بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

رساله دکتری

گرایش جبر

عنوان

تشخیص‌پذیری گروه‌های مرتبط با گروه‌های خطی خاص تصویری از بعد ۳ توسط مرتبه و دنباله درجه‌ی آن‌ها

پژوهشگر

معصومه بی‌باک

استادان راهنما

دکتر غلامرضا رضایی‌زاده و دکتر محمدرضا درفشه

مهر ۱۳۹۲

تقدیم به بهترین های زندگیم

پدر و مادر بزرگوارم،

و همسر عزیزم.

سپاس گزاری...

سپاس بی کران پروردگار یکتا را که هستی ام بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونم شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرم نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیم ساخت.

در ابتدا از اولین و بزرگترین معلمان زندگیم، پدر و مادر بزرگوارم که مرا به جان پروردند و امید رسیدن به افق های روشن را در دلم شکوفا ساختند، و از همسر عزیزم که در این راه مرا یاری کردند از صمیم قلب نهایت تشکر را دارم.

به مصداق «من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق» بسی شایسته است از اساتید راهنمای گرامی ام جناب آقای دکتر غلامرضا رضایی زاده و جناب آقای دکتر محمدرضا درفشه که با کرامتی چون خورشید، سرزمین دل را روشنی بخشیدند و گلشن سرای علم و دانش را با راهنمایی های کارساز و سازنده بارور ساختند تقدیر و تشکر نمایم.

در پایان نیز از اساتید ارجمندم، جناب آقای دکتر محمدرضا ریسمانچیان، جناب آقای دکتر علیرضا نقی پور و سرکار خانم دکتر ندا آهنجیده که در دوران تحصیل از رهنمودهای ارزشمندشان بهرمند شده ام کمال تشکر و قدردانی را دارم.

معصومه بی باک

مهر ۱۳۹۲

اظهار نامه

در این رساله کلیهٔ مطالب بدون مرجع در فصل‌های دوم و سوم اصیل (Original) هستند.

ضمناً مقاله

[1] G.R. Rezaeezadeh, M. Bibak and M. Sajjadi, Characterization of Projective Special linear Groups in Dimention three by their orders and degree patterns, Bulletin of the Iranian Mathematical Society, submitted.

از فصل دوم و مقاله‌های

[2] M. R. Darafsheh, G. R. Rezaeezadeh, M. bibak and M. Sajjadi, OD-Characterization of almost simple groups related to ${}^2E_6(2)$, Advances in Algebra 6 (2013) 45-54.

و

[3] G.R. Rezaeezadeh, M.R. Darafsheh, M. bibak and M. Sajjadi, OD-characterization of almost simple groups related to $L_3(8)$, The Fifth Int. group theory conference of Iran, 13th-15th March 2013, Islamic Azad University, Mashhad.

از فصل سوم استخراج شده‌اند.

همچنین در ادامه تحقیقات انجام شده در این زمینه کارهای زیر نیز به‌صورت مشترک انجام شده است.

[4] M. R. Darafsheh, G. R. Rezaeezadeh, M. Sajjadi and M. Bibak, OD-Characterization of almost simple groups related to $U_3(17)$, Quasigroups and related systems 21 (2013) 49-58.

[5] G.R. Rezaeezadeh, M.R. Darafsheh, M. Sajjadi and M. Bibak, OD-characterization of almost simple groups related to $L_3(25)$, accepted in Bulletin of the Iranian Mathematical Society.

چکیده

فرض کنیم G یک گروه متناهی و $D(G)$ دنباله درجات رئوس گراف اول آن باشد. در این صورت گروه G را k-تشخیص‌پذیر توسط مرتبه و دنباله درجات رئوس گراف اول آن گوییم، هرگاه k گروه غیر یکریخت مانند H وجود داشته باشند به طوری‌که $|H| = |G|$ و $D(H) = D(G)$. حال اگر $k = ۱$، آن‌گاه گوییم گروه G تشخیص‌پذیر است.

در این رساله ابتدا نشان می‌دهیم گروه خطی خاص تصویری $PSL_۳(۲^n)$ برای $n \in \{۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۱۰, ۱۲\}$ تشخیص‌پذیر است. سپس به رده‌بندی گروه‌های تقریباً ساده مرتبط با $PSL_۳(۸)$ و $^۲E_۶(۲)$ توسط مرتبه و دنباله درجات رئوس گراف اول آن‌ها خواهیم پرداخت.

