بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه آمار

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی آمار گرایش آمار ریاضی

برآورد فاصله ای در خانواده نمایی طبیعی

استاد راهنما:

دکتر افشین پرورده

استاد مشاور:

دکتر مجید اسدی

پژوهشگر:

علیرضا خواجوی

اسفند ماه ۱۳۸۷

شیوه نگارش پایان نامه رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه آمار

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی آمار گرایش آمار- ریاضی

آقای علیرضا خواجوی

تحت عنوان

برآورد فاصله ای در خانواده نمایی طبیعی

در تاریخ ۸۷/۱۲/۱۴ توسط هیأت داوران زیر بررسی با نمره ۱۸/۵ و با درجه عالی به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه دکتر افشین پرورده با مرتبه‌ی علمی استادیار — امضاء

۲-استاد مشاور پایان نامه دکترمجید اسدی با مرتبه ی علمی دانشیار — امضاء

۳- استاد داور داخل گروه دکتر منوچهر خردمند نیا با مرتبه‌ی علمی استاد یار — امضاء

۴-استاد داور خارج از گروه دکتر غلامرضا محتشمی بامرتبه ی علمی دانشیار — امضاء

امضای مدیر گروه

سپاسگذاری

پیش از هر چیز لازم است مراتب امتنان قلبی خود را از الطاف والدینم ابراز دارم چرا که به من فرصت زیستن در محیطی مساعد برای رشد و پیشرفت را دادند و مرا با روشنی و عشق آشنا کردند. همچنین از دوستانی که از نعمت هم نفسی‌شان بهره‌ها برده‌ام صمیمانه تشکر می‌کنم؛ به ویژه از محمد شریعتمداری که به جز آنکه انسانی فروتن و شایسته دوستی است، علاوه بر این بدون کمک‌های او اتمام این پایان‌نامه میسر نبود.

چکیده

در این پایان‌نامه مسئله برآورد فاصله‌ای برای میانگین خانواده توزیع‌های نمایی طبیعی با تابع واریانس درجه دوم مورد بررسی قرار گرفته است. این خانواده شامل توزیع‌های دوجمله‌ای، دوجمله‌ای منفی، پواسن، نرمال، گاما و سکانت هذلولولی تعمیم‌یافته است. در این تحقیق ابتدا برخی تعاریف و مفاهیم کلی مورد نیاز در طول پایان نامه از جمله احتمال پوشش، بسط اجورث و ویژگی انطباق احتمال را مطرح می‌کنیم. سپس فاصله اطمینان والد را معرفی کرده و با استفاده از مثال‌های عددی و یافته‌های نظری نشان می‌دهیم که دارای عملکردی ضعیف و آمیخته به خطا است. پس از مشاهده نقاط ضعف فاصله والد، سه فاصله اطمینان جایگزین به عنوان نامزدهایی برای مقایسه با فاصله والد معرفی می‌شوند. این فواصل شامل فاصله امتیاز رائو، فاصله نسبت درست‌نمایی و فاصله جفریز با دم‌های برابر هستند. به منظور مقایسه عملکرد این ۴ فاصله از دو معیار احتمال پوشش و طول مورد انتظار فواصل استفاده می‌کنیم. نتایج به دست آمده نشان می‌دهند که هر سه فاصله اطمینان جایگزین از لحاظ احتمال پوشش کاملا بر فاصله والد برتری دارند هر چند که طول فاصله امتیاز رائو کمی بیشتر از دو فاصله دیگر است. روی‌هم‌رفته می‌توان گفت که فواصل جفریز و نسبت درست‌نمایی بهترین جایگزین‌ها برای فاصله دو طرفه والد هستند. در پایان، فواصل اطمینان یک‌طرفه برای میانگین سه توزیع گسسته دوجمله‌ای، دوجمله‌ای منفی و پواسن را بررسی می‌کنیم. همانند حالت دوطرفه، فاصله اطمینان یک‌طرفه والد نیز دارای اشکالاتی همچون اریبی و نوسان در احتمال پوشش است. برای جایگزینی این فاصله، دو فاصله اطمینان یک‌طرفه جفریز و تصحیح‌یافته مرتبه دوم مورد بررسی قرار گرفته‌اند. مجددا واضح است که این دو فاصله جایگزین دارای برتری محسوسی بر فاصله یک‌طرفه والد هستند.

