بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی محض گرایش آنالیز

خاصیت های ضعیف ستاره جبرهای پیچشی وزن دار

استاد راهنما:

دکتر محمود لشکری زاده بمی

پژوهشگر:

ساسان امیری

شهریور ماه ۱۳۸۸

شیوه نگارش پایان نامه
رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش آنالیز آقای ساسان امیری

تحت عنوان:

خصوصیات ضعیف ستاره از جبرهای پیچشی وزن دار

در تاریخ ... ۸۸/۶/۲۵..... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ...بسیار خوب... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه دکتر محمود لشکری زاده با مرتبه علمی استاد امضاء

۲- استاد داور داخل گروه دکتر محبوبه رضایی با مرتبه علمی استادیار امضاء

۳- استاد داور خارج گروه دکتر فرید بهرامی با مرتبه علمی استادیار امضاء

مهر و امضای مدیر گروه ....

دانشگاه اصفهان

تشکر و قدردانی

حال که به یاری پروردگار موفق به طی دوره کارشناسی ارشد شدم، بجاست از افرادی که در این مقطع از وجودشان بهره جستم، یاد کنم. ابتدا از جناب آقای دکتر لشکری زاده که با صبر و بردباری در این سالها بنده را از راهنمایی های خود بهره مند ساختند، صمیمانه تشکر می کنم و همین طور باید از اساتید محترم گروه ریاضی دانشگاه اصفهان و از داوران داخلی و خارجی خودم خانم دکتر رضایی و آقای دکتر بهرامی سپاسگزاری کنم. از دوستان دوره کارشناسی ارشدم آقایان وحید اسکندری، یاسر کیانی چهلمردی هفت تپه، قاسم ستوده، بهزاد سلیمان زاده و ستار قاسمی که وجودشان همواره برای من موجب دلگرمی بوده است، ممنونم.

ساسان امیری

شهریور ماه ۱۳۸۸

تقدیم به پدر و مادرم

که هر چه دارم از آنهاست

فهرست مطالب

فصل ۱

در فصل اول تعاریف، قضایا و مطالب مقدماتی را که در طی فصلهای بعدی به آنها نیاز داریم را بیان می کنیم و از اثبات قضایا صرف نظر می کنیم. مطالب این فصل بر مبنای مراجع [۴]، [٦]، [۱۸]، [۱۹]، [۲۰] و [۲۱] تنظیم شده است.

تعریف ۱.۱ . فرض کنید X یک فضای خطی روی میدان اعداد مختلط باشد. در این صورت

(الف) منظور از یک نرم روی X یک تابع حقیقی مقدار $x \mapsto ||x||$ با خواص زیر است

۱—برای هر $x \neq 0$، $||x|| > 0$.

۲—برای هر $c \in \mathbb{C}$ و هر $x \in X$، $||cx|| = |c|.||x||$.

۳—برای هر $x, y \in X$، $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

(ب) هرگاه نرمی روی X موجود باشد، X را یک فضای خطی نرمدار گویند. در این صورت X با متر $d(x, y) := ||x - y||$ یک فضای متریک است و توپولوژی حاصل از این متر را توپولوژی نرمی می نامند.

(ج) اگر X یک فضای خطی نرمدار باشد که هر دنباله کوشی در آن همگراست، آنگاه X را یک فضای باناخ نامند.

تعریف ۲.۱ . فرض کنید که X, Y دو فضای باناخ بر $\mathbb{C}$ باشند دراین صورت

(الف) نگاشت $T : X \to Y$ را یک عملگر خطی گویند، هرگاه برای هر $x, y \in X$ و $c \in \mathbb{C}$ داشته باشیم

$$T(cx + y) = cT(x) + T(y)$$

(ب) عملگر خطی T را کراندار گویند هرگاه $\sup \{||T(x)||; ||x|| \leq 1\}$ متناهی باشد.

(پ). فضای تمامی عملگرهای خطی کراندار از X به Y را با $B(X,Y)$ نشان می‌دهیم. $B(X,Y)$ با جمع توابع و ضرب اسکالر و نرم زیر یک فضای باناخ است.

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| \; ; \; \|x\| \leq ۱\}$$

(ت). $B(X,X)$ را با $B(X)$ نمایش داده و هر عضو آنرا یک عملگر خطی بر X گویند.

(ث). $B(X,\mathbb{C})$ را با X^* نمایش داده و هر عضو آنرا یک تابعک خطی کراندار بر X می نامند و مقدار $x^* \in X^*$ در $x \in X$ را با $\langle x^*, x\rangle$ نشان می دهند.

