

# فصل اول

## مقدمه

## مقدمه

### ۱-۱ مقدمه‌ای درباره ی هسته

#### ۱-۱-۱ جرم، بار و اجزای هسته

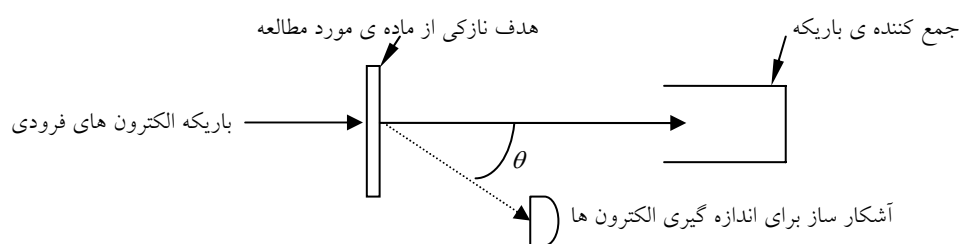
هسته ی اتم برای اولین بار در سال ۱۹۱۱/۱۲۹۰ در آزمایشی که رادرفورد و دستیارانش با استفاده از پراکندگی ذرات آلفا توسط اتم انجام دادند، کشف شد. هسته از نوترون ها و پروتون ها ساخته شده است، که حدود ۱۸۴۰ بار از الکترون سنگین ترند و به طور کلی به آنها نوکلئون گفته می شود. تعداد پروتون ها در هسته برابر با عدد اتمی ( $Z$ )، و تعداد کلی نوکلئون ها ( $A$ ) نزدیک ترین عدد صحیح به وزن اتمی آن هسته است. بنابراین تعداد نوترون ها برابر با  $A-Z$  می باشد [1].

#### ۱-۱-۲ اندازه ی هسته و توزیع نوکلئون ها

یکی از روش های مستقیم برای مطالعه ی شکل و اندازه ی هسته ها، اندازه گیری پدیده های ایجاد شده در اثر پرتاب ذرات به طرف آنهاست، ولی محدودیتی در این روش وجود دارد. طول موج ذراتی که با هسته برخورد می کنند، باید تقریباً از مرتبه ی اندازه ی هسته و یا کوچک تر از آن باشد. از آنجا که طول موج نور معمولی در حدود  $10^{-7}$  متر، چندین برابر ابعاد هسته می باشد، برای این منظور مناسب نخواهد بود. فوتون های با طول موج خیلی کوچک مثل پرتو های گاما نیز قابل استفاده نیستند،

زیرا در اطراف هسته الکترون ها وجود دارند و برهم کنش امواج الکترومغناطیسی با الکترون ها خیلی قوی تر از برهم کنش این امواج با هسته می باشد. در این صورت بهتر است از ذراتی مثل الکترون ها، پروتون ها و نوترون ها استفاده کنیم، که در واقع هر سه ی این ذرات به کار گرفته می شوند. از آنجایی که برهم کنش الکترون با هسته، برهمکنش الکترومغناطیسی می باشد که به خوبی شناخته شده است، لذا دقیق ترین نتایج با پراکندگی الکترون به دست می آید [1].

آزمایش ها به این ترتیب انجام می گیرند، که الکترون ها با انرژی زیاد به طرف یک هدف نازک از ماده ی مورد نظر پرتاب می شوند و احتمال انحرافشان تحت زوایای مختلف، همان طور که در شکل ۱-۱ نشان داده شده است، اندازه گیری می شود. زاویه ی  $\theta$  با چرخاندن آشکار ساز تغییر داده می شود و برای هر  $\theta$  نسبت تعداد الکترون های پراکنده شده به تعداد الکترون های موجود در باریکه که توسط جمع کننده تعیین می شود، اندازه گیری می شود [1].



شکل ۱-۱: آزمایشی برای اندازه گیری تغییرات زاویه ی پراکندگی الکترون از هسته، [1].

بنابراین می توان با این چنین آزمایش هایی به چگونگی توزیع نوکلئون ها دست یافت. نتایج به دست آمده از آزمایش های بیشماری که روی تعداد زیادی از هسته ها با استفاده از الکترون های فرودی در انرژی های مختلف انجام شده و مورد تحلیل قرار گرفته است، تابع توزیع نوکلئون ها را این چنین پیشنهاد می دهند [1]؛

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp[(r - R) / a]} \quad (1-1)$$

که در آن،  $\rho_0$  چگالی نوکلئون در نزدیکی مرکز هسته می باشد و  $R$  فاصله ای است که در آن چگالی هسته به نصف مقدارش در مرکز تقلیل می یابد و  $a$  نیز ضخامت سطحی هسته را نشان می دهد.

