وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه تربیت معلم آذربایجان

دانشکده علوم پایه

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض

عنوان :

توپولوژی رویه های هم انرژی در سیستمهای هامیلتونی

استاد راهنما :

دکتر قربانعلی حقیقت دوست

استاد مشاور :

دکتراسماعیل عابدی

پژوهشگر :

حسن بهادری کندجانی

خرداد / ۱۳۸۹

تبریز / ایران

بسم اللّه الرّحمن الرّحيم

تقدیم به

رهپویان علم و دانش

تشکر و قدردانی

با استعانت از خداوند متعال که همواره پشتیبان همگان است، بر خود وظیفه می‌دانم تا از تمامی عزیزانی که راهگشای این پروژه بوده‌اند، تشکر و قدردانی نمایم. امید است که سپاس بی‌دریغ اینجانب را بپذیرند.

استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر قربانعلی حقیقت دوست که گنجینه‌های دانش خود را در نهایت صبوری و سخاوت در اختیار اینجانب قرار دادند و مرا در انجام این پروژه همراهی کردند. استاد محترم جناب آقای دکتر اسماعیل عابدی که زحمت مشاوره‌ی این پایان‌نامه را تقبل فرمودند. آقای دکتر ایزدی که داوری این پروژه را پذیرفتند.همچنین از آقای دکتر فغفوری (عضو هیأت علمی دانشگاه تبریز)به خاطر راهنمایی های سودمندشان تشکر می نمایم .

سایر اساتید محترم که در طول دوران تحصیلم افتخار شاگردی ایشان را داشته‌ام.

خانواده عزیزم و مادر بزرگوارم که یاور و مشوق همیشگی من در زندگی و به ویژه در دوران تحصیلاتم بوده‌اند.

برای تمام این عزیزان، سربلندی و موفقیت و سلامتی در تمام مراحل زندگی آرزومندم.

حسن بهادری کندجانی

فهرست مندرجات

چکیده

بررسی توپولوژی رویه های هم انرژی سیستم های هامیلتونی ، یکی از مباحث جالب و بروز سیستم های دینامیکی می باشد که مفاهیم فیزیکی و توپولوژیکی را به یکدیگر مربوط می سازد . در این پایان نامه حرکت دورانی جسم صلب در فضای سه بعدی $\mathbb{R}^۳$ را تحت یک ایزومورفیسم مناسب ، به سیستم دینامیکی تعریف شده روی جبرهای لی $e(۳)$ و $SO(۴)$ انتقال داده و پس از رسم دیاگرام انشعاب ، توپولوژی رویه های هم انرژی نواحی مختلف آنرا بررسی می نماییم .

واژه‌های کلیدی: حرکت دورانی ، کروشه لی ـ پواسون ، معادلات اویلر و لاگرانژ ، تابع هامیلتونین ، دیاگرام انشعاب ، رویه های هم انرژی .

مقدمه

بسیاری از سیستمهای دینامیکی که در فیزیک ، هندسه و مکانیک ظاهر می شوند به گونه‌ای با یکدیگر تشابه دارند . مطالعه هم ارزی چنین سیستمهایی در گذشته توسط دانشمندانی چون $Euler$، $Jacobi$ و $Minkowski$ انجام گرفته و امروزه نیز ، افرادی چون $S.Smale$، $J.Marsden$ و $J.Moser$ ، $M.Adler$ ، $H.Knorrer$ ، $L.Gavrilov$ ، $V.V.Kozlov$ ، $S.P.Novikov$ و $A.P.Veselov$ و $A.I.Bobenko$ و دیگران روی این موضوع کار می کنند .