کلمات کلیدی : دنباله درجات رئوس گراف اول، k-تشخیص‌پذیری، گروه‌های تقریباً ساده

فهرست مطالب

مقدمه

در نظریه گروه‌های متناهی بسیاری از ریاضی‌دانان به مطالعه در مورد تشخیص‌پذیری گروه‌ها علاقه‌مند هستند به این صورت که ویژگی خاصی از یک گروه را مدنظر قرار می‌دهند و گروه‌هایی را که دارای چنین ویژگی هستند در حد یکریختی رده‌بندی می‌کنند. از چنین ویژگی‌هایی می‌توان به طیف گروه، گراف اول گروه و مرتبه و دنباله درجات رئوس گراف اول آن اشاره کرد.

فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد، در این صورت مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های اول $|G|$ را با $\pi(G)$ و مجموعه‌ی مرتبه‌ی عناصر گروه G را که طیف گروه گوییم با $\omega(G)$ نشان می‌دهیم.

گراف اول $\Gamma(G)$ از گروه متناهی G که گراف کگل-گرنبرگ [1] نیز نامیده می‌شود، گراف ساده‌ای با مجموعه رئوس $\pi(G)$ است که در آن دو رأس متمایز p و q مجاور هستند اگر و تنها اگر G عضوی از مرتبه‌ی pq داشته باشد.

فرض کنیم G یک گروه متناهی و $p \in \pi(G)$. در این صورت درجه رأس p که آن را با $deg(p)$ نشان می‌دهیم عبارتست از تعداد رئوسی که مجاور با p هستند. حال اگر $\pi(G) = \{p_۱, p_۲, ..., p_k\}$ که در آن $p_۱ < p_۲ < ... < p_k$، آن‌گاه $D(G) = (deg(p_۱), deg(p_۲), ..., deg(p_k))$ را دنباله درجات رئوس گراف اول گروه G می‌نامیم.

گوییم گروه متناهی G، k-تشخیص‌پذیر توسط مرتبه و دنباله درجات رئوس گراف اولش است هرگاه k گروه غیریکریخت مانند H وجود داشته باشند به طوری‌که $D(G) = D(H)$ و $|G| = |H|$. حال اگر $k = ۱$، آن‌گاه گوییم گروه G تشخیص‌پذیر است.

مفهوم تشخیص‌پذیری گروه توسط مرتبه و دنباله درجات رئوس گراف اول آن توسط درفشه [2] و همکارانش در [۱۲] معرفی گردید. سپس در ادامه تحقیقات قابل توجهی در زمینه تشخیص‌پذیری و ۲-تشخیص‌پذیری برخی از گروه‌های ساده ناآبلی توسط مرتبه و دنباله درجات رئوس گراف اول آن‌ها انجام شد که برای مطالعه بیشتر در این زمینه مراجع [۲۲]، [۲۳]، [۲۷]، [۲۸] و [۳۱] را توصیه می‌کنیم.

1. Kegel-Gruenberg
2. M. R. Darafsheh

اما به ازای $k \geq ۳$، تاکنون k-تشخیص‌پذیری هیچ گروه ساده‌ای توسط مرتبه و دنباله درجات رئوس گراف اول آن ثابت نشده است و این مسئله، همچنان به عنوان مسئله باز مطرح است.
گوییم G یک گروه تقریباً ساده است، هرگاه $S \trianglelefteq G \lesssim \mathrm{Aut}(S)$، که در آن S یک گروه ساده ناآبلی است.
شی[1] و زانگ [2] تحقیقات جالبی در زمینه k-تشخیص‌پذیری گروه‌های تقریباً ساده توسط مرتبه و دنباله درجات رئوس گراف اول آن‌ها به ازای $k \geq ۱$ انجام داده‌اند که درمراجع [۲۶]، [۲۹] و [۳۰] اشاره شده است.