با نگرش به نتایج بدست آمده از کمیت هایی مانند چهار قطبی الکتریکی برای هسته ها مشخص شده که، برخی از هسته ها نامتقارن و تغییر شکل یافته از حالت کروی می باشند.

### ۱-۱-۳ عامل انسجام هسته

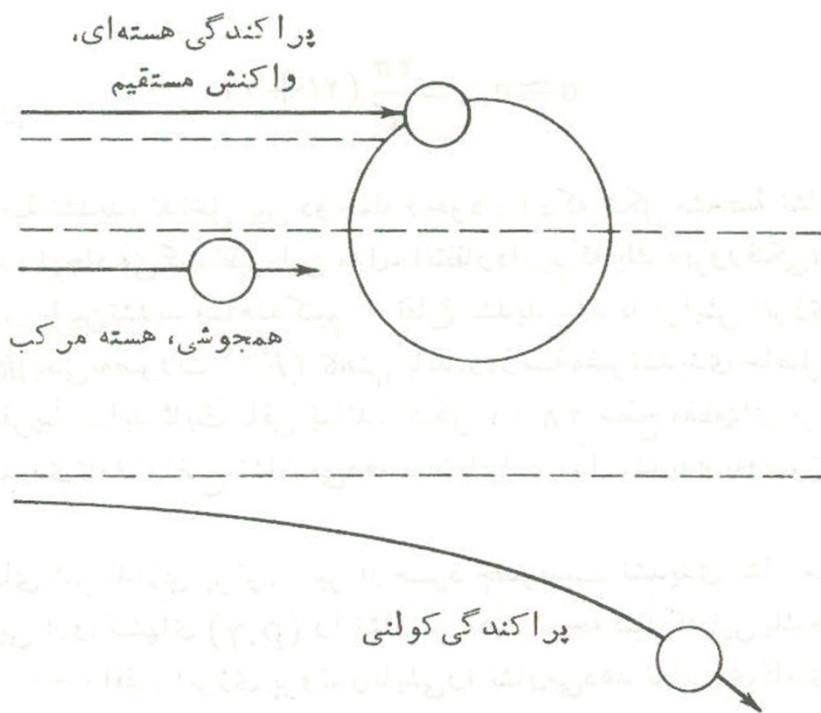
اصولاً سیستم ها با نیرو کنار هم نگه داشته می شوند. از آنجایی که نوترون ها بار الکتریکی ندارند، لذا نیروی الکترومغناطیسی به هیچ وجه نمی تواند بر آن ها اثری داشته باشد و نیروی الکترومغناطیسی که بین پروتون ها وجود دارد، یک نیروی دافعه ی کولونی قوی می باشد که باعث از هم پاشیدگی هسته می شود. نیروی گرانشی نیز بین هر جفت از نوکلئون ها به صورت جاذبه می باشد،

اما این نیرو  $10^{36}$  مرتبه از نیروی الکتریکی موجود بین پروتون ها کوچک تر است. بنابراین اثر آن در تمام پدیده های هسته ای و اتمی کاملاً قابل اغماض است [1].

با این توصیف، دو نیروی الکترومغناطیسی و گرانشی نمی توانند علت وجودی هسته و انسجام آن باشند. تنها راه توجیه این است که وجود نیروی سومی را در طبیعت بپذیریم که به آن نیروی هسته ای گویند. این نیرو در فواصل کوتاه، یعنی در حدود ابعاد هسته، باید بسیار قوی باشد زیرا لازم است که قوی تر از نیروی دافعه ی کولونی بین پروتون ها باشد تا بر آن غلبه کند.

## ۲-۱ واکنش های یون سنگین

از نقطه نظر واکنش های هسته ای، هر پرتابه ی با  $A > 4$  (که  $A$  بیانگر عدد جرمی هسته ای مورد نظر می باشد)، یون سنگین نامیده می شود، [2].



شکل ۲-۱: فرایند های پراکندگی و همجوشی برای یون های سنگین، [2].

در شکل ۱-۲ تنوع فرایند هایی که می توانند در واکنش های یون سنگین رخ دهند، به صورت ساده ای نشان داده شده است. در پارامتر برخورد های بزرگ، اثرات کولونی حاکم اند. هنگامی که چگالی هسته ای هدف و پرتابه شروع به همپوشی می کنند، واکنش های هسته ای می توانند روی دهند. در همپوشی های کوچک، پراکندگی کشسان یا ناکشسان معمولی و انتقال چند نوکلئون از طریق واکنش های مستقیم ممکن است اتفاق بیفتد [2].

