چکیده

در این پایان نامه به بحث و بررسی روشی مبتنی بر ماتریس‌های تاپلیتز برای حل عددی معادلات انتگرال بر اساس [۱] می‌پردازیم. در این روش ابتدا بازهٔ انتگرالگیری را به زیربازه‌های مساوی تقسیم و جملهٔ انتگرالی معادله انتگرال اولیه را به مجموع متناهی از انتگرالها روی زیربازه‌ها تبدیل می‌کنیم. سپس با استفاده از توابع کمکی، هر یک از انتگرالها روی زیربازه‌ها را تقریب زده و به این ترتیب، معادله انتگرال اولیه را به یک دستگاه جبری غیرخطی تبدیل می‌کنیم. این روش برای معادلات انتگرال هامراشتاین با هستهٔ منفرد ضعیف در [۱] توسط عبدو[۱] به کار گرفته شده است و هدف ما در این پایان‌نامه به کارگیری و تحلیل روش فوق برای معادلات انتگرال هامراشتاین با فرم‌های غیرخطی و هسته‌های مختلف از جمله فرم‌های غیرخطی جبری و نمایی و هسته جدایی‌پذیرمی‌باشد که نتایج به دست آمده در فصول چهار و پنج ارائه شده است.
نکتهٔ مهم در مورد روش ارائه شده، شکل ماتریس ضرایب دستگاه غیرخطی حاصله می‌باشد که بر اساس نتایج تئوری و عددی ارائه شده در پایان‌نامه به یکی از شکلهای تاپلیتز، متقارن مرکزی، پادمتقارن مرکزی، قرینه سطری، قرینه ستونی، متقارن سطری و متقارن ستونی است. به علاوه کاهش پیچیدگی محاسباتی و زمان حل دستگاه حاصله، در قالب برخی نتایج عددی مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

کلمات کلیدی: معادله انتگرال هامراشتاین؛ ماتریس تاپلیتز؛ دستگاه جبری غیرخطی؛ پیچیدگی محاسباتی.

[۱] M.A.Abdou

فهرست جدول‌ها

فهرست مندرجات

کاربرد معادلات انتگرال غیرخطی در مهندسی، فیزیک و... موجب اهمیت فراوان این دسته از معادلات و حل آنها شده است. از آنجا که معادلات انتگرال هامراشتاین [۱] دسته مهمی از معادلات انتگرال غیرخطی می‌باشند، در این رساله روشی مبتنی بر ماتریس تاپلیتز برای حل عددی این معادلات معرفی شده است. حل عددی این دسته از معادلات انتگرال با استفاده از روشهایی مانند سینک، سینک – کالوکیشن و ... امکان‌پذیر می‌باشد، اما آنچه در روش تاپلیتز مهم است حالت خاص دستگاه جبری غیرخطی بدست آمده و در نتیجه کاهش زمان محاسباتی و همچنین دقت قابل قبول این روش می‌باشد. در این پایان‌نامه روش مذکور را برای معادلات انتگرال غیرخطی هامراشتاین با بازهٔ انتگرالگیری متقارن شرح داده‌ایم، در عین حال روش فوق برای معادلات انتگرال در هر بازهٔ دلخواه نیز قابل اجراست. این پایان‌نامه را در پنج فصل به شرح زیر تدوین کرده‌ایم:

فصل اول: در این فصل به بیان برخی از تعاریف مقدماتی مورد استفاده در فصل‌های بعد از جمله معرفی برخی از فضاهای توپولوژیکی و ماتریس‌های خاص پرداخته و در ادامه، روش تکراری نیوتن را برای حل عددی سیستمهای غیرخطی معرفی کرده‌ایم.

فصل دوم: در این فصل مختصری در مورد معادلات انتگرالی هامراشتاین و شکل استاندارد آنها توضیح داده و در ادامه معادلات انتگرال با هسته منفرد ضعیف را معرفی کرده و یکی از روشهای موجود برای حل این دسته از معادلات را بیان کرده‌ایم. در پایان این فصل به معرفی برخی از روش‌های تکراری برای حل معادلات انتگرال هامراشتاین پرداخته‌ایم.

