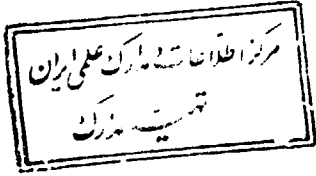


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



۱۳۸۰ / ۱ / ۲۰



عنوان

دانشگاه سیستان و بلوچستان
تحصیلات تکمیلی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

عنوان:

فضاهای باناخ جداپذیر با دوگان جداپذیر

014584

استاد راهنما : دکتر پرویز عظیمی

تحقیق و نگارش : حمیدرضا کمالی اردکانی

تیرماه ۱۳۷۹

۳۸۳۹۱

بسمت

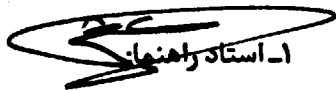
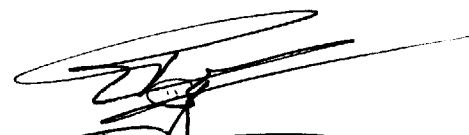


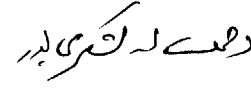
صفحه الف

این پایان نامه با عنوان ویژگی‌های بیان‌گر حدزیر نا حد در آن حدزیر نا حد قسمتی از برنامه آموزشی دوره کارشناسی ارشد ریاضیات گرایش حفظ توسط دانشجو سید علی محمدی تحت راهنمایی استاد پایان نامه آقای دکتر پرویز سلطانی تهیه شده است. استفاده از مطالب آن بمنظور اهداف آموزشی با ذکر مرجع و اطلاع کتبی به حوزه تحصیلات تکمیلی دانشگاه سیستان و بلوچستان مجاز می‌باشد. ح

امضا دانشجو

این پایان نامه سید علی محمدی واحد درسی شناخته می‌شود و در تاریخ ۱۳۹۳/۰۳/۱۹ توسط هیئت داوران بررسی، و نمره ۱۸ با درجه کالی به آن تعلق گرفت. ح

نام و نام خانوادگی امضاء تاریخ

۱- استاد راهنما:		
۲- استاد مشاور:		
۳- داور ۱:		۱۳۹۳/۰۳/۲۱
۴- داور ۲:		۱۳۹۳/۰۳/۲۱
۵- تحصیلات تکمیلی:		

تقدیم به:

تمامی فرزندان یتیم ایران زمین

تقدیم به

پدر و مادر بزرگوارم

و همه عزیزانی که صمیمانه

دوستشان دارم.

تقدیر و تشکر

((من لم يشكر المخلوق لم يشكر الخالق))

سپاس خدای را عزوجل که به بندگانش توفیق کسب علم را عطا فرمود.

بدین منظور از استاد ارجمند آقای دکتر پرویز عظیمی به خاطر

راهنماییهای ارزنده شان در انجام این پایان نامه و اساتید محترم آقایان

دکتر جعفر زعفرانی داور خارجی و دکتر رحمت ا... لشکری پور داور

داخلی، تقدیر و تشکر می نمایم.

در پایان جا دارد از رئیس محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه آقای دکتر

جعفر ولیزاده، مدیر محترم گروه ریاضی آقای دکتر علیرضا سهیلی و

دوست و استاد ارجمندم آقای دکتر حسین کاظمیان تشکر و قدردانی

فراوان داشته باشم.

تیرماه ۱۳۷۹

فهرست مطالب

۱	چکیده
۲	فصل صفر - تعاریف و مفاهیم مقدماتی آنالیز تابعی
۳	۰-۰ مقدمه
۴	۱-۰: فضاهای باناخ
۱۶	۲-۰: فضاهای ضرب داخلی و هیلبرت
۲۰	۳-۰: توپولوژی ضعیف و ضعیف*
	فصل اول- پایه‌های فضاهای باناخ
۲۵	۰-۱: مقدمه
۲۶	۱-۱: پایه شورد- وجود و مثالها
۳۱	۲-۱: رابطه پایه با فضای دوگان یک فضای باناخ
۳۶	۳-۱: پایه‌های غیرمشروط
	فصل دوم- فضاهای C_0 و l_p
۴۳	۰-۲: مقدمه
۴۴	۱-۲: تساوی در C_0 و l_p و ویژگیهای این فضاها
۵۰	۲-۲: مسأله دنباله اساسی غیرمشروط
۵۱	۳-۲: فضاهای باناخ شامل C_0 یا l_p
	فصل سوم- مثالهایی از فضاهای باناخ بدون پایه غیرمشروط
۵۷	۰-۳: مقدمه
۵۸	۱-۳: فضای جیمز J