در حالت کلی سه نوع هم ارزی بین سیستمهای دینامیکی می توان در نظر گرفت :

۱) هم ارزی تزویجی [۱]

۲) هم ارزی اربیتالی [۲]

۳) هم ارزی لیوویلی [۳]

هم ارزی تزویجی : دو سیستم دینامیکی σ^t و σ'^t را هم ارز تزویجی می نامند هرگاه دیفئومورفیسمی مانند ξ بین منیفلدشان موجود باشد که :

[۱] conjugacy equivalence

[۲] orbital equivalence

[۳] Liouville equivalence

$$\sigma'^t = \xi \sigma^t \xi^{-1}$$

به بیانی دیگر ، با حفظ پارامتر زمان t و با تغییر متغیرها ، این دو سیستم به یکدیگر تبدیل می شوند .

هم ارزی اربیتالی : اگر یک دیفئومورفیسم بین منیفلدهای دو سیستم دینامیکی چنان موجود باشد که فضای فاز آنها را بدون حفظ پارامتر زمان ، بروی هم بنگارد ، سیستمها را هم ارز اربیتالی می نامند .

نکته : همانطور که مشاهده می شود هم ارزی اربیتالی ضعیفتر از تزویجی میباشد و هر هم ارزی تزویجی یک هم ارزی اربیتالی است ولی عکس آن همیشه برقرار نیست .

هم ارزی لیوویلی : این هم ارزی در سیستمهای هامیلتونی انتگرال پذیر پدیدار می شود . در این حالت برای هر سیستم یک مولکول بنام W در نظر می گیرند و دو سیستم زمانی هم ارز لیوویلی [۴] هستند که :

۱) مولکولهای آنها یکسان باشند .

۲) نحوه چسبیدن ۳–اتم های متناظر درمولکول آنها نیز یکی باشد .

این پایان نامه مشتمل بر چهار فصل بصورت زیر است :

فصل اول آن مفاهیم مقدماتی چون کلاف های فیبره‌ای و برداری ، لم مورس و نتایج آن ، گراف های ریب ، فضاهای سمپلکتیک ، کروشه پواسون و برگ سازی و انتگرال پذیری لیوویلی را در بر دارد . در فصل دوم حرکت دورانی جسم صلب در فضای $\mathbb{R}^۳$ و قضیه $S.Smale$ را بیان می کنیم . فصل سوم به بررسی توپولوژی رویه های هم انرژی هامیلتونین های مختلف روی جبر لی $e(۳)$ می پردازد . در فصل چهارم نیز توپولوژی رویه ها را در جبر لی $SO(۴)$ مطالعه می نماییم .

[۴] رجوع شود به فصل ۴ مرجع [7]

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

۱.۱ فیبریزاسیون ، کلافهای فیبره ای و برداری ، مورفیسم ها

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم E و B دو منیفلد هموار و $p: E \longrightarrow B$ تابعی C^∞ و پوشا باشد . سه تایی $\lambda = (E, B, p)$ رایک فیبریزاسیون [1] می نامند هر گاه در شرط *local triviality* صدق کند . یعنی :

بازای هر $b \in B$ یک همسایگی مانند $U \subseteq B$ ، منیفلدی مانند F و دیفئومورفیسم :

$$\phi : P^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$$

موجود باشد که :

$$p(\phi^{-1}(x,y)) = x \qquad\qquad x \in U, y \in F$$

p را تابع تصویر[2] ، B را فضای پایه [3] و E را فضای کلی [4] می نامند .

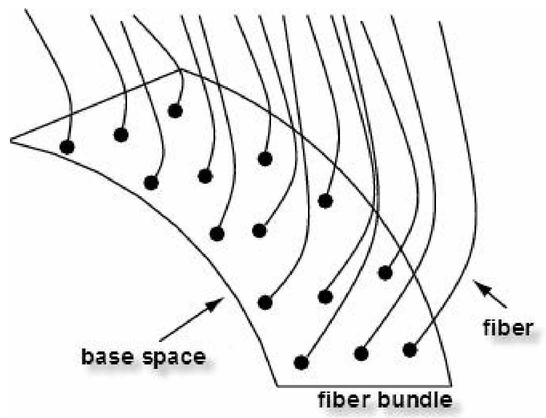
---

[1] fibration
[2] projection
[3] base space
[4] total space

نکته ۱.۱.۱ خاصیت $local\, triviality$ برای هر نقطه $b \in B$ از فضای پایه B یک منیفلد مانند F را نسبت می دهد که آنرا فیبره نقطه b می نامند و هر دو نقطه $b, b' \in U$ دارای فیبره یکسان می باشند .