فصل سوم: در فصل سوم روش ماتریس تاپلیتز را برمبنای [۱] برای حل عددی معادلات انتگرال هامراشتاین معرفی کرده و در ادامه به کاربرد این روش برای دو معادله انتگرال غیرخطی با هسته منفرد ضعیف اشاره کرده‌ایم. در پایان این فصل به چگونگی پیاده‌سازی روش مذکور برای برخی از انواع دیگر معادلات انتگرال پرداخته‌ایم.

فصل چهارم: در این فصل به عنوان فصل اصلی رساله، روش معرفی‌شده را برای برخی از انواع مختلف معادلات انتگرال هامراشتاین با فرم‌های غیرخطی و هسته‌های مختلف از جمله فرم غیرخطی جبری و نمایی و هسته‌های جدایی‌پذیر به کار برده و در هر حالت در مورد شکل خاص ماتریس ضرایب

---
[۱] Hammerstein Integral Equations

حاصل شده بحث می‌کنیم.

فصل پنجم: در فصل پنجم روش ارائه شده را با برخی روش‌های عددی رایج مقایسه کرده و سپس به تحلیل پاره‌ای نتایج عددی و تجربی برای مسائل مختلف پرداخته و میزان خطا و زمان محاسباتی را در هر مورد به دست می آوریم.

فصل ۱

مقدمات و تعاریف اولیه

۱.۱ مروری بر فضاهای توپولوژیکی

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید X و Y دو فضای خطی و $T: X \longrightarrow Y$ یک عملگر باشد که به هر عضو $x \in X$، یک عضو یکتا نظیر $y \in Y$ را منتقل کند.

اپراتور T را خطی گوئیم هرگاه دامنه آن یک فضای خطی باشد و برای هر $x, y \in D(T)$ و اسکالرهای $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty.$$

به عنوان مثال ماتریس‌های $n \times m$ با تعریف معمولی ضرب ماتریس در بردار، یک عملگر از $\mathbb{R}^m$ به $\mathbb{R}^n$ می باشند.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنید X یک فضای برداری خطی باشد. یک نرم روی X، تابع $\| . \| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ با شرایط زیر برای هر $x, y \in \mathbb{X}$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ می باشد:([۳])

۱. $\| x \| \geq 0$ و $\| x \| = 0 \longleftrightarrow x = 0$

۲. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

۳. $\| \alpha x \| = | \alpha | \| x \|$

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنید $x \in \mathbb{R}^n$ و $p \in \mathbb{R}$، در این صورت تابع $\| . \|_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ را $p-$نرم می‌نامیم و عبارت است از:

$$\| x \|_p = (\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p)^{\frac{1}{p}}.$$

تعریف ۴.۱.۱ (نامساوی هولدر) فرض کنید $p, q > 1$ دو مقدار حقیقی باشند به طوری که $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ و $x, y \in \mathbb{R}^n$، آن‌گاه

$$\sum_{i=1}^{n} | x_i y_i | \leq (\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} | y_i |^q)^{\frac{1}{q}}.$$

تعریف ۵.۱.۱ یک فضای نرمدار خطی را کامل گوئیم، هرگاه هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد.

تعریف ۶.۱.۱ یک فضای باناخ، فضای نرمدار خطی کامل است.

قضیه ۱.۱.۱ (قضیه نقطه ثابت باناخ) فرض کنید K یک مجموعه ناتهی بسته در فضای باناخ V و $T : K \longrightarrow K$ یک تابع انقباضی با ثابت انقباضی α، $0 \leq \alpha < 1$، باشند. در این صورت $u \in K$ منحصربفرد موجود است به طوری که $u = T(u)$.