کلیدواژه: احتمال پوشش، بسط اجورث، خانواده توزیع نمایی طبیعی با تابع واریانس درجه دوم، فاصله اطمینان امتیاز رائو، فاصله اطمینان جفریز، فاصله اطمینان نسبت درست‌نمایی، فاصله اطمینان والد.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول : مفاهیم پایه

فصل دوم : معرفی فواصل اطمینان

عنوان صفحه

فهرست شکل‌ها

عنوان **صفحه**

مخفف‌ها و نمادها

CI..:Confidence Interval
CI_S ....Wald Confidence Interval
CI_R .... Score Confidence Interval
CI_J .... Jeffreys Confidence Interval
CI_{LR} .... Likelihood Ratio Confidence Interval
CI_2 ....Second Order Corrected Confidence Interval
C(p،n) ....Coverage Probability
Δ .... Discriminant
E(L) ....Expected Length
GHS .... Generalized Hyperbolic Secant
k_r ....r'th Cumulant
$K_X(t)$ ....Cumulant Generating Function
NEFQVF............................Natural Exponential Family with Quadratic Variance Function

پیش گفتار

بدون‌شک یکی از پرکاربردترین ابزارهای مورد استفاده در آمار استنباطی، فاصله اطمینان والد است. از جمله دلایل اصلی محبوبیت این فاصله، سهولت محاسبه کران‌های آن و همچنین اعتقاد به دقت آن است. در واقع با در نظر گرفتن این مسئله که در یافتن کران‌های فاصله والد برای پارامتر توزیع‌های به جز توزیع نرمال، از قضیه حد مرکزی استفاده می‌شود و با توجه به آنکه تقریبا هر شخص آشنا با مقدمات آمار بر این باور است که تقریب به کار رفته در این قضیه، به ازای حجم نمونه‌های بیشتر از ۳۰ (یا حداکثر ۵۰) دارای خطای قابل اغماضی می‌باشد، لذا باور عمومی به این سو گرایش یافته است که فاصله اطمینان والد برای حجم نمونه‌های بزرگ یا بسیار بزرگ دارای عملکرد مطلوبی است و صرفا به ازای مقادیر کوچک n و یا مقادیر کرانه‌ای پارامتر توزیع مورد بررسی می‌توان به صحت این فاصله شک نمود. اما با در نظر گرفتن این موضوع که از جمله مهم‌ترین کاربردهای این فاصله در برآورد میانگین توزیع‌های گسسته مهمی همچون دوجمله‌ای، دوجمله‌ای منفی و پواسن است، می‌بینیم که احتمال پوشش این فاصله برای میانگین این توزیع‌ها دارای مشکلات قابل توجهی همچون اریبی منفی منظم و همچنین وجود نوسان است. در واقع علی‌رغم باورهای رایج، این نقایص فقط به ازای حجم نمونه‌های کوچک برقرار نیست و با واکاوی نتایج عددی حاصل از بررسی این فاصله و همچنین با استناد به یافته‌های نظری به دست آمده درمی‌یابیم که حتی برای حجم نمونه‌های بسیار بزرگ و برای مقادیری از پارامتر که دارای احتمال وقوع بیشتری هستند، باز هم این نقاط ضعف مطرح می‌باشند و در بسیاری از اوقات، الگوی حاکم بر این بی‌نظمی‌ها فاقد یک روند قابل پیش بینی است.

از سوی دیگر این مسئله نیز شایان ذکر است که این سه توزیع متعلق به خانواده‌ای از توزیع‌ها موسوم به خانواده توزیع‌های نمایی طبیعی با تابع واریانس درجه دوم می‌باشند که این خانواده سه توزیع پیوسته نرمال، گاما و سکانت هذلولی تعمیم‌یافته را نیز در بر می‌گیرد. لذا با توجه به جامعیت حاکم بر این خانواده از توزیع‌ها، که برای مثال از یکسان بودن شکل گشتاورها، برآوردها و یا توابعی همچون تابع اطلاع فیشر می‌توان به آن پی برد، چندان دور از ذهن نیست که حداقل برخی از مشکلات ذکر شده برای برآورد پارامتر توزیع‌های گسسته با استفاده از فاصله والد، در مورد دو توزیع پیوسته گاما و سکانت هذلولوی تعمیم‌یافته نیز صادق باشند و در عمل نیز با بررسی این توزیع‌ها می‌بینیم که صرف‌نظر از معضل نوسان در احتمال پوشش که مختص به توزیع‌های گسسته و ناشی از طبیعت مشبکه‌ای آنها است، باز هم پدیده اریبی منظم را می‌توان به سهولت در احتمال پوشش فاصله والد برای میانگین این دو توزیع تشخیص داد.

به طور کلی با وجود آنکه فاصله والد از حیث کمینه کردن طول، دارای برتری نسبتا محسوسی بر فواصل دیگر است لیکن با در نظر گرفتن نقاط ضعف مطرح شده در مورد احتمال پوشش این فاصله، و با توجه به دقت بالایی که بالاخص در برآورد میانگین توزیع‌های گسسته و در موارد حساسی همچون مسائل کنترل کیفیت مورد نیاز می‌باشد، به این نتیجه می‌رسیم که لازم است در جستجوی فواصل اطمینان دیگری باشیم که تا حد ممکن فاقد نقاط ضعف فاصله والد باشند و در واقع این موضوع، محور اصلی مباحث مطرح شده در این پایان‌نامه است.