این رساله مشتمل بر سه فصل است. فصل اول به بیان مفاهیم پایه که در فصل‌های بعدی مورد نیاز خواهد بود اختصاص یافته است. در فصل دوم ابتدا مفهوم تشخیص‌پذیری گروه توسط مرتبه و دنباله درجات رئوس گراف اول آن را بیان می‌کنیم. سپس به بررسی تشخیص‌پذیری گروه خطی خاص $PSL_۳(۲^n)$ به ازای nهای خاص توسط مرتبه و دنباله درجات رئوس گراف اول آن خواهیم پرداخت. در فصل سوم نیز ابتدا تشخیص‌پذیری گروه‌های تقریباً ساده مرتبط با $PSL_۳(۸)$) را بررسی می‌کنیم. سپس به بررسی تشخیص‌پذیری گروه‌های تقریباً ساده مرتبط با $^۲E_۶(۲)$ خواهیم پرداخت. در واقع نشان می‌دهیم که $PSL_۳(۸)$ و $^۲E_۶(۲)$ اولین گروه‌های تقریباً ساده‌ای هستند که همه‌ی توسیع‌های آن که توسط زیرگروه‌های گروه خودریختی خارجی‌شان بدست می‌آیند، تشخیص‌پذیرند.

1. Shi
2. Zhang

فهرست نمادها

مرتبه‌ی گروه G	$\|G\|$
مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های اول $\|G\|$	$\pi(G)$
مجموعه‌ی مرتبه‌ی عناصر G	$\omega(G)$
گراف اول G	$\Gamma(G)$
درجه راس p	$deg(p)$
دنباله درجات رئوس G	$D(G)$
تعداد مؤلفه‌های گراف اول G	$t(G)$
i امین مولفه همبند گراف اول G	$\pi_i(G)$
توسیع غیر شکافنده G توسط H	$G \cdot H$
توسیع شکافنده G توسط H	$G : H$
گروه خودریختی‌های G	$\mathrm{Aut}(G)$
گروه خودریختی‌های خارجی G	$\mathrm{Out}(G)$
H با زیرگروهی از G یکریخت است	$H \lesssim G$
زیرگروه تولید شده توسط X	$\langle X \rangle$
گروه متقارن درجه n	$\mathbb{S}_n$
گروه متناوب درجه n	$\mathbb{A}_n$
گروه دووجهی مرتبه ۲n	D_{2n}
گروه ساده آبلی مرتبه p	$\mathbb{Z}_p$
بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک m و n	(m, n)
m می‌شمارد nرا	$m \mid n$
بنیان G	$\mathrm{Socle}(G)$
مرکز G	$Z(G)$

مرکزساز H در G	$C_G(H)$
نرمال‌ساز H در G	$N_G(H)$
اندیس H در G	$\lvert G:H\rvert$
حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم گروه‌های G و H	$G \ltimes H$
حاصل‌ضرب حلقوی گروه‌های G و H	$G \wr H$
مجموعه‌ی همه‌ی p-زیرگروه‌های سیلوی G	$\mathrm{Syl}_p(G)$
میدان گالوا با q عضو	$\mathrm{GF}(q)$
مجموعه‌ی همه‌ی گروه‌های ساده با ماکسیمال شمارنده‌ی اول p	$\mathfrak{S}_p$

فصل ۱

مقدمات و پیش‌نیازها

در این فصل به بیان برخی از مفاهیم پایه که در فصل‌های بعدی مورد نیاز خواهد بود می‌پردازیم. بخش اول را به مقدمه‌ای بر گروه‌های متناهی اختصاص می‌دهیم. در بخش دوم به مطالعه مختصری از گروه‌های ساده‌ی متناهی می‌پردازیم. همچنین در بخش سوم گراف اول گروه را معرفی می‌کنیم. سپس در بخش چهارم به مطالعه گروه‌های فروبینیوس و ۲-فروبینیوس پرداخته و به برخی از ویژگی‌های این گروه‌ها اشاره می‌کنیم.

۱.۱ مقدمه‌ای بر گروه‌های متناهی

۱.۱.۱ مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. گروه G را کاملاً تحویل‌پذیر گوییم هرگاه G به حاصل‌ضرب مستقیم تعدادی متناهی از زیرگروه‌های ساده‌اش تجزیه شود. در این حالت G را یک CR-گروه می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱. گروه G را یک CR-گروه بدون مرکز گوییم ($Z(G) = ۱$) هرگاه G حاصل‌ضرب مستقیم تعداد متناهی زیرگروه ساده ناآبلی‌اش باشد.