۱.۱.۱ فضای $L^p(a,b)$ ، $1 \leq p \leq \infty$

فرض کنید $(a,b) \subset \mathbb{R}$ و $1 \leq p < \infty$. فضای همه توابع اندازه‌پذیر $u : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ به طوری که $\int_a^b \mid u(x) \mid^p dx < \infty$ را با $L^p(a,b)$ نشان می‌دهیم. فضای $L^p(a,b)$ با نرم زیر یک فضای باناخ می‌باشد:

$$\| u \|_{L^p(a,b)} = \left(\int_a^b \mid u(x) \mid^p dx\right)^{1/p}.$$

در حالتیکه $p = +\infty$، $L^\infty(a,b)$ فضای تمام توابع اندازه‌پذیر $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ می‌باشد که $f(x)$ تقریباً همه جا روی یک مجموعه با اندازه صفر کراندار است. اگر M کوچکترین عددی باشد که شرط $\mid f(x) \mid < M$ تقریباً همه جا روی یک زیر مجموعه با اندازه صفر برقرار باشد، آنگاه نرم را روی فضای $L^\infty(a,b)$ به صورت زیر خواهیم داشت: ([۴, ۵])

$$\| f \|_{L^\infty(a,b)} = ess \sup_{x\in(a,b)} \mid f(x) \mid = M.$$

فضای $L^p(a,b)$، فضای باناخ می‌باشد.

تعریف ۷.۱.۱ مجموعه دنباله‌های نامتناهی کراندار $x = (x_1, x_2, \dots)$ از اعداد را l^∞ می‌نامیم. l^∞ با جمع برداری و ضرب اسکالر زیر یک فضای برداری است:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots) \quad , \quad cx = (cx_1, cx_2, \dots) \quad , \quad c \in \mathbb{R}.$$

برای هر $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^\infty$ تابع $\| . \|_\infty : l^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ را نرم سوپریمم در l^∞ می‌نامیم و به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\| x \|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} | x_i | .$$

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنید $a, b \in \mathbb{R}$ و $a < b$. مجموعه همه توابع پیوسته از $[a, b]$ به توی $[a, b]$ را با $C[a, b]$ نمایش می‌دهیم.

$C[a, b]$ با جمع برداری و ضرب اسکالری زیر یک فضای برداری است:

$$\forall f, g \in C[a, b] \quad , \quad c \in \mathbb{R} \quad , \quad t \in [a, b] \quad ; \quad (f+g)(t) = f(t)+g(t) \quad , \quad (cf)(t) = cf(t).$$

برای هر $f \in C[a, b]$ تابع $\| . \|_\infty : C[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ را نرم سوپریمم در $C[a, b]$ می‌نامیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\| f \|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} | f(t) | .$$

۲.۱.۱ مشتق گتیوکس و فرچه

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنید $P : X \longrightarrow Y$، یک عملگر بین فضاهای نرمدار خطی X و Y باشد.

اگر برای $x_0 \in X$ عملگر خطی $P'_w(x_0)$ موجود باشد به طوری که برای هر $h \in X$ داشته باشیم:

$$\lim_{s \to 0} \frac{P(x_0 + sh) - P(x_0)}{s} = P'_w(x_0)h,$$

آن گاه P را به طور ضعیف مشتق پذیر در x_0 می گوئیم.

اپراتور $P'_w(x_0)$ را مشتق گتیوکس[1] (ضعیف) P در x_0 می نامیم.

[1] Gateaux Derivative

تعریف ۱.۱.۱۰ فرض کنید $P: X \longrightarrow Y$، یک عملگر بین فضاهای نرمدار خطی X و Y باشد. اگر برای $x_\circ \in X$ اپراتور خطی کراندار $P'(x_\circ)$ موجود باشد به قسمی که برای هر $\circ \leftarrow \| \triangle x \|$ داشته باشیم:

$$\lim_{\|\triangle x\| \to \circ} \frac{\| P(x_\circ + \triangle x) - P(x_\circ) - P'(x_\circ)\triangle x \|}{\| \triangle x \|} = \circ$$

در این صورت P را به طور قوی مشتق‌پذیر در $x_\circ$ گوئیم و اپراتور $P'(x_\circ)$ را مشتق فرچه[۲] (قوی) P در $x_\circ$ می‌نامیم.

