بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه سیستان و بلوچستان

دانشگاه سیستـــان و بلــوچستـــان

تحصیـلات تکمیـلی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

عنـوان:

فضاهای باناخ جداپذیر با دوگان جداناپذیر

استاد راهنما : دکتر پرویز عظیمی

تحقیـق و نگارش : حمیدرضا کمالی اردکانی

تیرماه ۱۳۷۹

بسمه تعالی

صفحه الف

این پایان نامه با عنوان فضاهای با تاج جداپذیر با [illegible] جداناپذیر قسمتی از برنامه آموزشی دوره کارشناسی ارشد ریاضی گرایش محض توسط دانشجو حمیدرضا کمالی اردکانی تحت راهنمائی استاد پایان نامه آقای دکتر پرویز عظیمی تهیه شده است. استفاده از مطالب آن بمنظور اهداف آموزشی با ذکر مرجع و اطلاع کتبی به حوزه تحصیلات تکمیلی دانشگاه سیستان و بلوچستان مجاز می‌باشد./ح

امضا دانشجو

این پایان نامه ۶ شش واحد درسی شناخته می‌شود و در تاریخ ۷۹/۴/۳۱ توسط هیئت داوران بررسی، و نمره ۱۸ با درجه عالی به آن تعلق گرفت./ح

نام و نام خانوادگی		امضاء	تاریخ
۱ـ استاد راهنما:			
۲ـ استاد مشاور:	علیرضا عباسی		
۳ـ داور ۱:	حسین عرفانی		۷۹/۴/۳۱
۴ـ داور ۲:	رحمت‌اله لشکری‌پور		۷۹/۴/۳۱
۵ـ تحصیلات تکمیلی:			

تقدیم به:

تمامی فرزندان یتیم ایران زمین

تقدیم به

پدر و مادر بزرگوارم

و همه عزیزانی که صمیمانه

دوستشان دارم.

تقدیر و تشکر

«من لم یشکرالمخلوق لم یشکرالخالق»

سپاس خدای را عزّوجل که به بندگانش توفیق کسب علم را عطا فرمود.

بدین منظور از استاد ارجمند آقای دکتر پرویز عظیمی به خاطر راهنماییهای ارزنده شان در انجام این پایان نامه و اساتید محترم آقایان دکتر جعفر زعفرانی داور خارجی و دکتر رحمت ا... لشکری پور داور داخلی ، تقدیر و تشکر می نمایم.

در پایان جا دارد از رئیس محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه آقای دکتر جعفر ولیزاده ، مدیر محترم گروه ریاضی آقای دکتر علیرضا سهیلی و دوست و استاد ارجمندم آقای دکتر حسین کاظمیان تشکر و قدردانی فراوان داشته باشم.

تیرماه ۱۳۷۹

فهرست مطالب

فصل چهارم- فضاهای باناخ جداپذیر با دوگان جداناپذیر

مراجع

چکیده

در این پایان نامه به مطالعهٔ مثالهای مشهور و تاریخی فضاهای باناخ جداپذیر با دوگان جداناپذیر می‌پردازیم. مثال اول فضای باناخ جیمز است که فاقد l_1 می‌باشد و با JT نشان می‌دهیم. مثال دوم فضای درخت هاگلر است که با JH نشان می‌دهیم. مثال سوم فضای باناخ مورای و رزنتال است. این فضا پایه‌ای دارد که به طور ضعیف همگرا به صفر است ولی زیردنباله‌ای غیرمشروط ندارد. در پایان با ارائه اثباتی از عظیمی نشان می‌دهیم که دوگان این فضا جداپذیر نیست.

فصل صفر

تعاریف و مفاهیم مقدماتی آنالیز تابعی

مقدمه ۰-۰

این فصل در سه بخش تنظیم گردیده است . بخش اول ، تحت عنوان فضاهای باناخ ، بطور اجمال به ارائه مهمترین قضایای فضاهای باناخ از جمله بئر ، ریس ، هان - باناخ و نتایج آن می پردازد . در ادامه ، به اصل کرانداری یکنواخت (قضیه استینهاوس -باناخ) و قضایای نگاشت باز و گراف بسته اشاره شده است .