قضیه ۳.۱.۱. *فرض کنیم R یک CR-گروه بدون مرکز باشد، بنابراین $R = R_۱ \times R_۲ \times ... \times R_k$ که در آن R_iها با حاصل‌ضرب n_i عامل یکریخت با گروه ساده‌ی ناآبلی H_i یکریخت هستند. در این صورت $\mathrm{Aut}(R) = \mathrm{Aut}(R_۱) \times \mathrm{Aut}(R_۲) \times ... \times \mathrm{Aut}(R_k)$ و $\mathrm{Aut}(R_i) \cong \mathrm{Aut}(H_i) \wr \mathbb{S}_{n_i}$ که منظور از $\mathrm{Aut}(H_i) \wr \mathbb{S}_{n_i}$ حاصل‌ضرب حلقوی بین دو گروه $\mathrm{Aut}(H_i)$ و $\mathbb{S}_{n_i}$ است.*

برهان. به مرجع [۱۷] قضیه ۳.۳.۲۰ مراجعه شود. □

تعریف ۴.۱.۱. G را یک گروه مشخصاً ساده نامیم هرگاه تنها زیرگروه‌های مشخصه‌ی آن، زیرگروه بدیهی و خود G باشد.

قضیه ۵.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه متناهی نابدیهی باشد. در این‌صورت G مشخصاً ساده است اگر و تنها اگر G به حاصل‌ضرب مستقیم تعداد متناهی از زیرگروه‌های ساده خود که دوبه‌دو یکریخت‌اند تجزیه شود.*

برهان. به مرجع [۳۲] قضیه ۵.۲.۵ مراجعه شود. $\square$

با توجه به این‌که هر زیرگروه نرمال مینیمال، مشخصاً ساده است لذا نتیجه زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۶.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. در این صورت هر زیرگروه نرمال مینیمال G، یا به ازای عدد اول pای، مساوی حاصل‌ضرب‌مستقیم گروه‌های یکریخت با $\mathbb{Z}_p$ است و یا این‌که با حاصل‌ضرب‌مستقیم گروه‌های ساده‌ی ناآبلی برابر است.*

برهان. به مرجع [۳۳] نتیجه ۱۳.۲ مراجعه شود. $\square$

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. در این صورت حاصل‌ضرب مستقیم زیرگروه‌های نرمال مینیمال G را بنیان G گوییم و آن را با $\mathrm{Socle}(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۸.۱.۱. گروه G را تقریباً ساده گوییم هرگاه $S \trianglelefteq G \lesssim \mathrm{Aut}(S)$، که S یک گروه ساده ناآبلی است.

مثال ۹.۱.۱. اگر $n \geq ۷$، آن‌گاه گروه متقارن $\mathbb{S}_n$ یک گروه تقریباً ساده است.

گزاره ۱۰.۱.۱. *فرض کنید K یک زیرگروه نرمال ماکسیمال حل‌پذیر از G باشد. در این صورت*

$$\mathrm{Socle}(\frac{G}{K}) = P_۱ \times P_۲ \times ... \times P_k$$

که در آن P_iها زیرگروه‌های ساده ناآبلی هستند و $\frac{G}{K}$ با زیرگروهی از $\mathrm{Aut}(S)$ یکریخت است.

برهان. فرض کنیم $\overline{G} := \frac{G}{K}$ و $S := \mathrm{Socle}(\overline{G})$. در این صورت بنابر نتیجه ۵.۱.۱، نتیجه می‌شود که $S = P_۱ \times P_۲ \times ... \times P_k$ که در آن P_iها زیرگروه‌های ساده ناآبلی هستند.

اکنون نشان می‌دهیم $\frac{G}{K}$ با زیرگروهی از $\mathrm{Aut}(S)$ یکریخت است. برای این منظور کافیست نشان دهیم $C_{\overline{G}}(S) = ۱$. فرض کنیم چنین نباشد، بنابراین طبق لم زرن یک زیرگروه نرمال مینیمال مانند M از $\overline{G}$ وجود دارد به طوری‌که $M \leq C_{\overline{G}}(S) \leq C_{\overline{G}}(M)$. لذا $M \subseteq C_{\overline{G}}(M) \cap M = Z(M)$ و در نتیجه M آبلی است که تناقض است. اما به موجب قضیه نرمالساز-مرکزساز، $\frac{N_{\overline{G}}(S)}{C_{\overline{G}}(S)} \lesssim \mathrm{Aut}(S)$ بنابراین $S \trianglelefteq \frac{G}{K} \lesssim \mathrm{Aut}(S)$ و لذا حکم ثابت می‌شود. $\square$