تعریف ۲.۱.۱ اگر تمامی فیبره های فضای پایه B از نوع F باشد ، گوییم $\lambda = (E, B, p)$ دارای خاصیت $trivial\, fibration$ است .

نکته ۲.۱.۱ هر فیبریزاسیون را می توان بصورت یک کلاف فیبره‌ای [5] تصور نمود .



شکل ۱.۱.۱ — کلاف فیبره‌ای

مثال ۱.۱.۱ چنبره $T^۲$ یک کلاف فیبره‌ای دارای خاصیت $trivial\, fibration$ می باشد که فضای پایه و فیبره ها همگی دایره‌های $S^۱$ هستند .

---

[5] fiber bundle

مثال ۲.۱.۱ نوار موبیوس یک کلاف فیبره‌ای است که در آن فضای پایه دایره S^1 و فیبره ها همگی از نوع $[0,1]$ هستند ولی دارای خاصیت $trivial\ fibration$ نیست .

تعریف ۳.۱.۱ اگر در فیبریزاسیون $\lambda = (E, B, p)$ ، فیبره ها فضاهایی برداری باشند کلاف فیبره‌ای را برداری [۶] می نامند .

مثال ۳.۱.۱ کلاف مماسی TM [۷] منیفلد هموار M را در نظر می گیریم . TM یک کلاف برداری است که در آن فیبره هر نقطه ، فضای برداری مماسی متناظر می باشد .

تعریف ۴.۱.۱ کلافهای فیبره‌ای $\lambda = (E, B, p)$ و $\lambda = (E', B', p')$ را در نظر می گیریم . فرض کنیم $f : B \longrightarrow B'$ و $g : E \longrightarrow E'$ توابعی هموار باشند که در رابطه زیر صدق کنند:

$$p' o g = f o p$$

دوتایی (f, g) را یک مورفیسم [۸] از λ به λ' می گویند .

تعریف ۵.۱.۱ هرگاه توابع f و g دیفئومورفیسم باشند ، (f, g) را یک ایزومورفیسم از λ به λ' می نامند .

نکته ۳.۱.۱ ایزومورفیسمها، کلافهای فیبره‌ای را به کلاسهای هم ارزی افراز می کنند .

---

[۶] vector bundle

[۷] tangant bundle

[۸] morphism

۲.۱ قضیه سارد

قضیه سارد یکی از قضایای مفید در مبحث سیستم های دینامیکی می باشد . ابتدا قضیه زیر را که منسوب به فوبینی [۹] است بیان کرده ، سپس قضیه سارد را اثبات خواهیم نمود .

قضیه ۱.۲.۱ فرض کنیم $A \subseteq \mathbb{R}^p$ مجموعه ای لبگ اندازه پذیر باشد . اگر بازای هر $t \in \mathbb{R}$ ، اندازه

$$A \cap (t \times \mathbb{R}^{p-1})$$

برابر صفر باشد ، اندازه لبگ A نیز صفر است .

برهان. رجوع شود به مرجع [۲] ■

قضیه ۲.۲.۱ $(Sard's\ theorem)$ فرض کنیم $f\ : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ تابعی هموار باشد . در اینصورت مجموعه مقادیر بحرانی f دارای اندازه صفر است .

برهان. اثبات به استقراء و بر روی n خواهد بود . اگر $n = 0$ باشد ، $\mathbb{R}^0$ تک نقطه‌ای است . بنابراین U مجموعه‌ای تهی یا تک نقطه‌ای بوده و $m\,(f(U)) = 0$ می باشد .
اکنون فرض کنیم حکم برای حالت $n - 1$ درست باشد (فرض استقراء) . یعنی هر تابع هموار :

$$f\ : U \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

دارای مجموعه مقادیر بحرانی از اندازه صفر است . ثابت می کنیم تابع هموار :

$$f\ : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

نیز دارای مجموعه مقادیر با اندازه صفر است (حکم استقراء) .