بخش دوم با عنوان فضاهای ضرب داخلی و هیلبرت ، شامل تعاریف وارائه مهمترین قضایای مربوطه از جمله قضیه جردن - وان نیومن ، قضیه نمایش ریس و سایر قضایای این موضوع می پردازیم .

در بخش سوم ، توپولوژی ضعیف و ضعیف* و قضایای مربوطه و از جمله مهمترین آنها قضایای گلداشتاین و آلاگلو مورد بحث قرار خواهدگرفت . همچنین در جای مناسب به مراجع مورد بحث اشاره خواهد شد[۸] و [۱۲] و [۲۰] و [۲۲] و [۲۳] .

بخش ۰-۱ : فضاهای باناخ

تعریف ۰-۱-۱ : یک فضای خطی نرمدار، زوج $(X,\|.\|)$ شامل یک فضای خطی X و یک نرم $\|.\| : X \to K$ می باشد بطوریکه

i) برای هر $x \in X$: $\|x\| \geq 0$, $\|x\|=0$ اگر و فقط اگر $x=0$.

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ برای هر اسکالر $\lambda \in K$ و $x \in X$.

iii) برای هر $x,y \in X$ $\quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

اگر X یک فضای نرمدار باشد وبرای هر $x,y \in X$ قرار دهیم $d(x,y) = \|x-y\|$ آنگاه d یک متر روی X است و درنتیجه هر فضای نرمدار یک فضای متری است ولی عکس آن برقرار نیست . d را متر تولید شده به وسیلهٔ نرم گوئیم .

مجموعه تمام دنباله های کراندار را با l_∞، مجموعه تمام دنباله های همگرا و همگرا به صفر را به ترتیب با c و c_0 ، مجموعه تمام سریهای همگرا و بطور مطلق همگرا را به ترتیب با γ و l_1، مجموعه تمام توابع پیوسته با مقادیر حقیقی روی فاصلهٔ $[a,b]$ را با $C([a,b])$ نشان می دهیم. همچنین مجموعه تمام توابع حقیقی پیوسته روی یک مجموعه فشرده K را با $C(K)$ نشان می دهیم .

قضیه ۰-۱-۱ : شمولیتهای $l_1 \subset \gamma \subset c_0 \subset c \subset l_\infty$ همگی اکید می باشند .

برای $0 < p < \infty$, $l_p = \left\{ x = (x_k) \;:\; \sum |x_k|^p < \infty \right\}$ تعریف می کنیم . اگر $x \in l_p$

برای $1<p$ آنگاه $\lim_{p\to\infty}(\sum|x_k|^p)^{\frac{1}{p}} = \sup|x_k|$. اما اگر $x\in l_\infty$ آنگاه $\sup_k|x_k|<\infty$.
فضای باناخ کلاسهای هم ارزی از توابع اندازه پذیر روی (Ω,Σ,μ) که توان p ام آنها انتگرال پذیرند را با $L_p(\mu)=L_p(\Omega,\Sigma,\mu)$ $(1\le p\le\infty)$نشان می دهیم . نرم در $L_p(\mu)$ بصورت $\|f\|=\left(\int|f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ برای هر $f\in L_p(\mu)$ تعریف می شود . اگر (Ω,Σ,μ) فضای اندازه لبگ روی فاصله $[0,1]$ باشد ، $L_p(\mu)$ را با $L_p([0,1])$ نشان می دهیم .

مثال ۰-۱-۱ : مثالهایی از فضاهای نرمدار را بصورت زیر می آوریم :

l_∞ , c , c_0 با نرم $\|x\| = \sup|x_k|$

l_p $(1\le p<\infty)$ با نرم $\|x\|=(\sum|x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$

$C([0,1])$ با نرم $\|x\| = \max\{|x(t)| \;:\; 0\le t\le 1\}$

$C(K)$ با نرم $\|x\| = \max\{|x(t)| \;:\; t\in K\}$

تعریف ۰-۱-۱ : فرض کنید X یک فضای نرمدار و برای هر دونقطه $x,y\in X$, $d(x,y)=\|x-y\|$. در این صورت اگر (X,d) یک فضای متری کامل باشد . X را یک فضای باناخ گوئیم . به عبارت دیگر فضای نرمدار کامل را فضای باناخ گوئیم .