قضیه ۱.۱.۲ اگر عملگر P در $x_\circ$ به طور قوی مشتق‌پذیر باشد، آنگاه به طور ضعیف مشتق‌پذیر می‌باشد و

$$P'_w(x_\circ) = P'(x_\circ).$$

۱.۲ معرفی برخی ماتریس‌های خاص

تعریف ۱.۲.۱ یک ماتریس $N \times N$ تاپلیتز[۳]، با $(۲N - ۱)$ درایه R_k مشخص می شود (R_k می‌تواند حقیقی یا مختلط باشد). هر کدام از این اعداد روی یک قطر، از سمت چپِ بالا به راستِ پایین قرار می گیرند و ماتریس تاپلیتز را به صورت زیر تشکیل می‌دهند:

$$\begin{pmatrix} R_\circ & R_{-۱} & \dots & R_{-(N-۱)} \\ R_۱ & R_\circ & \dots & R_{-(N-۲)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{N-۱} & R_{N-۱} & \dots & R_\circ \end{pmatrix} \qquad (۱-۱)$$

---

[۲] Frechet Derivative

[۳] Toeplitz Matrix

بنابراین یک دستگاه معادلهٔ تاپلیتز خطی برای ماتریس (۱—۱) به صورت زیر می‌باشد:

$$\sum_{j=۱}^{N} R_{i-j}\, x_j = y_i \quad , \quad (i = ۱, \dots, N)$$

که در آن x_j ها مقادیر مجهول می‌باشند.

ماتریس تاپلیتز(۱—۱) متقارن است هرگاه برای هر k، $R_k = R_{-k}$.

۱.۱.۲.۱ خواص ماتریس تاپلیتز

۱. مجموع وتفاضل دو ماتریس تاپلیتز، یک ماتریس تاپلیتز می باشد.

۲. حاصلضرب هر دو ماتریس تاپلیتز، لزوماً تاپلیتز نیست.

مثال: ماتریس‌های تاپلیتزِ A و B را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ -۱ & ۱ & ۰ \\ ۳ & -۱ & ۱ \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -۱ & -۲ & ۳ \\ ۱ & -۱ & -۲ \\ ۰ & ۱ & -۱ \end{pmatrix}$$

حاصلضرب این دو ماتریس، ماتریس تاپلیتز نیست:

$$AB = \begin{pmatrix} -۱ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۵ \\ -۴ & -۵ & ۱۰ \end{pmatrix}$$

۳. معکوس یک ماتریس تاپلیتز، لزوماً تاپلیتز نیست.

مثال: ماتریس تاپلیتز A را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{pmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۲ \end{pmatrix}$$

معکوس ماتریس A عبارت است از:

$$A^{-۱} = \frac{۱}{۱۳} \begin{pmatrix} ۵ & -۲ & ۱ \\ ۳ & ۴ & -۲ \\ -۱ & ۳ & ۵ \end{pmatrix}$$

مشاهده می‌شود که ماتریس $A^{-۱}$ تاپلیتز نیست.

ماتریس‌های تاپلیتز به دلیل تکراری بودن درایه‌های روی قطر اصلی و قطرهای موازی با آن، برای ذخیره‌سازی حجم کمتری را اشغال می‌کنند. به این صورت که برای ذخیره‌سازی یک ماتریس تاپلیتز $n \times n$ که شامل $n^۲$ درایه می‌باشد، تنها با ذخیره کردن $(۲n - ۱)$ درایه، تمام ماتریس را در اختیار داریم.