(ج) هر عملگر خطی دو سویی $T \in B(X,Y)$ را یک یکریختی از X به Y گویند و یکریختی T را حافظ نرم نامند هرگاه برای هر $x \in X$، $\|T(x)\| = \|x\|$.

(د) فرض کنید که $T \in B(X,Y)$ در این صورت $T^* : Y^* \to X^*$ را که به ازای هر $y^* \in Y^*$ و $x \in X$، به صورت $\langle T^*(y^*), x\rangle = \langle y^*, T(x)\rangle$ تعریف می شود الحاقی T گوییم. داریم $\|T\| = \|T^*\|$.

به صفحه ۴۱ از [۱۹] مراجعه کنید.

(و) برای هر $x \in X$ و هر زیر مجموعه متناهی $\{x_۱^*, x_۲^*, ..., x_n^*\} \subseteq X^*$ و هر $\varepsilon > ۰$ قرار می دهیم،

$$U(x, x_۱^*, x_۲^*, ..., x_n^*, \varepsilon) = \{y \in X; |\langle x_k^*, x-y\rangle| < \varepsilon, k = ۱, ۲, ..., n\}$$

در این صورت تمام مجموعه های بفرم فوق تشکیل پایه‌ای برای یک توپولوژی روی X می دهند، توپولوژی حاصل از این پایه را توپولوژی ضعیف بر X می نامند و با

$W = \sigma(X, X^*)$ نشان می دهند.

تور $\{x_\alpha\} \subseteq X$ در این توپولوژی به $x \in X$ همگرا است اگر و تنها اگر برای هر $x^* \in X^*$ داشته باشیم

$$\lim_\alpha \langle x^*, x_\alpha \rangle = \langle x^*, x \rangle$$

به صفحه ۳۵ از [۱۹] مراجعه کنید.

(هـ) برای هر $x^* \in X^*$ و هر زیر مجموعه متناهی $\{x_۱, x_۲, ..., x_n\} \subseteq X$ و هر $\varepsilon > ۰$ قرار می دهیم

$$U(x^*, x_۱, x_۲, ..., x_n, \varepsilon) = \{y^* \in X^*; |\langle y^* - x^*, x_k \rangle| < \varepsilon, k = ۱, ۲, ..., n\}$$

در این صورت تمام مجموعه های بفرم فوق تشکیل پایه‌ای برای یک توپولوژی روی X^* می دهند، توپولوژی حاصل از این پایه را توپولوژی ضعیف ستاره بر X^* می نامند و با $W^* = \sigma(X^*, X)$ نشان می دهند.

تور $\{x^*_\alpha\} \subseteq X^*$ در این توپولوژی به $x^* \in X^*$ همگرا است اگر و تنها اگر برای هر $x \in X$ داشته باشیم

$$\lim_\alpha \langle x^*_\alpha, x \rangle = \langle x^*, x \rangle$$

به صفحه ۳۷ از [۱۹] مراجعه کنید.

تعریف ۳.۱ . فرض کنید X یک فضای خطی نرم دار روی $\mathbb{C}$ باشد.

(الف) در این صورت زیر مجموعه $C \subseteq X$ را محدب می نامیم هرگاه برای هر

$x, y \in C$ و هر $\circ \leq t \leq ۱$

$$tx + (۱ - t)y \in C$$

(ب) فرض کنید $B \subseteq X$. دراین صورت اشتراک همه زیر مجموعه های محدب شامل B در X را، غلاف محدب B نامیده و با $co(B)$ نشان می دهیم.

(ج) فرض کنید $B \subseteq X$. دراین صورت اشتراک همه زیر مجموعه های محدب بسته شامل B در X را، غلاف محدب بسته B نامیده و با $\overline{co}(B)$ نشان می دهیم.□

قضیه ۴.۱ . فرض کنید X یک فضای خطی نرم دار روی $\mathbb{C}$ است و $B \subseteq X$. دراین صورت داریم

(الف) $\overline{co}(B) = \overline{co(B)}$.

(ب) اگر B فشرده باشد، آنگاه $\overline{co}(B)$ نیز فشرده است.