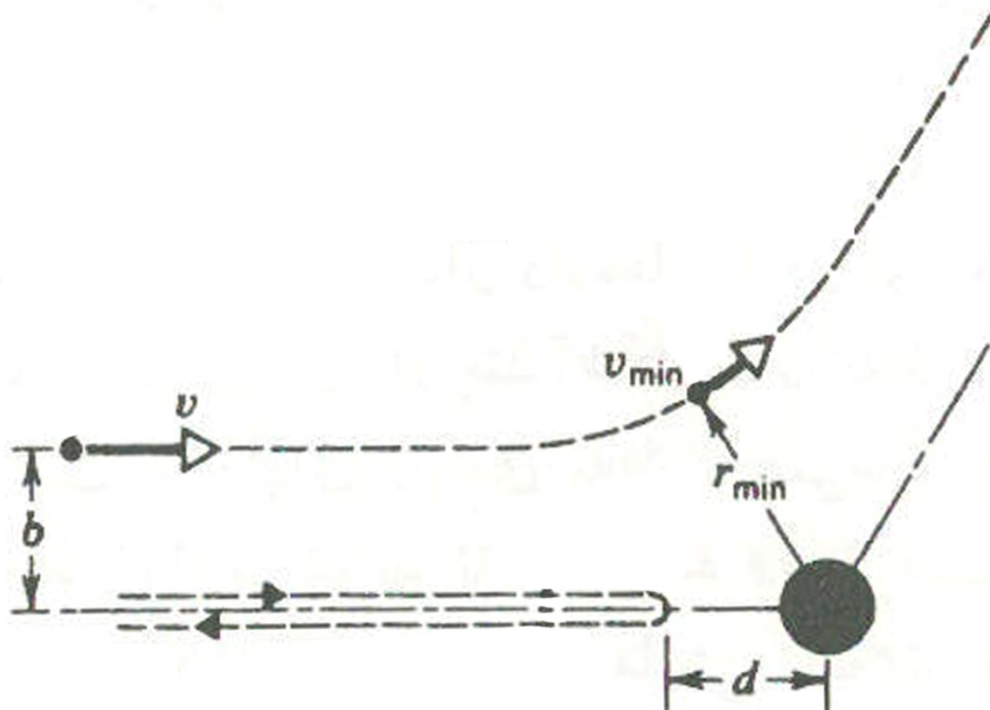
### ۱-۲-۱ پراکندگی کولونی

از آنجا که هسته دارای توزیع بار الکتریکی می باشد، از طریق پراکندگی الکتریکی (کولونی) باریکه ی ذرات باردار، می توان به مطالعه ی آن پرداخت. این پراکندگی می تواند کشسان یا ناکشسان باشد.

#### ۱- پراکندگی کولونی کشسان

پراکندگی کولونی کشسان، پراکندگی رادرفورد نام دارد. زیرا آزمایش های اولیه ی پراکندگی ذرات آلفا در آزمایشگاه رادرفورد انجام شده اند. در شکل ۱-۳ ترتیب هندسی آزمایش پراکندگی نشان داده شده است. ذره ی پراکنده شده، تحت تاثیر نیروی  $\frac{1}{r^2}$  مسیر هذلولی شکلی را دنبال می کند. فرض

بر این است که، هسته ی هدف جرم بسیار زیادی دارد و در نتیجه به عنوان مرکز پراکندگی ثابت باقی می ماند، [2].



شکل ۱-۳: مسیر ذره در پراکندگی کولونی کشسان (پراکندگی رادرفورد)، [2]