۲.۱.۲.۱ حل دستگاه معادلهٔ تاپلیتز خطی متقارن

اینک به معرفی روشی سریع برای یافتن جواب دستگاه معادلهٔ تاپلیتز خطی متقارن می‌پردازیم.
دستگاه تاپلیتز M−بعدی زیر را در نظر بگیرید:

$$\sum_{j=۱}^{M} R_{i-j}\, x_j^{(M)} = y_i \quad , \quad (i = ۱, \ldots, M) \tag{۱−۲}$$

برای هر M، $(M = ۱, \ldots, N)$ دستگاه (۲−۱) را حل می‌کنیم. فرض کنید $x_j^{(M)}$ جواب حاصل شده در مرحله M−ام و جواب نهایی در مرحله $M = N$ حاصل شود و به علاوه $x_j^{(N)}$ جواب نهایی دستگاه تاپلیتز متقارن باشد.

با رفتن از مرحله M−ام به مرحله $M + ۱$−ام دستگاه (۲−۱)، به دستگاه زیر تبدیل می‌شود:

$$\sum_{j=۱}^{M} R_{i-j}\, x_j^{(M+۱)} + R_{i-(M+۱)}\, x_{M+۱}^{(M+۱)} = y_i \quad , \quad (i = ۱, \ldots, M + ۱) \tag{۱−۳}$$

با حذف y_i از طرفین روابط (۲−۱) و (۳−۱) داریم:

$$\sum_{j=۱}^{M} R_{i-j}\, \Big(\frac{x_j^{(M)} - x_j^{(M+۱)}}{x_{M+۱}^{(M+۱)}} \Big) = R_{i-(M+۱)} \quad , \quad (i = ۱, \ldots, M) \tag{۱−۴}$$

با تبدیل $i \to M + ۱ - i$ و $j \to M + ۱ - j$ در رابطه (۴−۱) داریم:

$$\sum_{j=۱}^{M} R_{i-j} G_j^{(M)} = R_{-i} \tag{۱−۵}$$

که در آن:

$$G_j^{(M)} = \frac{x_{M+۱-j}^{(M)} - x_{M+۱-j}^{(M+۱)}}{x_{M+۱}^{(M+۱)}} \tag{۱−۶}$$

این رابطه را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$x^{(M+1)}_{M+1-j} = x^{(M)}_{M+1-j} - x^{(M+1)}_{M+1}\, G^{(M)}_j \quad , \quad (j = 1, \ldots, M) \qquad (1-7)$$

بنابراین با به دست آوردن مقادیر $x^{(M)}$ و $G^{(M)}$ در مرحله M–ام و مقدار $x^{(M+1)}_{M+1}$ در مرحله $M+1$–ام و با استفاده از رابطه (۷–۱) مقادیر $x^{(M+1)}_j$ برای $j = 1, \ldots, M$ حاصل می شوند.
برای به دست آوردن $x^{(M+1)}_{M+1}$ به شکل زیر عمل می‌کنیم:
با قرار دادن $i = M+1$ در رابطه (۳–۱) داریم:

$$\sum_{j=1}^{M} R_{M+1-j}\, x^{(M+1)}_j + R_0\, x^{(M+1)}_{M+1} = y_{M+1} \qquad (1-8)$$

و از رابطه (۶–۱) داریم:

$$G^{(M)}_{M+1-j} = \frac{x^{(M)}_j - x^{(M+1)}_j}{x^{(M+1)}_{M+1}} \qquad (1-9)$$

در نتیجه با استفاده از روابط (۸–۱) و (۹–۱) مقدار $x^{(M+1)}_{M+1}$ به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$x^{(M+1)}_{M+1} = \frac{\sum_{j=1}^{M} R_{M+1-j}\, x^{(M)}_j - y_{M+1}}{\sum_{j=1}^{M} R_{M+1-j}\, G^{(M)}_{M+1-j} - R_0} \qquad (1-10)$$

