), (\bar{۲}, \bar{۱}), (\bar{۳}, \bar{۰}), (\bar{۳}, \bar{۱})\}$ و

$S - J = \{(\bar{۱}, \bar{۰}), (\bar{۱}, \bar{۱}), (\bar{۲}, \bar{۰}), (\bar{۲}, \bar{۱}), (\bar{۳}, \bar{۰}), (\bar{۳}, \bar{۱})\}$، برهان واضح است.

مثال ۱-۲-۴: با نمادهای بالا گراف های $T(\Gamma_I(R))$ و $T(\Gamma_J(S))$ اجتماع دو کپی مجزای $K^۴$ هستند.

برهان: می‌دانیم که در گراف $T(\Gamma_I(R))$ رئوس $y \in R$ و x ، مجاورند اگر و فقط اگر $x + y \in S(I)$. به طور مشابه در گراف $T(\Gamma_J(S))$ رئوس $y \in R$ و x مجاورند اگر و فقط اگر $x + y \in S(J)$.

از آنجا که $R = \mathbb{Z}_۸ = \{\bar{۰}, \bar{۱}, \bar{۲}, \bar{۳}, \bar{۴}, \bar{۵}, \bar{۶}, \bar{۷}\}$ و $S(I) = I$، برهان واضح است. زیرا

$\bar{۰} + \bar{۱} = \bar{۱} \notin S(I)$	$\bar{۱} + \bar{۲} = \bar{۳} \notin S(I)$	$\bar{۲} + \bar{۳} = \bar{۵} \notin S(I)$
$\bar{۰} + \bar{۲} = \bar{۲} \in S(I)$	$\bar{۱} + \bar{۳} = \bar{۴} \in S(I)$	$\bar{۲} + \bar{۴} = \bar{۶} \in S(I)$
$\bar{۰} + \bar{۳} = \bar{۳} \notin S(I)$	$\bar{۱} + \bar{۴} = \bar{۵} \notin S(I)$	$\bar{۲} + \bar{۵} = \bar{۷} \notin S(I)$
$\bar{۰} + \bar{۴} = \bar{۴} \in S(I)$	$\bar{۱} + \bar{۵} = \bar{۶} \in S(I)$	$\bar{۲} + \bar{۶} = \bar{۸} \in S(I)$
$\bar{۰} + \bar{۵} = \bar{۵} \notin S(I)$	$\bar{۱} + \bar{۶} = \bar{۷} \notin S(I)$	$\bar{۲} + \bar{۷} = \bar{۹} \notin S(I)$
$\bar{۰} + \bar{۶} = \bar{۶} \in S(I)$	$\bar{۱} + \bar{۷} = \bar{۸} \in S(I)$	
$\bar{۰} + \bar{۷} = \bar{۷} \notin S(I)$		
$\bar{۳} + \bar{۴} = \bar{۷} \notin S(I)$	$\bar{۴} + \bar{۵} = \bar{۹} \notin S(I)$	$\bar{۵} + \bar{۶} = \overline{۱۱} \notin S(I)$
$\bar{۳} + \bar{۵} = \bar{۸} \in S(I)$	$\bar{۴} + \bar{۶} = \overline{۱۰} \in S(I)$	$\bar{۵} + \bar{۷} = \overline{۱۲} \in S(I)$
$\bar{۳} + \bar{۶} = \bar{۹} \notin S(I)$	$\bar{۴} + \bar{۷} = \overline{۱۱} \notin S(I)$	$\bar{۶} + \bar{۷} = \overline{۱۳} \notin S(I)$
$\bar{۳} + \bar{۷} = \overline{۱۰} \in S(I)$		