اثبات . به ترتیب به صفحات ۴۱۵ و ۴۱۶ از[٦] مراجعه کنید.□

تعریف ۵.۱ . فرض کنید X یک فضای برداری است. تابع $q : X \to \mathbb{R}$ را یک تابعک زیر خطی گویند هرگاه

(الف) $q(x + y) \leq q(x) + q(y) \qquad \forall x, y \in X$

(ب) $q(\alpha x) = \alpha q(x) \qquad \forall x \in X, \forall \alpha \geq \circ$

قضیه ۶.۱ . (هان—باناخ [1]) فرض کنید X یک فضای برداری بر $\mathbb{R}$ است. همچنین فرض کنید q یک تابعک زیر خطی بر X باشد. اگر M زیرفضایی از X باشد و $f : M \to \mathbb{R}$ یک تابعک خطی باشد که

$$\forall x \in M \qquad f(x) \leq q(x)$$

آنگاه تابعک خطی $F : X \to \mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که

$$F|_M = f \quad , \qquad \forall x \in X \quad F(x) \leq q(x)$$

اثبات . به صفحه ۸۳ از [۴] مراجعه کنید.$\square$

نتیجه ۷.۱ . فرض کنید X یک فضای خطی نرمدار و M یک زیر فضای خطی آن باشد و $f : M \to \mathbb{F}$ (منظور از $\mathbb{F}$، $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ می باشد) یک تابعک خطی کراندار باشد. در این صورت تابعک خطی $F : X \to \mathbb{F}$ وجود دارد به طوری که

$$F|_M = f \quad , \qquad \|F\| = \|f\|$$

اثبات . به صفحه ۸۱ از [۴] مراجعه کنید.$\square$

قضیه ۸.۱ . (کرین اشمولین [2]) فرض کنید X یک فضای باناخ و B یک زیر

---

[1] Hahn-Banach

[2] Krein-Smulian

مجموعه محدب از X^* باشد به طوری که

$$B \cap \{x^* \in X^* : \|x^*\| \leq r\}$$

به ازای هر $r > 0$ ضعیف ستاره بسته باشد. در این صورت B ضعیف ستاره بسته است.

اثبات . به صفحه ۱٦۵ از [۴] مراجعه کنید.□

قضیه ۹.۱ . فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. در این صورت توپولوژی ضعیف ستاره بر گوی های بسته از X^* متریک پذیر است اگر و تنها اگر X تفکیک پذیر باشد.

اثبات . به صفحه ۴۲٦ از [٦] مراجعه کنید.□

قضیه ۱۰.۱ . فرض کنید که X یک فضای باناخ بر $\mathbb{C}$ باشد. در این صورت گزاره های زیر برقرارند:

(الف) (باناخ — آلاآقلو [۳]) گوی یکه $\{x^* \in X^*; \|x^*\| \leq 1\}$، فشرده ضعیف ستاره است.

(ب) توپولوژی متری X از توپولوژی ضعیف آن، قویتر است.

(ج) توپولوژی ضعیف X^*، از توپولوژی ضعیف ستاره آن، قویتر است.

(د) هر دنباله همگرای ضعیف در X و هر دنباله همگرای ضعیف ستاره در X^*، نرم كراندار است.

اثبات . به ترتیب به صفحات ۴۲۴ و ۴۲۰ و ۴۲۰ از [٦] و ۱۷۰ از [۷] مراجعه کنید.□

[۳] Banach-Alaoglu

تعریف ۱۱.۱ . فرض کنید که X و Y دو فضای خطی نرمدار و $T: X \to Y$ یک عملگر خطی باشد، چنان چه برای گوی واحد بسته S در X، بستار نرمی $T(S)$ فشرده باشد، آنگاه T را یک عملگر فشرده نامیم.

قضیه ۱۲.۱ . ۲۰ فرض کنید X و Y دو فضای باناخ هستند. اگر $T: X \to Y$ یک عملگر خطی باشد، آنگاه عبارات زیر معادلند:

(الف) T یک عملگر فشرده است.

(ب) به ازای هر دنباله کراندار $(x_n) \subseteq X$، دنباله $(T(x_n))$ دارای زیر دنباله ای همگرا در Y است.

(ج) به ازای هر مجموعه کراندار $S \subseteq X$، بستار $T(S)$ در Y فشرده است.

اثبات . به صفحه ۲۰ از [۲۰] مراجعه کنید. □

قضیه ۱۳.۱ . اگر فضای عملگرهای فشرده از X به X را با $K(X)$ نمایش دهیم. آنگاه $K(X)$ یک ایده آل بسته از $B(X)$ نسبت به عمل ترکیب توابع می باشد.