تنها مسأله باقیمانده در این مرحله پیدا کردن یک رابطه بازگشتی برای G می‌باشد.
برای یک دستگاه خطی با ماتریس ضرایب نامتقارن، دو مجموعه مجزا از جواب‌ها به صورت زیر وجود دارد. فرض کنید $A_{n\times n}$ یک ماتریس نامتقارن و $b_{n\times 1}$ یک بردار دلخواه باشد. اگر $detA \neq 0$، در این صورت بردارهای $x_{n\times 1}$ و $z_{n\times 1}$ وجود دارند به طوری که $Ax = b$ و $z^T A = b^T$. آنگاه x را جواب راست و z را جواب چپ می‌نامیم. بدیهی است که در صورت متقارن بودنِ A، x و z مساوی خواهند بود.
در رابطه (۲–۱)، x_j ها جوابهای راست می باشند و جوابهای چپ (z_j) را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\sum_{j=1}^{M} R_{j-i}\, z^{(M)}_j = y_i \qquad (1-11)$$

و با ادامه روند قبلی به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\sum_{j=۱}^{M} R_{i-j}\, H_j^{(M)} = R_i \qquad (۱-۱۲)$$

که در آن:

$$H_j^{(M)} = \frac{z_{M+۱-j}^{(M)} - z_{M+۱-j}^{(M+۱)}}{z_{M+۱}^{(M+۱)}} \qquad (۱-۱۳)$$

از مقایسه روابط (۲-۱) و (۱۲-۱) مشاهده می‌شود که اگر $R_i \longrightarrow y_i$، $H_j^{(M)}$ در رابطه (۱۲-۱) همان $x_j^{(M)}$ در رابطه (۲-۱) می‌باشد. پس رابطه (۱۰-۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$H_{M+۱}^{(M+۱)} = \frac{\sum_{j=۱}^{M} R_{M+۱-j}\, H_j^{(M)} - R_{M+۱}}{\sum_{j=۱}^{M} R_{M+۱-j}\, G_{M+۱-j}^{(M)} - R_۰} \qquad (۱-۱۴)$$

به همین ترتیب از مقایسه روابط (۵-۱) و (۱۱-۱) مشاهده می‌شود که $G_j^{(M)}$ در رابطه (۵-۱) همان $z_j^{(M)}$ در رابطه (۱۱-۱) می‌باشد به شرطی که $R_{-i} \longrightarrow y_i$. پس می‌توان نوشت:

$$G_{M+۱}^{(M+۱)} = \frac{\sum_{j=۱}^{M} R_{j-M-۱}\, G_j^{(M)} - R_{-M-۱}}{\sum_{j=۱}^{M} R_{j-M-۱}\, H_{M+۱-j}^{(M)} - R_۰} \qquad (۱-۱۵)$$

به همین ترتیب از رابطه (۷-۱) می‌توان نوشت:

$$G_j^{(M+۱)} = G_j^{(M)} - G_{M+۱}^{(M+۱)}\, H_{M+۱-j}^{(M)} \qquad (۱-۱۶)$$

$$H_j^{(M+۱)} = H_j^{(M)} - H_{M+۱}^{(M+۱)} G_{M+۱-j}^{(M)} \qquad (۱-۱۷)$$

با مقادیر اولیه $H_1^{(1)} = \frac{R_1}{R_0}$، $G_1^{(1)} = \frac{R_{-1}}{R_0}$ و $x_1^{(1)} = \frac{y_1}{R_0}$ شروع کرده و در مرحله M با استفاده از روابط (۱۴–۱) و (۱۵–۱) مقادیر $H_{M+1}^{(M+1)}$ و $G_{M+1}^{(M+1)}$ را به دست می‌آوریم و سپس با قرار دادن این مقادیر در روابط (۱۶–۱) و (۱۷–۱) مقادیر $H_j^{(M+1)}$ و $G_j^{(M+1)}$ را برای $j = 1, \ldots, M$ به دست می‌آوریم و از آنجا مقادیر $x^{(M+1)}$ و $z^{(M+1)}$ حاصل می‌شوند.