فصل چهارم - فضاهای باناخ جداپذیر با دوگان جداناپذیر

۷۴	۰-۴: مقدمه
۷۵	۱-۴: فضاهای کلاسیک جداپذیر با دوگان جداناپذیر
۷۹	۲-۴: فضای درخت جیمز
۷۹	۱-۲-۴: ساختمان فضای درخت جیمز
۸۰	۲-۲-۴: خواص فضای جیمز و ساختمان زیر فضاهای آن
۸۲	۳-۴: فضای درخت هاگنر
۸۲	۱-۳-۴: ساختمان فضای هاگنر
۸۳	۲-۳-۴: خواص فضای هاگنر و ساختمان زیر فضاهای آن
۸۵	۴-۴: فضای مورای و رزنتال
۸۵	۱-۴-۴: ساختمان فضای مورای و رزنتال
۹۴	۲-۴-۴: خواص فضای مورای و رزنتال

مراجع

چکیده

در این پایان نامه به مطالعه مثالهای مشهور و تاریخی فضاهای باناخ جداپذیر با دوگان جداپذیر می پردازیم. مثال اول فضای باناخ جیمز است که فاقد 1 می باشد و با JT نشان می دهیم. مثال دوم فضای درخت هاگلر است که با JH نشان می دهیم. مثال سوم فضای باناخ مورای و رزنتال است. این فضا پایه ای دارد که به طور ضعیف همگرا به صفر است ولی زیردنباله ای غیرمشروط ندارد. در پایان با ارائه اثباتی از عظیمی نشان می دهیم که دوگان این فضا جداپذیر نیست.

فصل صفر

تعاریف و مفاهیم مقدماتی آنالیز تابعی

مقدمه ۰-۰

این فصل در سه بخش تنظیم گردیده است. بخش اول، تحت عنوان فضاهای باناخ، بطور اجمال به ارائه مهمترین قضایای فضاهای باناخ از جمله بئر، ریس، هان - باناخ و نتایج آن می پردازد. در ادامه، به اصل کراننداری یکنواخت (قضیه استینهاوس - باناخ) و قضایای نگاشت باز و گراف بسته اشاره شده است.

بخش دوم با عنوان فضاهای ضرب داخلی و هیلبرت، شامل تعاریف و ارائه مهمترین قضایای مربوطه از جمله قضیه جردن - وان نیومن، قضیه نمایش ریس و سایر قضایای این موضوع می پردازیم.

در بخش سوم، توپولوژی ضعیف و ضعیف* و قضایای مربوطه و از جمله مهمترین آنها قضایای گلداشتاین و آلاگلو مورد بحث قرار خواهد گرفت. همچنین در جای مناسب به مراجع مورد بحث اشاره خواهد شد [۸] و [۱۲] و [۲۰] و [۲۲] و [۲۳].

بخش ۰-۱: فضاهاى باناخ

تعریف ۰-۱-۱: یک فضای خطی نرمدار، زوج $(X, \|\cdot\|)$ شامل یک فضای خطی X و

یک نرم $X \rightarrow K: \|\cdot\|$ می باشد بطوریکه

(i) برای هر $x \in X$: $\|x\| \geq 0$, $\|x\|=0$ اگر و فقط اگر $x=0$.

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ برای هر اسکالر $\lambda \in K$ و $x \in X$.

(iii) برای هر $x, y \in X$ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

اگر X یک فضای نرمدار باشد و برای هر $x, y \in X$ قرار دهیم $d(x, y) = \|x-y\|$ آنگاه d یک متر روی X است و در نتیجه هر فضای نرمدار یک فضای مترى است ولى عكس آن برقرار نیست . d را متر تولید شده به وسیله نرم گوئیم .

مجموعه تمام دنباله های کراندار را با l_∞ ، مجموعه تمام دنباله های همگرا و همگرا به صفر را به ترتیب با c_0 ، مجموعه تمام سریهای همگرا و بطور مطلق همگرا را به ترتیب با l_1 و γ ، مجموعه تمام توابع پیوسته با مقادیر حقیقی روی فاصله $[a, b]$ را با $C([a, b])$ نشان می دهیم. همچنین مجموعه تمام توابع حقیقی پیوسته روی یک مجموعه فشرده K را با $C(K)$ نشان می دهیم .

قضیه ۰-۱-۱: شمولیتهای $l_1 \subset \gamma \subset c_0 \subset l_\infty$ همگی اکید می باشند .

برای $0 < p < \infty$ ، $l_p = \{x = (x_k) : \sum |x_k|^p < \infty\}$ ، l_p تعریف می کنیم . اگر $x \in l_p$

برای $1 < p < \infty$ آنگاه $\lim_{p \rightarrow \infty} (\sum |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} = \sup |x_k|$. اما اگر $x \in l_\infty$ آنگاه $\sup_k |x_k| < \infty$.
 فضای باناخ کلاسهای هم ارزی از توابع اندازه پذیر روی (Ω, Σ, μ) که توان p ام آنها انتگرال پذیرند را با $L_p(\mu) = L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ ($1 \leq p \leq \infty$) نشان می دهیم . نرم در $L_p(\mu)$ بصورت
 $\|f\| = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$ برای هر $f \in L_p(\mu)$ تعریف می شود . اگر (Ω, Σ, μ) فضای اندازه لبگ روی فاصله $[0, 1]$ باشد ، $L_p(\mu)$ را با $L_p([0, 1])$ نشان می دهیم .