اثبات . به صفحه ۲۰ از [۲۰] مراجعه کنید. □

تعریف ۱۴.۱ .(الف) خانواده ناتهی Σ از زیر مجموعه های یک مجموعه S را یک σ– جبر گویند هرگاه Σ شامل مجموعه تهی و مکمل هر عضوش و اجتماع شمارا از

اعضایش باشد.

هر گاه S یک فضای توپولوژیک باشد، کوچکترین $\sigma-$ جبر شامل تمام زیر مجموعه‌های باز در S را $\sigma-$ جبر بورل نامند.

(ب) اگر Σ یک $\sigma-$ جبر باشد، تابع $\mu : \Sigma \to \mathbb{C}$ ($\mu : \Sigma \to [0, \infty]$) را یک اندازه مختلط (مثبت) بر Σ نامند، هرگاه $\mu(\emptyset) = 0$ و μ جمعی شمارشی باشد.

(ج) هر گاه X یک فضای توپولوژیک باشد، تابع $f : S \to X$ را بورل اندازه پذیر گوییم، هر گاه به ازای هر مجموعه باز $O \subseteq X$، $f^{-1}(O)$ در Σ باشد.

تعریف ۱.۱۵ . فرض کنیم (S, Σ, μ) یک فضای اندازه مثبت باشد.

(الف) اندازه μ را $\sigma-$ متناهی گویند، هرگاه بتوان S را اجتماع شمارا از مجموعه هایی با اندازه متناهی نوشت.

(ب) فرض کنید S موضعا فشرده و هاسدرف باشد. مجموعه بسته $E \subseteq S$ را محمل μ گویند و با $supp(\mu)$ نشان می دهند هرگاه

$$\mu(E^c \cap S) = 0$$

(ج) به ازای هر $1 \leq p < \infty$ مجموعه تمام توابع اندازه پذیر مختلط f، که $\int_S |f|^p d\mu < \infty$ را با $L^p(S, \mu)$ یا $L^p(\mu)$ نمایش می دهند.

(د) برای هر تابع اندازه پذیر $f : S \to [0, \infty]$، سوپریموم اساسی f را با $ess \sup f$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنند:

$$ess\sup f = \inf\Big\{\alpha \geq 0 \quad ; \quad \mu(f^{-1}(\alpha, \infty]) = 0\Big\}$$

هر تابع مختلط اندازه پذیر f که $ess\sup|f| < \infty$ را کراندار اساسی گفته و فضای تمام توابع کراندار اساسی را با $L^\infty(S,\mu)$ نشان می دهند.

قضیه ۱۶.۱ . فرض کنید (S,Σ,μ) یک فضای اندازه مثبت باشد.

(الف) به ازای هر $1 \leq p < \infty$، باجمع توابع و ضرب اسکالر و نرم زیر، $L^p(S,\mu)$ یک فضای باناخ می باشد.

$$\|f\|_p = \left(\int_S |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

(ب) باجمع توابع و ضرب اسکالر و نرم $\|f\|_\infty = ess\sup|f|$، $L^\infty(S,\mu)$ یک فضای باناخ می باشد.

(ج) اگر μ، $\sigma-$ متناهی باشد و $1 \leq p < \infty$ در این صورت به ازای هر $\phi \in (L^p(S,\mu))^*$ وجود دارد g منحصر بفردی در $L^q(\mu,S)$ که $\|\phi\| = \|g\|_q$ و

$$\phi(f) = \int_S fg d\mu \qquad\qquad (f \in L^p(S,\mu))$$

که در آن q مزدوج نمایی p است.

از (ج) نتیجه میشود که تحت دوگانگی زیر، $L^q(S,\mu) = (L^p(S,\mu))^*$

$$\langle g, f\rangle = \int_S fgd\mu \qquad\qquad (f \in L^p(S,\mu), g \in L^q(S,\mu))$$

(د) (قضیه همگرایی تسلطی لبگ) فرض کنید که $\{f_n\}$ دنباله توابع اندازه‌پذیر مختلط روی S باشد، به طوریکه تقریباً همه جا بر S، $\{f_n\}$ به f همگرا باشد. به علاوه $g \in L^1(S,\mu)$ موجود باشد که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $|f_n(x)| \leq g(x)$، در این صورت

$$f \in L^1(S,\mu) \qquad \text{و} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_S |f_n - f| d\mu = 0$$

(ه) فرض کنید μ، $\sigma-$ متناهی باشد و فرض کنید h تابعی اندازه پذیر و اساسا کراندار از S به یک زیر مجموعه فشرده ضعیف $L^1(S,\mu)$ باشد. و تعریف کنید

$$Tf = \int_S h(x)f(x)d\mu(x) \quad ; \quad f \in L^1(S,\mu)$$

در این صورت عملگر خطی T روی $L^1(S,\mu)$ فشرده است اگر و تنها اگر مجموعه فشرده $K \subseteq L^1(S,\mu)$ وجود داشته باشد به طوری که برای تقریبا هر $x \in S$ داشته باشیم $h(x) \in K$.