فرض کنید دترمینان کهاد پیشروی k–ام ماتریس تاپلیتز اصلی صفر باشد، در این صورت دستگاه:

$$\sum_{j=1}^{k} R_{i-j} x_j^{(k)} = y_i \quad , \quad i = 1, \ldots, k$$

جواب ندارد(زیرا دترمینان ماتریس ضرایب این دستگاه صفر می‌باشد) و از این مرحله روند پیدا کردن جواب متوقف می‌شود. بدیهی است که در چنین حالتی، الگوریتم فوق ناکارآمد می باشد.

تعریف ۱.۲.۲ ماتریس دوری[1] یک ماتریس تاپلیتز به شکل زیر می‌باشد:

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_1 & \cdots & c_{n-1} & c_0 \end{pmatrix}$$

همانطور که مشاهده می‌کنید یک ماتریس دوری$n \times n$ با n درایه(یک سطر) مشخص می‌شود. به این صورت که هر سطر، از حرکت سطر بالایی به اندازه یک درایه به سمت راست به دست می آید.

۱.۲.۲.۱ خواص ماتریس دوری

۱. مجموع، تفاضل و حاصلضرب هر دو ماتریس دوری یک ماتریس دوری است.

۲. معکوس هر ماتریس دوری یک ماتریس دوری است.

[1] Cyclic Matrix

تعریف ۳.۲.۱ دو ماتریس $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ را متشابه گوئیم هرگاه ماتریس نامنفرد $P_{n\times n}$ موجود باشد بطوری که:

$$A = P^{-1}BP.$$

دترمینان، اثر و مقادیر ویژه دو ماتریس متشابه یکسان هستند.

تعریف ۴.۲.۱ ماتریس مربعی Q را متعامد گوئیم هرگاه:

$$Q^T = Q^{-1}.$$

تعریف ۵.۲.۱ در تعریف ماتریس‌های متشابه، اگر P یک ماتریس متعامد باشد، آنگاه A و B متعامداً متشابه می‌باشند. یعنی

$$A = P^T BP.$$

دترمینان، اثر و مقادیر ویژه دو ماتریس متعامداً متشابه یکسان می‌باشد.

تعریف ۶.۲.۱ فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ ماتریسی دلخواه با درایه‌های a_{ij}، $i = 1,\dots,n$ و $j = 1,\dots,m$ باشد. در این صورت $C \in \mathbb{C}^{m\times n}$ ترانهاده ماتریس A با درایه‌های c_{ij}، $i = 1,\dots,m$ و $j = 1,\dots,n$ می باشد که c_{ij} ها عبارتند از $c_{ij} = a_{ji}$. ماتریس C را با A^T نمایش می‌دهیم.
ترانهاده مزدوج ماتریس A را با A^H نمایش می دهیم و عبارت است از:$A^H = \overline{A}^T = \overline{A^T}$.
ماتریس A را متقارن گوئیم هرگاه $A^T = A$.
ماتریس A را پادمتقارن گوئیم هرگاه $A^H = A$.

تعریف ۷.۲.۱ یک ماتریس $n\times n$ مانند $A = [a_{i,j}]$، متقارن مرکزی[1] است هرگاه درایه‌های آن در رابطه زیر صدق کنند:

$$a_{i,j} = a_{n-i+1,\, n-j+1} \quad , \quad i,j = 1,2,\dots,n.$$

[1] Centrosymmetric

به بیان دیگر ماتریس متقارن مرکزی به ماتریسی گفته می شود که نسبت به محل تقاطع قطرها متقارن باشد.