مثال ۰-۱-۱: مثالهایی از فضاهای نرمدار را بصورت زیر می آوریم :

$$\|x\| = \sup |x_k| \quad \text{با نرم } l_\infty, c, c_0$$

$$\|x\| = \left(\sum |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{با نرم } l_p \quad (1 \leq p < \infty)$$

$$\|x\| = \max \{|x(t)| : 0 \leq t \leq 1\} \quad \text{با نرم } C([0, 1])$$

$$\|x\| = \max \{|x(t)| : t \in K\} \quad \text{با نرم } C(K)$$

تعریف ۰-۱-۱: فرض کنید X یک فضای نرمدار و برای هر دو نقطه $x, y \in X$ ، $d(x, y) = \|x - y\|$. در این صورت اگر (X, d) یک فضای متری کامل باشد . X را یک فضای باناخ گوئیم . به عبارت دیگر فضای نرمدار کامل را فضای باناخ گوئیم .

از فضاهای $\mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathcal{C}([a, b]), c, c_0, l_p, l_\infty$ ($1 \leq p < \infty$) همراه با نرم معمولی شان می

توان به عنوان مهمترین فضاهای باناخ یاد کرد .

قضیه ۰-۱-۲: یک فضای خطی نرم‌مدار X کامل است اگر و فقط اگر هر سری بطور مطلق همگرا در X ، همگرا باشد.

زیر مجموعه A از فضای متریک (X, d) هیچ جا چگال گوئیم هر گاه $\text{int}(\bar{A}) = \emptyset$. این معادل است با اینکه \bar{cA} در X چگال است. مجموعه A را از رشته اول گوئیم هر گاه بصورت اجتماع تعداد شمارائی از مجموعه های هیچ جا چگال باشد در غیر این صورت آن را از رشته دوم نامیم. همچنین اگر A_1, A_2, \dots از رشته اول باشند آنگاه $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ نیز چنین خواهد بود. بوضوح \emptyset, \mathbb{Q} از رشته اول و \mathbb{Q}^c و \mathbb{R} از رشته دوم می باشند.

قضیه ۰-۱-۳: (قضیه بئر^{۱)} هر فضای متریک کامل از رشته دوم می باشد.

فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد. X را جداپذیر گوئیم هر گاه زیر مجموعه شمارایی داشته باشد که در X چگال باشد.

به عنوان مهمترین فضاهای جداپذیر می توان از $L_p, \mathbb{R}_p, \mathbb{C}, \emptyset, C([a, b])$ با $1 \leq p < \infty$ یاد کرد. فضای متریک بدیهی X جداپذیر است اگر و فقط اگر X شمارا باشد. هر زیر مجموعه از یک فضای نرم‌مدار جداپذیر، جداپذیر است. هر فضای نرم‌مدار فشرده جداپذیر است. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ جداپذیر نیست.

تعریف ۰-۱-۳: فرض کنید (X, d) و (Y, d') دو فضای متریک و $f: X \rightarrow Y$ یک نگاشت یک به یک و بر و باشد. اگر f, f^{-1} هر دو پیوسته باشند، آنگاه f را همانریختی گوئیم. بعلاوه X را همان ریخت با Y گوئیم هر گاه یک چنین نگاشتی موجود باشد.

^{1)Baire}

تعریف ۴-۱-۰: فرض کنید (Y, d') و (X, d) دو فضای متریک باشند. آنگاه نگاهی به یک ایزومتر است اگر و فقط اگر برو باشد و برای هر $x, x' \in X$ ، $d'(f(x), f(x')) = d(x, x')$ دو فضای متریک را ایزومتر گوئیم هرگاه یک ایزومتر بین آنها موجود باشد. هر ایزومتر یک همیومرفیسم می باشد.

فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد. فضای متریک کامل (\bar{X}, d^*) را کامل شده (X, d) گوئیم اگر،

(۱) (X, d) با یک زیر فضا از (\bar{X}, d^*) مانند (X_0, d^*) ایزومتر باشد.

(۲) $\bar{X}_0 = \bar{X}$ یعنی X_0 در \bar{X} چگال باشد.

قضیه ۴-۱-۰: هر فضای متریک (X, d) یک فضای متریک کامل شده (\bar{X}, d^*) دارد. بعلاوه اگر (\bar{X}, d^{**}) فضای کامل شده دیگری از (X, d) باشد آنگاه (\bar{X}, d^*) و (\bar{X}, d^{**}) ایزومتر هستند.

اگر X یک فضای خطی و M یک زیر مجموعه دلخواه آن باشد، آنگاه اشتراک تمام زیر فضاهای X که شامل M می باشند را زیر فضای تولید شده توسط M گوئیم و آن را با $\text{span} M$ نشان می دهیم. در هر فضای خطی نرمدار با بعد متناهی تمام زیر فضاهای بسته می باشند.

اگر M یک زیر فضا از فضای خطی و نرمدار X باشد آنگاه $\overline{\text{span} M}$ نیز یک زیر فضای X است. بنابراین کوچکترین زیر فضای بسته شامل مجموعه M همان بستار زیر فضای تولید شده توسط M یعنی $\overline{\text{span} M}$ می باشد.