از فضاهای $\Re$, $\mathbb{C}$, l_∞ , l_p $(1\le p<\infty)$, c_0 , c , $C([a,b])$ همراه با نرم معمولی شان می توان به عنوان مهمترین فضاهای باناخ یاد کرد .

قضیه ۰-۱-۲ : یک فضای خطی نرمدار X کامل است اگر و فقط اگر هر سری بطور مطلق همگرا در X ، همگرا باشد .

زیر مجموعه A از فضای متری (X,d) هیچ جا چگال گوئیم هر گاه $int(\overline{A}) = \phi$. این معادل است با اینکه $c\overline{A}$ در X چگال است. مجموعه A را از رستهٔ اول گوئیم هرگاه بصورت اجتماع تعداد شمارائی از مجموعه های هیچ جا چگال باشد در غیر این صورت آن را از رستهٔ دوم نامیم . همچنین اگر $A_1,A_2,...$ از رستهٔ اول باشند آنگاه $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ نیز چنین خواهد بود . بوضوح ϕ , Q از رستهٔ اول و Q^c و R از رستهٔ دوم می باشند .

قضیه ۰-۱-۳ : (قضیه بئر[1]) هر فضای متری کامل از رستهٔ دوم می باشد .

فرض کنید (X,d) یک فضای متری باشد . X را جداپذیر گوئیم هرگاه زیر مجموعهٔ شمارایی داشته باشد که در X چگال باشد .

به عنوان مهمترین فضاهای جداپذیر می توان از L_p , $\Re, l_p$, $\mathbb{C}$, C([a,b]) , با $1 \le p < \infty$ یاد کرد. فضای متری بدیهی X جداپذیر است اگرو فقط اگر X شمارا باشد . هر زیر مجموعه از یک فضای نرمدار جداپذیر ، جداپذیر است . هر فضای نرمدار فشرده جداپذیر است . l_∞ جداپذیر نیست .

تعریف ۰-۱-۳ : فرض کنید (Y,d′) و(X,d) دو فضای متری و $f: X \to Y$ یک نگاشت یک به یک و برو باشد . اگر f^{-1}, f هر دو پیوسته باشند ، آنگاه f را همانریختی گوئیم . بعلاوه X را همان ریخت با Y گوئیم هرگاه یک چنین نگاشتی موجود باشد .

1)Baire

تعریف ۰-۱-۴ : فرض کنید (Y,d') و (X,d) دو فضای متری باشند . آنگاه نگاشت $f:X\to Y$ یک ایزومتری است اگر و فقط اگر برو باشد و برای هر $x,x'\in X$ ، $d'(f(x),f(x'))=d(x,x')$. دو فضای متری را ایزومتر گوئیم هرگاه یک ایزومتری بین آنها موجود باشد . هر ایزومتری یک همیومرفیسم می باشد .

فرض کنید (X,d) یک فضای متری باشد . فضای متری کامل $(\tilde{X},d^*)$ را کامل شده (X,d) گوئیم اگر،

۱) (X,d) با یک زیر فضا از $(\tilde{X},d^*)$ مانند (X_0,d^*) ایزومتر باشد .

۲) $\overline{X_0}=\tilde{X}$ یعنی X_0 در $\tilde{X}$ چگال باشد .

قضیه ۰-۱-۴ : هر فضای متری (X,d) یک فضای متری کامل شده $(\tilde{X},d^*)$ دارد . بعلاوه اگر $(\tilde{\tilde{X}},d^{**})$ فضای کامل شده دیگری از (X,d) باشد آنگاه $(\tilde{X},d^*)$ و $(\tilde{\tilde{X}},d^{**})$ ایزومتر هستند.

اگر X یک فضای خطی و M یک زیر مجموعه دلخواه آن باشد ، آنگاه اشتراک تمام زیر فضاهای X که شامل M می باشند را زیر فضای تولید شده توسط M گوئیم و آن را با spanM نشان می دهیم . در هر فضای خطی نرمدار با بعد متناهی تمام زیر فضاها، بسته می باشند .

اگر M یک زیر فضا از فضای خطی ونرمدار X باشد آنگاه $\overline{M}$ نیز یک زیر فضای X است . بنابراین کوچکترین زیر فضای بسته شامل مجموعه M همان بستار زیرفضای تولید شده توسط M یعنی $\overline{\text{spanM}}$ می باشد .