---
[۹] $Fubini$

اگر C مجموعه نقاط بحرانی تابع f ، یعنی :

$$C = \{x \in U \ \mid \ rank(df)_x < p \ \}$$

باشد و C_r $(r \in \mathbb{N})$ مجموعه نقاطی از U باشد که تمامی مشتقات جزئی از مرتبه کوچکتر یا مساوی r برابر صفر است ، خواهیم داشت :

$$C \supseteq C_۱ \supseteq C_۲ \supseteq C_۳ \supseteq \cdots$$

ثابت می کنیم :

۱) $m\left(f(C - C_۱)\right) = ۰$.

۲) بازای هر $k \in \mathbb{N}$ ، $m\left(f(C_k - C_{k+۱})\right) = ۰$ می باشد .

۳) یک عدد طبیعی مانند k چنان موجود است که داریم :

$$m(f(C_k)) = ۰$$

اثبات ۱ — فرض کنیم $\bar{x} \in C - C_۱$ باشد . ثابت می کنیم همسایگی مانند $V_{\bar{x}}$ حول نقطه $\bar{x}$ وجود دارد که :

$$m\left(f(C - C_۱) \cap V_{\bar{x}}\right) = ۰$$

فرض کنیم مثلاً $\frac{\partial f_۱}{\partial x_۱}|_{\bar{x}} \neq ۰$ باشد . اکنون تابع :

$$\begin{cases} h: \ U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ h(x_۱, x_۲, \cdots, x_n) = (f_۱(x_۱, x_۲, \cdots, x_n), x_۲, \cdots, x_n) \end{cases}$$

را در نظر می گیریم . این تابع هموار بوده و $(dh)_{\bar{x}}$ نا منفرد است . طبق قضیه تابع معکوس یک همسایگی مانند $V_{\bar{x}}$ حول $\bar{x}$ و $V'_{\bar{x}}$ حول $h(\bar{x})$ موجود است که :

$$h: \ V_{\bar{x}} \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow V'_{\bar{x}} \subseteq \mathbb{R}^n$$

دیفئومورفیسم می باشد . تابع g را بصورت :

$$g = foh^{-1}: \ V'_{\bar{x}} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

تعریف می نماییم . فرض کنیم C' مجموعه نقاط بحرانی تابع هموار g باشد . از دیفئومورفیسم بودن h نتیجه می گیریم :

$$g(C' \cap V'_{\bar{x}}) = f(C \cap V_{\bar{x}})$$

حال ثابت میکنیم :

$$m\left(g(C' \cap V'_{\bar{x}})\right) = 0$$

اگر $t \in \mathbb{R}$ عدد حقیقی دلخواهی باشد . بازای هر نقطه $(t, x_2, \cdots, x_n)$ از همسایگی $V'_{\bar{x}}$ ، نقطه‌ای مانند $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ از $V_{\bar{x}}$ وجود دارد که :

$$h(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (f_1(t, x_2, \cdots, x_n), x_2, \cdots, x_n)$$

در این رابطه $t = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ می باشد . یعنی :

$$g(t, x_2, \cdots, x_n) = foh^{-1}(t, x_2, \cdots, x_n) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$= (t, f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n))$$

اکنون تابع g^t را که تحدید g بر صفحه $x_1 = t$ می باشد ، در نظر می گیریم . داریم :

$$g^t: \ \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

$$g^t(x_2, \cdots, x_n) = g(t, x_2, \cdots, x_n)$$

می توان نوشت :

$$(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}) = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ * & \frac{\partial g_i^t}{\partial x_j} \end{pmatrix}$$

که نتیجه می دهد مجموعه مقادیر بحرانی g و g^t در $V'_{\bar{x}} \cap (\ t \times \mathbb{R}^{n-۱}\ )$ یکسان است .