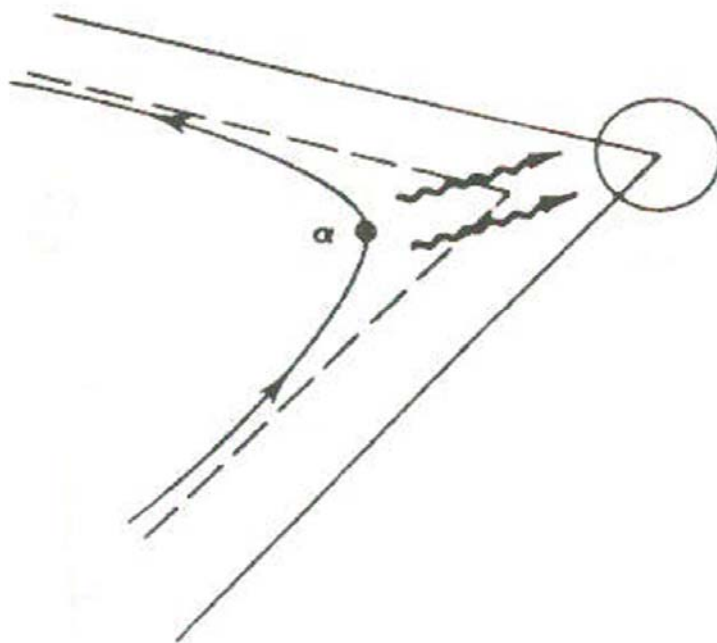
همان طور که در شکل ۱-۳ مشاهده می شود، ذره در امتداد خط مستقیمی که به فاصله ی  $b$  از هسته قرار دارد، به سوی هدف حرکت می کند. این فاصله پارامتر برخورد می باشد. در فواصل خیلی دور از هسته، ذره ی فرودی از انرژی پتانسیل کولونی قابل اغماض برخوردار می باشد، لذا انرژی کل آن را تنها انرژی جنبشی تشکیل می دهد. در هنگام عبور از نزدیکی هسته ی هدف، ذره به کمترین فاصله ی جدایی می رسد. در این حالت انرژی جنبشی اولیه ی آن به انرژی پتانسیل کولونی تبدیل می شود و



در نقاط مختلف مسیر، قسمتی از انرژی به صورت انرژی جنبشی و قسمتی به صورت انرژی پتانسیل می باشد، [2].

## ۲- پراکندگی کولونی ناکشسان

پراکندگی کولونی ناکشسان، را برانگیختگی کولونی می نامند. در این حالت، پرتابه از طریق برهمکنش کولونی با هدف انرژی مبادله می کند و هسته ی هدف بر اثر رویارویی در یک حالت برانگیخته قرار می گیرد و سپس با گسیل پرتوهای  $\gamma$  به سرعت واپاشیده می شود. این فرایند را می توان به صورت گسیل و جذب فوتون های مجازی در نظر گرفت، [2].



شکل ۱-۴: پراکندگی کولونی ناکشسان، [2].

شکل ۱-۴ نمایی از این نوع پراکندگی می باشد. در این شکل فوتون های مبادله شده به صورت خطوط موج دار نشان داده شده اند. هدف در ابتدا در حالت پایه ی خود قرار دارد و می تواند به یکی از حالت های برانگیخته رانده شود. در این شکل طیف ذرات  $\alpha$  به طور ناکشسان پراکنده شده اند، [2].

## ۱-۲-۲ پراکندگی هسته ای

### ۱- پراکندگی هسته ای کشسان

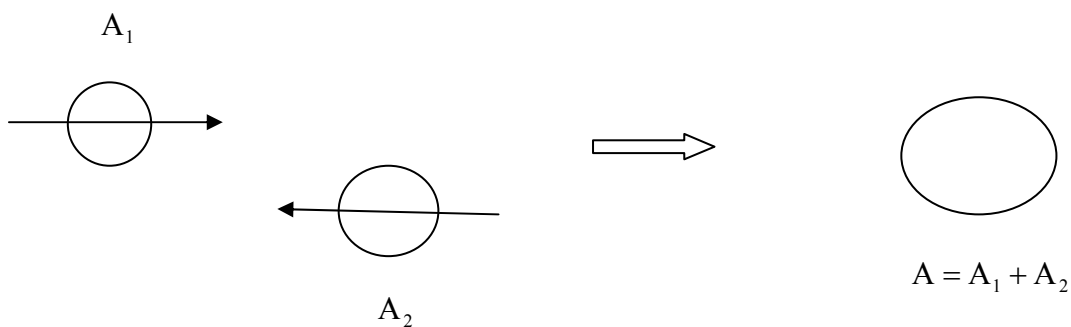
پراکندگی هسته ای کشسان ذرات با مسئله ی معروف پراش نور توسط قرص کدر در اپتیک تشابه زیادی دارد. هسته یک مرکز جذب بسیار قوی برای نوکلئون هاست و بنابراین مقایسه آن را با قرص کدر باید کاملاً معتبر دانست. برای ذرات باردار، لازم است تداخل بین پراکندگی هسته ای و کولونی را مورد نظر قرار دهیم. هرگاه بخواهیم پراکندگی کشسان نوکلئون ها را در شکل پراش گونه مشاهده کنیم، باید اثرات پراکندگی رادرفورد را حذف کنیم. یکی از نتایج مطالعات پراکندگی نوکلئون، تعیین شعاع هسته ای می باشد، [2].