قضیه ۱۱.۱.۱ (فایت-تامپسون). [۱] *هر گروه متناهی از مرتبه فرد، حل‌پذیر است.*

برهان. به مرجع [۱۷] مراجعه شود. □

لم ۱۲.۱.۱. *فرض کنیم H و K زیرگروه‌های نرمال و حل‌پذیری از G هستند. در این صورت HK نیز زیرگروهی نرمال و حل‌پذیر از G است.*

برهان. به مرجع [۳۳] گزاره ۶.۲ مراجعه شود. □

تعریف ۱۳.۱.۱ (رادیکال حل‌پذیر)**.** فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت بنابر لم ۱۱.۱.۱ بزرگ‌ترین زیرگروه نرمال و حل‌پذیر G به طور منحصر به فردی مشخص می‌شود که آن را رادیکال حل‌پذیر G می‌نامیم و با $O_\infty(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۴.۱.۱ (π-عدد)**.** فرض کنیم π مجموعه‌ای از اعداد اول است. در این صورت عدد n را π-عدد گوییم هرگاه هر مقسوم‌علیه اول عدد n عضو مجموعه‌ی πباشد. در غیر این صورت n را یک π'-عدد گوییم.

تعریف ۱۵.۱.۱ (π-گروه)**.** فرض کنیم G گروهی با عضوهایی از مرتبه‌ی متناهی است. در این صورت G را یک π-گروه نامیم هرگاه مرتبه‌ی هر عضو آن یک π-عدد باشد.

تعریف ۱۶.۱.۱ (π-زیرگروه هال)**.** فرض کنیم G یک گروه و H زیرگروهی از آن است. در این صورت زیرگروه H را یک π-زیرگروه هال از G نامیم هرگاه H یک π-گروه بوده و $|G:H|$ یک π'-گروه باشد.

ملاحظه ۱۷.۱.۱. *در تعاریف ذکر شده مجموعه‌ی π، می‌تواند فقط شامل عدد اول p باشد، و به ترتیب به طریق مشابه p'-عدد، p-گروه، p'-گروه و p-زیرگروه هال تعریف می‌شوند.*

قضیه ۱۸.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه حل‌پذیر متناهی از مرتبه mn باشد که در آن $(m,n)=1$. دراین صورت*

(۱) *G دارای یک زیرگروه هال از مرتبه m است.*

(۲) *هر دو زیرگروه هال از مرتبه m مزدوج‌اند.*

(۳) *اگر $m'|m$ و S زیرگروهی از مرتبه‌ی m' باشد، آن‌گاه S جزء یک زیرگروه هال از مرتبه‌ی m است.*

برهان. به مرجع [۳۳] قضیه ۵.۴ مراجعه شود. □

1. Feit-Thompson

تعریف ۱۹.۱.۱ (توسیع گروه). فرض کنیم H و K دو گروه باشند، در این صورت گروه G را یک توسیع K توسط H می‌نامیم هرگاه K در G نرمال باشد و $\frac{G}{K} \cong H$. در این حالت به این توسیع، غیرشکافنده گوییم و آن را با نماد $K.H$ نشان می‌دهیم.

در صورتی‌که H زیرگروهی از G باشد، آن‌گاه گوییم G توسیع شکافنده از K توسط H است که آن را با نماد $K : H$ یا $K \rtimes H$ نشان می‌دهیم.

نمادگذاری ۲۰.۱.۱. *فرض کنید A یک گروه و L یک گروه ساده باشد به طوری‌که $\mathrm{Aut}(L) = L : A$. در این صورت اگر B یک زیرگروه دوری از A از مرتبه n باشد، آن‌گاه منظور از $L : n$ همان توسیع شکافنده گروه L توسط گروه دوری B است.*

حال اگر A بیش از یک گروه دوری از مرتبه n داشته باشد، آن‌گاه این توسیع‌ها را با نمادهای $L : n_1$، $L : n_2$ و ... نشان می‌دهیم.