طبق فرض استقراء ، مجموعه مقادیر بحرانی تابع g^t دارای اندازه لبگ صفر می باشد . بنابراین اندازه لبگ مقادیر بحرانی g در برش

$$x_۱ = t$$

برابر صفر است . همچنین مجموعه نقاط بحرانی تابع هموار g ، یعنی C' مجموعه‌ای بسته می باشد و می توان نوشت :

$$\text{بسته } C' \Longrightarrow \text{بسته و کراندار } (\ C' \cap\ V'_{\bar{x}}\ ) \subseteq \mathbb{R}^n \Longrightarrow \text{فشرده } (\ C' \cap\ V'_{\bar{x}}\ )$$

بنابر این $g(\ C' \cap\ V'_{\bar{x}}\ )$ نیز فشرده و یک مجموعه بورل [۱۰] اندازه پذیر است . قضیه فوبینی نتیجه می دهد که :

$$m\,(g(\ C' \cap\ V'_{\bar{x}}\ )) = ۰ \Longrightarrow m\,(f(\ C - C_۱\ ) \cap V_{\bar{x}}) \leq m\,(f(\ C \cap\ V_{\bar{x}}\ )) = ۰$$

$C - C_۱$ توسط تعداد شمارایی از این همسایگی ها مانند $\{\ V_{\bar{x}_i}\ \}_{i \in I}$ پوشانده می شود . بنابراین می توان نوشت :

$$m\,(f(\ C - C_۱\ )) \leq \sum_{i \in I} m\,(f(\ C - C_۱\ ) \cap V_{\bar{x}_i}) = ۰$$

اثبات ۲ — در این قسمت ثابت می کنیم :

$$m\,(f(\ C_k - C_{k+۱}\ )) = ۰ \ ; \ (\text{بازای هر عدد طبیعی } k\ )$$

عضو اختیاری $\bar{x} \in C_k - C_{k-۱}$ را در نظر می گیریم . ثابت می کنیم همسایگی مناسب مانند $W_{\bar{x}}$ موجود است که :

$$m\,(f(\ C_k - C_{k+۱}\ ) \cap W_{\bar{x}}) = ۰$$

[۱۰] Borel set

داریم :

$$\bar{x} \in C_k \qquad \& \qquad \bar{x} \notin C_{k+1}$$

بنابراین عددی طبیعی مانند $1 \leq r \leq k$ وجود دارد بطوریکه :

$$\frac{\partial^k f_r}{\partial x_{s_2} \partial x_{s_3} \cdots \partial x_{s_n}} |_{\bar{x}} = 0 \qquad \& \qquad \frac{\partial^{k+1} f_r}{\partial x_{s_1} \partial x_{s_2} \partial x_{s_3} \cdots \partial x_{s_n}} |_{\bar{x}} \neq 0$$

بدون خلل در کلیت حکم ، فرض کنیم $s_1 = 1$ باشد . در اینصورت تابع h با ضابطه :

$$\begin{cases} h: \ U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ h(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\frac{\partial^k f_r(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_{s_2} \partial x_{s_3} \cdots \partial x_{s_n}}, x_2, \cdots, x_n) \end{cases}$$

یک تابع هموار بوده و هر نقطه مجموعه $C_k - C_{k+1}$ را بر صفحه $x_1 = 0$ در فضای $\mathbb{R}^n$ می نگارد . همچنین $(dh)_{\bar{x}}$ نامنفرد بوده و طبق قضیه تابع معکوس ، همسایگی $W_{\bar{x}}$ حول $\bar{x}$ و $W'_{\bar{x}}$ حول $h(\bar{x})$ وجود دارد که

$$h: \ W_{\bar{x}} \subseteq U \longrightarrow W'_{\bar{x}} \subseteq \mathbb{R}^n$$

دیفئومورفیسم می باشد . حال تابع :

$$g = foh^{-1}: \ W'_{\bar{x}} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