### ۲- پراکندگی هسته ای ناکشسان

پراکندگی هسته ای ناکشسان، مثل پراکندگی کولونی ناکشسان، هنگامی نتیجه می شود که هسته ی هدف از پرتابه انرژی بگیرد و به حالت های برانگیخته برود، [2]. با استفاده از این نوع پراکندگی می توان، اطلاعاتی درباره ی اسپین و پارته ی حالت های برانگیخته بدست آورد.

## ۱-۲-۳ همجوشی هسته ای

در پارامتر برخورد های کوچک، خصوصیات جدید و غیر معمولی اینگونه واکنش های یون های سنگین، پدیدار می شود. هرگاه پارامتر برخورد به قدری کوچک باشد که هسته بتواند کاملاً همپوشی داشته باشد، یک هسته ی مرکب که معرف همجوشی کامل دو هسته می باشد می تواند به صورت یک حالت میانه تشکیل شود که شکل ۱-۵ این بیان را به تصویر می کشد. اما برای غلبه بر سد کولونی دافعه، یون تابشی باید کاملاً پر انرژی باشد و از این رو هسته ی مرکب با انرژی برانگیختگی قابل توجهی تشکیل می شود. این هسته ی مرکب، ممکن است یک حالت غیر معمول از ماده ی هسته ای باشد که در واکنش های با هسته های سبک، نتوان به آن دسترسی یافت. انرژی تابشی هسته ی مرکب، بسیار زیاد می باشد و نیز چگالی و دمای آن ورای آنچه که در واکنش های یون های سبک قابل حصول است، می باشد، [2].



شکل ۱-۵: همجوشی هسته ای.

### ۳-۱ تغییر شکل هسته ها

بیشتر اطلاعاتی که از ساختار هسته در اختیار داریم، نه از برهمکنش قوی هسته ای بین هسته ها و محیط اطرافشان، بلکه از برهم کنش خیلی ضعیف تر الکترومغناطیسی حاصل شده اند. به عبارت دیگر نظم موجود در حرکت و توزیع نوکلئون های درون هسته از برهم کنش قوی هسته ای حاصل می شود، اما وسیله ی کاوش در این توزیع، برهم کنش الکترومغناطیسی است. در این کار از میدان های الکترومغناطیسی که در مقایسه با نیروی قوی درون هسته اثر ضعیفتری روی حرکت نوکلئون ها دارد، استفاده می کنند. بدین ترتیب عمل اندازه گیری تاثیر شدیدی روی موضوع تحت بررسی نخواهد گذاشت.

هرگونه توزیع بار الکتریکی و جریان، تولید میدان های الکتریکی و مغناطیسی می کند که به شکل خاصی به فاصله بستگی دارند. معمولا به هر یک از وابستگی های فضایی مربوط به توزیع بار و جریان الکتریکی، یک گشتاور چند قطبی الکترومغناطیسی نسبت می دهند. نظریه الکترومغناطیس برای محاسبه ی گشتاورهای چند قطبی الکتریکی و مغناطیسی، دستورالعمل مشخصی دارد، که با استفاده از این روش و با در نظر گرفتن شکل عملگر گشتاور ها و محاسبه ی مقادیر انتظاری آنها در حالت های مختلف هسته ای، می توان گشتاور های کوانتوم مکانیکی سیستم های هسته ای را هم تعیین کرد، [2].

ساده ترین نوع توزیع بار و جریان، فقط می تواند میدان های چند قطبی مرتبه ی پایین تولید کند.

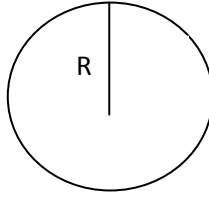
توزیع کروی بار الکتریکی فقط منجر به تولید میدان تک قطبی (کولونی) می شود و هیچ گشتاوری از

مراتب بالاتر در این مورد به وجود نمی آورد. طبیعت در تولید هسته ها بی قاعده عمل نمی کند بلکه هر وقت که تولید ساختاری ساده و متقارن امکان پذیر باشد، گرایش طبیعی چنان است که هسته ها با همان ساختار تولید شوند. از این رو برای مشخص کردن خواص الکترومغناطیسی هسته، معمولاً به اندازه گیری یا محاسبه ی پایین ترین مرتبه ی گشتاور های چند قطبی اکتفا می شود. یکی از شرایط محدود کننده ی گشتاور های چند قطبی، از تقارن هسته ای ناشی می شود که مستقیماً به پارامترهای حالت های هسته ای بستگی دارد. هر گشتاور چند قطبی الکترومغناطیسی پارامترهای خاصی دارد، که با توجه به رفتار عملگر چند قطبی تعیین می شود، [2].