این ماتریس توسط ماتریس مقدماتی $J = \begin{pmatrix} ۰ & \cdots & ۰ & ۱ \\ ۰ & \cdots & ۱ & ۰ \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ۱ & \cdots & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$ به صورت $A = JAJ$ نوشته می شود که در آن ماتریس J دارای مشخصات زیر می باشد:

۱. درایه‌های روی قطر فرعی ۱ و سایر درایه ها صفر می‌باشد.

۲. $J^T = J$ و $J^۲ = I$، که I ماتریس همانی است.

۳. ضرب هر ماتریس از راست در J، ترتیب سطرهای آن را برعکس می‌کند.

۴. ضرب هر ماتریس از چپ در J، ترتیب ستونهای آن را برعکس می‌کند.

در ادامه به بررسی ویژگیهای ماتریس متقارن مرکزی می‌پردازیم:

۱.۷.۲.۱ خواص ماتریس متقارن مرکزی

۱. مجموعه ماتریسهای متقارن مرکزی نسبت به ضرب و جمع بسته بوده و اگر A ماتریس متقارن مرکزی با بعد n و معکوس‌پذیر باشد، آنگاه $A^{-۱}$ نیز متقارن مرکزی است.

۲. اگر A ماتریس متقارن مرکزی از مرتبه زوج باشد به قسمی که $n = ۲m$، A می تواند به فرم بلوکی زیر نوشته شود:

$$A = \begin{pmatrix} B & JCJ \\ C & JBJ \end{pmatrix}$$

که در آن B و C ماتریس‌های $m \times m$ دلخواه هستند و $J_{m\times m}$ نیز ماتریس مقدماتی (معرفی شده در همین صفحه) می‌باشد. در این صورت دترمینان ماتریس A به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$|A| = |B + JC|.|B - JC|,$$

و معکوس A نیز عبارت است از:

$$A^{-۱} = \begin{pmatrix} P & DJ \\ JD & JPJ \end{pmatrix}$$

که در آن:

$$۲P = (B + JC)^{-۱} + (B - JC)^{-۱}$$

$$۲D = (B + JC)^{-۱} - (B - JC)^{-۱}.$$

جزئیات بیشتر در رابطه با این خواص در مراجع [۱۰] و [۱۱] موجود می‌باشد.آنچه واضح است هزینه محاسباتی برای محاسبه معکوس و دترمینان یک ماتریس متقارن مرکزی نسبت به یک ماتریس کامل به طور محسوسی کاهش می‌یابد. $Chen$ در [۹] نشان داده است که هزینه محاسباتی (شامل هزینه های مربوط به پیاده‌سازی روش و حل دستگاه) می‌تواند به میزان حداکثر ۷۵% کاهش یابد.

تعریف ۸.۲.۱ یک ماتریس $n \times n$ مانند $R = [r_{i,j}]$ پاد متقارن مرکزی[۱] است هرگاه درایه‌های آن در رابطه زیر صدق کنند:

$$r_{i,j} = -r_{n-i+۱,\, n-j+۱} \quad , \quad i, j = ۱, ۲, \ldots, n.$$

به بیان دیگر، ماتریس پادمتقارن مرکزی ماتریسی است که درایه‌های آن نسبت به محل تقاطع قطرها قرینه باشند. ماتریس پادمتقارن مرکزی R توسط ماتریس مقدماتی J (معرفی شده در صفحه ۱۴) بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$R = -JRJ.$$

در ادامه به بررسی ویژگیهای خاص این ماتریس‌ها می‌پردازیم.

۱.۸.۲.۱ خواص ماتریس پادمتقارن مرکزی

۱. مجموعه ماتریسهای پادمتقارن مرکزی فقط نسبت به عمل جمع بسته بوده و اگر Q ماتریس پادمتقارن مرکزی از مرتبه n و معکوس پذیر باشد، آنگاه $Q^{-۱}$ نیز پادمتقارن مرکزی می‌باشد. از طرفی ضرب دو ماتریس پادمتقارن مرکزی یک ماتریس متقارن مرکزی است .

---
[۱] Skew Centrosymmetric