۲.۱.۱ عمل گروه

تعریف ۲۱.۱.۱ (عمل گروه). گوییم گروه G بر مجموعه Ω عمل می‌کند، هرگاه نگاشت

$$\Omega \times G \longrightarrow \Omega$$

$$(\omega, g) \longmapsto \omega^g$$

وجود داشته باشد، به طوری‌که داشته باشیم:

(۱) $\omega^1 = \omega$ برای هر $\omega \in \Omega$.

(۲) $(\omega^g)^h = \omega^{gh}$ برای هر $\omega \in \Omega$ و هر $g, h \in G$.

لم ۲۲.۱.۱. *فرض کنیم گروه G بر مجموعه‌ی Ω عمل کند. در این صورت همریختی*

$$\varphi : G \longrightarrow \mathbb{S}_\Omega$$

$$g \longmapsto \varphi_g$$

که φ_g جایگشتی از Ω است، وجود دارد. یعنی φ یک نمایش جایگشتی برای G است که آن را نمایش حاصل از عمل می‌نامیم.

برهان. به مرجع [۳۳] لم ۶.۱.۷ مراجعه شود. □

شایان ذکر است که اگر $n = |\Omega|$، آن‌گاه نمایش جایگشتی فوق از درجه‌ی n می‌نامیم.

تعریف ۲۳.۱.۱ (هسته‌ی عمل). هسته‌ی همریختی بالا را هسته‌ی عمل G بر Ω می‌نامیم و آن را با N نشان می‌دهیم. در واقع $N = \ker \varphi = \{g \in G \mid \omega^g = \omega \ \ , \ \ \forall \omega \in \Omega\ \}$.

اگر N گروهی بدیهی باشد آن‌گاه عمل G بر Ω را با وفا می‌نامیم.

تعریف ۲۴.۱.۱ (مدار). فرض کنیم گروه G روی مجموعه‌ی Ω عمل کند. در این صورت برای هر $\omega \in \Omega$، ω^G را مدار شامل ω می‌نامیم. در حالت $\omega^G = \Omega$ گوییم G روی Ω انتقالی عمل می‌کند.

لم ۲۵.۱.۱ (استدلال فراتینی ۱). *فرض کنیم G یک گروه و N زیر گروه نرمالی از G باشد به طوری‌که روی مجموعه‌ی Ω به طور انتقالی عمل می‌کند. در این صورت:*

$$G = G_\alpha N \ \ , \ \forall\, \alpha \in \Omega.$$

برهان. به مرجع [۱۰] لم ۳.۱.۴ مراجعه شود. □

نتیجه ۲۶.۱.۱ (استدلال فراتینی ۲). *فرض کنیم G یک گروه و N زیرگروه نرمال آن باشد. اگر P یک p-زیرگروه سیلوی N باشد، آن‌گاه:*

$$G = N_G(P)N.$$

برهان. به مرجع [۱۰] لم ۳.۲.۷ مراجعه شود. □

تعریف ۲۷.۱.۱ (عمل گروه برگروه). فرض کنیم G و H دو گروه باشند. در این صورت گوییم G روی H عمل می‌کند و یا این‌که G یک گروه عملگر روی H است، هرگاه G روی H به‌عنوان مجموعه عمل کند و به‌علاوه داشته باشیم:

$$(xy)^g = x^g y^g.$$

اگر به ازای هر $x \in H$ و به ازای هر $g \in G$ داشته باشیم $x^g = x$، آن‌گاه این عمل را عمل بدیهی G بر H نامیم.

همچنین اگر گروه G بر گروه H عمل کند با استفاده از تعریف بالا می‌توان همریختی زیر را داشت؛

$$\varphi : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(H)$$

$$g \longmapsto \varphi_g$$

که φ_g یک خودریختی H با ضابطه‌ی زیر می‌باشد:

$$\varphi_g(x) = x^{g^{-1}}.$$

تعریف ۲۸.۱.۱ (عمل بدون نقطه ثابت). گوییم گروه عملگر A بدون نقطه ثابت روی گروه G عمل می‌کند هرگاه $C_G(A) = 1$. به طور مشابه عنصر $a \in A$ بدون نقطه ثابت روی گروه G عمل می‌کند هرگاه $C_G(a) = 1$.

تعریف ۲۹.۱.۱ (خودریختی بدون نقطه ثابت). فرض کنیم G یک گروه باشد و $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$. در این صورت گوییم σ یک خودریختی بدون نقطه ثابت است، هر گاه از $\sigma(x) = x$ نتیجه شود $x = 1$.