هسته ها در حالت طبیعی دارای مدهای ارتعاشی و دورانی متفاوتی هستند، که این مدها دلیلی بر تغییر شکل هسته ها می باشند و در شکل گیری هسته ها نقش بسزایی دارند. زمانی که هسته تغییر شکل می یابد، شعاع هسته ها به تکانه ی زاویه ای آنها وابستگی پیدا می کند و از آنجا که تکانه ی زاویه ای کمیت بسیار مهمی می باشد و می تواند بر کلیه ی خواص دینامیکی هسته تاثیر بگذارد، محاسبه ی شعاع هسته اهمیت زیادی خواهد داشت. چراکه کمیت های مهمی از قبیل چگالی هسته ها و پتانسیل مربوط به یک واکنش با وابستگی به شعاع هسته ها تعریف می گردند.

برای هسته های کروی همان طور که در شکل ۱-۶ نشان داده می شود، شعاع مورد نظر به صورت زیر تعریف می شود:

$$R = R_0 A^{\frac{1}{3}} \quad (2-1)$$



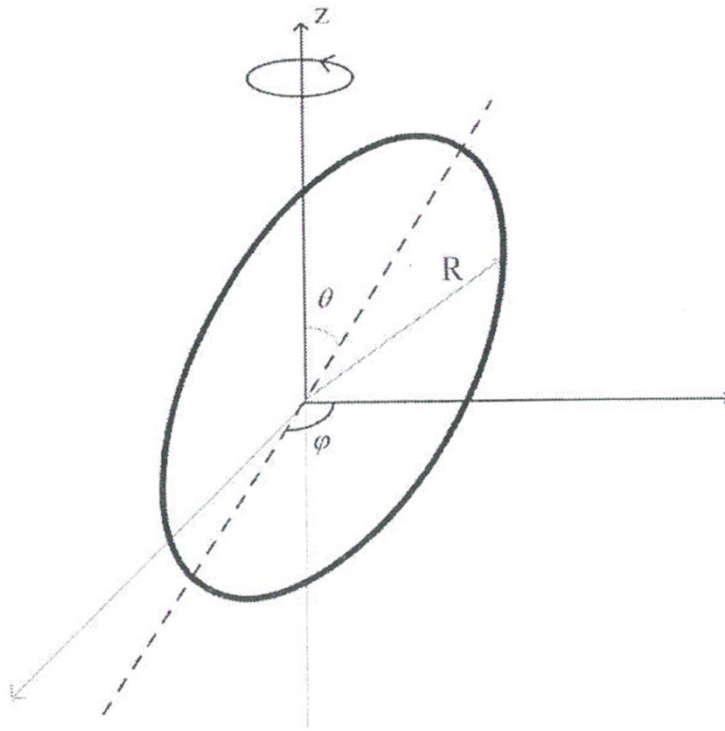
شکل ۱-۶: هسته ی کره

که در رابطه ی (۲-۱)،  $A$  عدد جرمی هسته و  $R_0$  عددی موسوم به ثابت شعاع می باشد که این نیز به نوبه ی خود بنا به محاسبات مختلف، مقادیر متفاوتی دارد. البته باید توجه داشت که هسته دارای لبه ی تیز نیست و این رابطه مقدار تقریبی برای شعاع هسته نتیجه می دهد.

ولی زمانیکه با هسته های تغییر شکل یافته روبرو می شویم، شعاع هسته ها تعریف متفاوتی را به خود می گیرد و وابستگی به زوایای  $\theta$  و  $\varphi$  همانطور که در شکل ۱-۷ مشاهده می شود، پدیدار شده است.

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left[ 1 + \sum_{l,m} \beta_{lm} Y_l^m(\theta, \varphi) \right] \quad (۳-۱)$$

که در آن  $R_0$  مقداری ثابت است. لازم به ذکر است که در این رابطه،  $\varphi$  نشان دهنده ی چرخش هسته حول محور  $Z$  و محور ثابت آزمایشگاهی می باشد، که در شکل ۱-۷ به وضوح نشان داده شده است. اندیس های  $l$  و  $m$  به ترتیب عدد کوانتومی زاویه ای مداری و سمتی نامیده می شوند.  $\beta_{lm}$  ها، در واقع پارامتر تغییر شکل هسته ها می باشد، که از عدم تقارن هسته ها و میزان تغییر شکل آنها ناشی می شود. روشهای متفاوتی برای محاسبه ی این پارامتر با استفاده از داده های آزمایشگاهی وجود دارد، [3].



شکل ۱-۷: نمایش مختصات برای یک هسته ی تغییر شکل یافته

بنابراین با تغییر شکل هسته ها، چگالی و شعاع هسته ای نیز تغییر می یابند و این به نوبه ی خود باعث تغییر در محاسبه ی پتانسیل ها در برهمکنش هسته ای می شود. یا به بیان دیگر، پارامتر تغییر شکل در محاسبه ی احتمال واکنش بسیار قابل ملاحظه است.