اثبات . برای اثبات (الف) و (ب) و (ج) و (د) به ترتیب به قضایای ۱۱.۳ و ۱۶.٦ و ۳۴.۱ از [۲۱] و برای قسمت (ه) به صفحه ۵۰۷ از [٦] مراجعه کنید. □

تعریف ۱۷.۱ . فرض کنید S موضعا فشرده و هاسدرف باشد. اندازه بورل مثبت μ روی S را بورل منظم گویند، هرگاه برای هر مجموعه بورل E، به ازای هر $\varepsilon > 0$ مجموعه فشرده $F \subseteq S$ و مجموعه باز $G \subseteq S$ چنان موجود باشند که

$$E \subseteq G \quad , \quad \mu(G-E) < \varepsilon \qquad \text{(الف)}$$

$$F \subseteq E \quad , \quad \mu(E-F) < \varepsilon \qquad \text{(ب)}$$

اگر μ اندازه بورل مثبتی باشد که شرط (الف) برای آن برقرار باشد و شرط (ب) فقط به ازای هر مجموعه باز برقرار باشد، μ را یک اندازه رادان گوییم.

قضیه ۱.۱۸ . (الف) اندازه لبگ بر $\mathbb{R}$ یک اندازه رادان است.

(ب) هر اندازه σ− متناهی و رادان یک اندازه منظم است.

(ج) اگر $f \in L^1(S,\mu)$ و μ یک اندازه رادان باشد، با تعریف ν به صورت زیر ν نیز یک اندازه رادان خواهد بود.

$$\nu(E) := \int_E f d\mu$$

اثبات . به ترتیب در صفحات ۶۵ و ۶۴ در [۲۱] و ۲۲۰ در [۷] ملاحظه شود. □

تعریف ۱.۱۹ . فرض کنید که (S,Σ,μ) و (T,Σ',λ) دو فضای اندازه σ− متناهی باشند. $\Sigma \times \Sigma'$ را کوچکترین σ− جبر روی $S \times T$ در نظر می گیریم که شامل تمام مجموعه های به صورت $A \times B$ است که $A \in \Sigma$ و $B \in \Sigma'$.

به ازای هر $Q \in \Sigma \times \Sigma'$، اندازه $\mu \times \lambda$ را چنین تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned}(\mu \times \lambda)(Q) &= \int_S \lambda(Q_x)d\mu(x) \\ &= \int_T \mu(Q^y)d\lambda(y)\end{aligned}$$

که در آن $Q_x = \{y; (x,y) \in Q\}$ و $Q^y = \{x; (x,y) \in Q\}$.

قضیه ۲۰.۱ . اگر (S, Σ, μ) و (T, Σ', λ) دو فضای اندازه $\sigma-$ متناهی باشند، آنگاه $(S \times T, \Sigma \times \Sigma', \mu \times \lambda)$ یک فضای اندازه $\sigma-$ متناهی می باشد.

اثبات . به صفحه ۱۹۹ از [۲۱] مراجعه کنید. □

قضیه ۲۱.۱ . (قضیه فوبینی [۴]) فرض کنید که (S, Σ, μ) و (T, Σ', λ) دو فضای اندازه $\sigma-$ متناهی باشند. و f یک تابع $\Sigma \times \Sigma'-$ اندازه پذیر بر $S \times Y$ باشد آنگاه

(الف) هر گاه $0 \le f \le \infty$ ، آنگاه $\int_T f(x,y)d\lambda(y)$، $\Sigma-$ اندازه پذیر و $\int_S f(x,y)d\mu(x)$، $\Sigma'-$ اندازه پذیر بوده و

$$\begin{aligned}\int_S \int_T f(x,y)d\lambda(y)d\mu(x) &= \int_{S\times T} fd(\mu \times \lambda) \\ &= \int_T \int_S f(x,y)d\mu(x)d\lambda(y) \qquad (*)\end{aligned}$$

[۴] Fubini