را در نظر می گیریم . اگر

$$g^\circ: \ W'_{\bar{x}} \cap (\ 0 \times \mathbb{R}^{n-1} \ ) \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

تحدید تابع g بر صفحه $x_1 = 0$ بوده و C^* بیانگر مجموعه نقاط بحرانی آن باشد ، بنابر فرض استقراء می توان نوشت :

$$m\left(g^\circ(C^*)\right) = 0$$

در نتیجه خواهیم داشت :

$$m\left(f(C_k - C_{k+1}) \cap W_{\bar{x}}\right) \ \leq \ m\left(g^{\circ}(C^*)\right) = 0$$

و به این ترتیب حکم ۲ اثبات می شود .

اثبات ۳ — اکنون ثابت می کنیم بازای یک عدد طبیعی k به اندازه کافی بزرگ ، خواهیم داشت :

$$m\left(f(C_k)\right) = 0$$

فرض کنیم $x \in C_k$ و I یک حجره n بعدی شامل x باشد که طول هر کدام از یال های آن برابر δ است . بازه $U \subseteq \mathbb{R}^n$ توسط تعداد شمارایی از این حجره‌ها پوشانده می شود و بنا بر قضیه تیلور[۱۱] می توان نوشت :

$$f(x+h) = f(x) + R(x,h)$$

که در آن $x + h \in I$ بوده و :

(α عدد حقیقی نامنفی وابسته به حجره I و تابع f است) ؛ $\| R(x,h) \| \leq \alpha \| h \|^{k+1}$

می باشد .

حال هر کدام از یال های I را به r قسمت مساوی تقسیم می نماییم . در اینصورت r^n زیر حجره n بُعدی حاصل می شود که طول هر کدام از یال های آنها برابر $\frac{\delta}{r}$ می باشد . فرض کنیم x در زیر حجره $I_1 \subseteq I$ واقع باشد . داریم :

$$f(x+h) = f(x) + R(x,h)$$

(در اینجا $x + h \in I$ و $\| h \| = \sqrt{n\left(\frac{\delta}{r}\right)^2} = \sqrt{n}\frac{\delta}{r}$ می باشد)

---

[۱۱] Taylor's theorem

بنابر این خواهیم داشت :

$$\| f(x+h) - f(x) \| = \| R(x,h) \| \leq \alpha \| h \|^{k+1} \leq \alpha (\sqrt{n}\frac{\delta}{r})^{k+1} = \frac{\alpha(\sqrt{n}\delta)^{k+1}}{r^{k+1}}$$

فرض کنیم λ و μ دو نقطه دلخواه از حجره I_1 باشد . در اینصورت می توان نوشت :

$$\| f(\lambda) - f(\mu) \| = \| f(\lambda) - f(x) + f(x) - f(\mu) \| \leq \| f(\lambda) - f(x) \| + \| f(x) - f(\mu) \|$$

$$\leq \frac{2\alpha(\sqrt{n}\delta)^{k+1}}{r^{k+1}}$$

در نتیجه :

$$m\left(f(I_1)\right) \leq \left(\frac{2\alpha(\sqrt{n}\delta)^{k+1}}{r^{k+1}}\right)^p = \frac{b}{r^{(k+1)p}}$$

خواهد بود که در آن $b = \left(2\alpha(\sqrt{n}\ \delta)^{k+1}\right)^p$ می باشد . پس می توان نوشت :

$$m\left(f(I \cap C^k)\right) \leq r^n \left(\frac{b}{r^{(k+1)p}}\right) = \frac{b}{r^{(k+1)p-n}}$$

اگر $k \geq \frac{n}{p} - 1$ باشد آنگاه :

$$lim_{n\to\infty}\ m\left(f(I \cap C^k)\right) \leq lim_{n\to\infty}\ \frac{b}{r^{(k+1)p-n}} = 0$$

خواهد بود و چون تعداد شمارایی از حجره های مانند I مجموعه C_k را می پوشانند ، می توان نتیجه گرفت :

$$m\left(f(C^k)\right) = 0$$

■

* * *