## ۱-۴ پتانسیل برهمکنشی

پتانسیل برهم کنشی میان هسته- هسته، یکی از عوامل اساسی در آنالیز پراکندگی می باشد. به خصوص که این اطلاعات برای توصیف و تخمین سطح مقطع ها بسیار مفید و ضروری می باشد. پتانسیل برهم کنشی کل برگرفته از دو قسمت پتانسیل هسته ای و پتانسیل کولونی می باشد.

$$V(R) = V_C(R) + V_N(R) \quad (۴-۱)$$

که پتانسیل هسته ای در این کار، توسط مدل Proximity محاسبه می شود، که در فصل بعد به طور مفصل روی آن بحث می شود.

پتانسیل کولونی برای دو هسته ی کروی هنگامی که فاصله ی بین دو هسته بزرگتر از مجموع شعاع دو هسته ی برهم کنشی باشد، توسط رابطه ی زیر محاسبه می شود.

$$V_C(R) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R}. \quad (۵-۱)$$

در این رابطه،  $Z_1$  و  $Z_2$  اعداد اتمی دو هسته و  $R$  فاصله ی جدایی بین دو هسته ی کروی می باشد.

هنگامی که دو هسته در حالت پایه تغییر شکل یافته باشند، برهمکنش کولونی با استفاده از رابطه

ی اصلاح شده ی زیر محاسبه می شود [4]،



$$V_c(R) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R} + 3Z_1 Z_2 e^2 \sum_{\lambda, i=1,2} \frac{1}{2\lambda+1} \frac{R_i^\lambda(\alpha_i)}{R^{\lambda+1}} Y_\lambda^0(\theta_i) \left[ \beta_{\lambda i} + \frac{4}{7} \beta_{\lambda i}^2 Y_\lambda^0(\theta_i) \right] \quad (6-1)$$

که در این رابطه،  $Y_{\lambda i}(\theta, \varphi)$  ها توابع هارمونیک کروی و  $\beta_{\lambda i}$  ها پارامتر تغییر شکل هسته یا همان قطبش هسته می باشند و  $R_i(\alpha_i)$  ها شعاع های انحنای دو هسته می باشند که به صورت زیر تعریف می شوند [5]،

$$R_i(\alpha_i) = R_{0i} \left[ 1 + \sum_{\lambda} \beta_{\lambda i} Y_\lambda^0(\alpha_i) \right] \text{ (fm)} \quad i=1,2 \quad (7-1)$$

مطابق آنچه که در فصل قبل بیان شد،  $R_{0i}$  تعاریف متفاوتی دارد که در اینجا به چند شکل پرکاربرد آن در مقالات علمی اشاره می کنیم.

$$R_{0i} = 1.15 A_i^{\frac{1}{3}} \text{ (fm)} \quad (8-1)$$

$$R_{0i} = 1.31 A_i^{\frac{1}{3}} - 0.84 \text{ (fm)} \quad (9-1)$$

$$R_{0i} = 1.28 A_i^{\frac{1}{3}} - 0.76 + 0.8 A_i^{-\frac{1}{3}} \text{ (fm)} \quad (10-1)$$

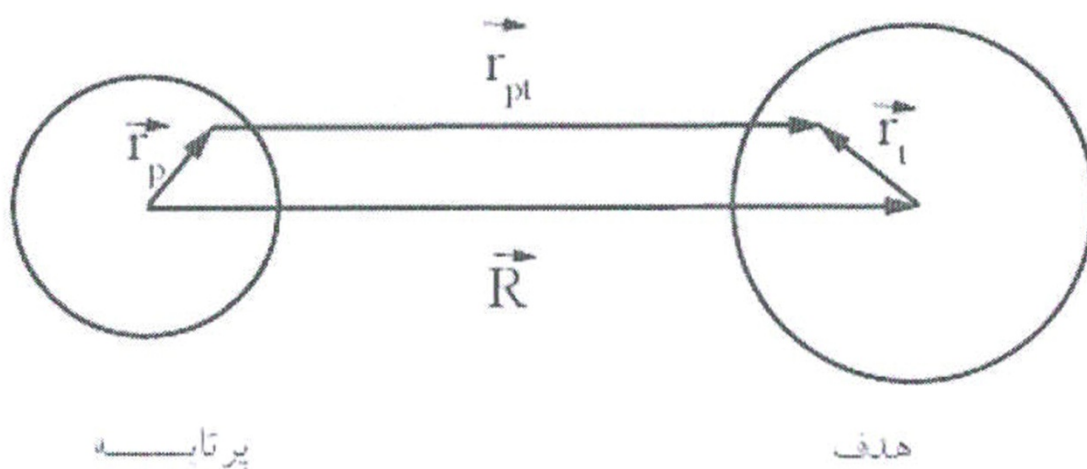
که  $A_i$  ها عدد جرمی هسته ها می باشند. روابط (1-9) و (1-10) بیشتر برای هسته های سنگین استفاده می شوند.

همان طور که مشاهده می شود، پتانسیل برهمکنشی کل برای هسته های تغییر شکل یافته به صورت متفاوت تعریف می شود که در آن اثرات تغییر شکل هسته ها گنجانده شده است. یکی از داده های آزمایشگاهی مهم در مطالعه ی برهمکنش یون های سنگین، داده های سطح مقطع همجوشی می باشد. اهمیت این داده ها در امکان مطالعه ی دقیق تر پتانسیل کل در سیستم برهمکنش کننده است. در

فرمالیزم های تئوری که تا کنون برای محاسبه ی سطح مقطع همجوشی ارائه شده، مقادیر مکان و ارتفاع سد همجوشی دارای اهمیت ویژه ای است. مطالعات انجام شده بر روی هسته های تغییر شکل یافته، نشان می دهد که اثرات تغییر شکل هسته ها تاثیر قابل توجهی بر روی مقادیر مکان و ارتفاع سد همجوشی، به ازای زوایای برهمکنشی مختلف دارد، [6,7]. بنابراین هرچه اثرات تغییر شکل هسته ها دقیق تر تخمین زده شوند، ارتفاع سدی دقیق تر و به نوبه ی خود به نتایج دقیق تری برای سطح مقطع تئوری دست خواهیم یافت.

## ۱-۵ مدل دابل فولدینگ<sup>۱</sup>

مدل D.F. در دهه های اخیر توسط محققین مختلف برای محاسبه ی پتانسیل بین هسته های پرتابه و هدف، استفاده شده است [8]. در این مدل پتانسیل هسته ای بین دو یون برهمکنشی با استفاده از چگالی هسته ای دو هسته ی هدف و پرتابه و نیروی موثر نوکلئون- نوکلئون محاسبه می شود. در این مدل معمولاً از نیروهای نوکلئونی از نوع M3Y برای محاسبه ی پتانسیل هسته ای استفاده می شود.



شکل ۱-۸: نمایشی از مختصات موضعی نقاط برهمکنشی هسته های پرتابه و هدف، [8].

<sup>1</sup> Double Folding

چنانچه هسته را به صورت توزیعی پیوسته از ماده در نظر بگیریم، پتانسیل بر حسب فاصله ی جدایی بین مراکز جرم دو هسته تعریف می شود. در این مدل عملگر دو جسمی جایگزیده ی  $V$  به شکل زیر تعریف می شود؛

$$V = \sum_{pt} v_{pt} \quad (11-1)$$

که اندیس های  $p$  و  $t$  به ترتیب نشان دهنده ی نوکلئون های هسته های پرتابه و هدف می باشند.

$v_{pt}$  مجموع پتانسیل های موضعی نوکلئون های پرتابه و هدف می باشد، که به چگالی ماده ی هسته ای وابسته است. قسمت حقیقی این پتانسیل با استفاده از فرمالیزم اپراتوری فشاخ توسط رابطه ی زیر محاسبه می شود [8]،

$$\begin{aligned} V_{00}(\mathbf{R}) &\equiv \langle \psi_{p0} \psi_{t0} | V | \psi_{p0} \psi_{t0} \rangle \\ &= \langle \psi_{p0} \psi_{t0} | \sum_{pt} v_{pt}(\vec{r}_{pt}, \rho_p, \rho_t) | \psi_{p0} \psi_{t0} \rangle \end{aligned} \quad (12-1)$$

که در آن،  $\psi_{p0}$  و  $\psi_{t0}$  به ترتیب بیانگر تابع موج کلی هسته های پرتابه و هدف در حات پایه می باشند.

با فرض اینکه هسته را توزیعی پیوسته از ماده ی هسته ای در نظر بگیریم، رابطه ی فوق در مدل D.F. به شکل زیر تبدیل می شود؛

$$V_F(\mathbf{R}) = \int d\vec{r}_p \int d\vec{r}_t \rho_p(\vec{r}_p) \rho_t(\vec{r}_t) v_{pt}(\vec{r}_{pt}, \rho_p, \rho_t) \quad (13-1)$$