براساس مقدمات ذکر شده در فوق، ابتدا در فصل اول، مفاهیم و قضایایی همچون بسط اجورث و ویژگی انطباق احتمال را که در فصول بعد آنها را مورد استفاده قرار خواهیم داد، بیان می‌کنیم. سپس در فصل دوم، فاصله والد را معرفی نموده و با استفاده از مثال‌های عددی و نتایج نظری، عملکرد ضعیف آنرا آشکار می‌سازیم. حال با توجه به آنکه به نقصان فاصله والد پی بردیم، می‌خواهیم فواصل اطمینان دیگری را به عنوان نامزدهایی برای جانشینی فاصله والد مطرح نماییم. بنابراین در ادامه مطالب این فصل، سه فاصله اطمینان جایگزین به نام‌های فاصله امتیاز که با وارون ساختن ناحیه پذیرش آزمون امتیاز رائو به دست می‌آید، فاصله نسبت درست‌نمایی که با استفاده از ناحیه پذیرش آزمون نسبت درست‌نمایی ایجاد می‌شود و فاصله (اعتبار) جفریز که براساس تابع پسین مبتنی بر پیشین جفریز محاسبه می‌شود را معرفی می‌کنیم. همچنین در فصل سوم با استفاده از دو ابزار رایج یعنی طول مورد انتظار فواصل و احتمال پوشش آنها به مقایسه عملکرد فاصله اطمینان والد با سه فاصله جایگزین مطرح شده می‌پردازیم.

به دلیل آنکه همه تعاریف و نتایج ارائه شده در این فصول، مربوط به فواصل اطمینان دوطرفه است و با توجه به مشابهتی که در روند به دست آوردن فواصل اطمینان یک‌طرفه و دوطرفه وجود دارد بنابراین ممکن است چنین تصور شود که به سادگی می‌توان نتایج به دست آمده در مورد فواصل دوطرفه را به فواصل یک‌طرفه نیز تعمیم داد. در واقع در بررسی فاصله یک‌طرفه والد متوجه وجود مشکلاتی همچون اریبی و نوسان – هر چند با الگوهایی متفاوت از حالت دوطرفه – می‌شویم، لیکن چنانچه بخواهیم فواصل یک‌طرفه امتیاز و نسبت درست‌نمایی را به عنوان نامزدهایی برای جانشینی آن مطرح کنیم، می‌بینیم که این دو فاصله نیز – بر خلاف حالت دوطرفه – خود دارای مشکلاتی مشابه با فاصله یک‌طرفه والد هستند که باعث بی‌اعتباری آنها می‌گردد. بر این اساس در فصل چهارم، پس از مطالعه ویژگی‌های فواصل یک‌طرفه والد و امتیاز و مشاهده نقاط ضعف آنها، دو فاصله یک‌طرفه به نام‌های فاصله جفریز و فاصله تصحیح‌یافته مرتبه دوم را به عنوان جایگزین‌هایی برای فواصل رایج والد و امتیاز معرفی نموده و عملکرد آنها را مورد بررسی قرار می‌دهیم و اقدام به نتیجه‌گیری می‌نماییم.

فصل اول

مفاهیم پایه

۱ – ۱ مقدمه

در این فصل به معرفی مفاهیم و تعاریفی می‌پردازیم که در فصل‌های بعد آنها را مورد استفاده قرار خواهیم داد. در بخش دوم، ابتدا تعریف برخی از مفاهیم اولیه مانند تابع مرتب، احتمال پوشش و طول مورد انتظار را ارائه می‌کنیم. خانواده توزیع‌های نمایی طبیعی با تابع واریانس درجه دوم(NEF-QVF)[1] را در بخش سوم معرفی کرده و برخی از ویژگی‌ها و مشخصه‌های این خانواده را شرح می‌دهیم. سپس بسط اجورث[2] برای تابع توزیع تجمعی را در بخش چهارم مطرح می‌کنیم و برخی نکات کلیدی مرتبط با این تابع را که در فصل‌های آینده از آنها استفاده خواهیم کرد، ذکر می‌نماییم.

۱ – ۲ برخی تعاریف اولیه

نخستین مفهومی که به معرفی آن می‌پردازیم تعریف تابع مرتب است.

تعریف ۱ – ۱ اگر $\{c_n\}$ و $\{d_n\}$ دو دنباله از اعداد باشند به قسمی که وقتی $n\to\infty$ ، $\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{d_n}=0$ ، آنگاه گوییم c_n یک تابع مرتب کوچک برحسب d_n است و این وضعیت را با نماد $c_n=o(d_n)$ نشان می‌دهیم.

---

[1] Natural Exponential Family with Quadratic Variance Function .

[2] Edgeworth Expansion

تعریف ۱ - ۲ اگر $\{c_n\}$ و $\{d_n\}$ دو دنباله از اعداد باشند به قسمی که وقتی $n \to \infty$ ، $\lim_{n \to \infty} \frac{c_n}{d_n} = l$ ، که l یک مقدار کراندار است، آنگاه گوییم c_n یک تابع مرتب بزرگ برحسب d_n است و این وضعیت را با نماد $c_n = O(d_n)$ نشان می‌دهیم.

نتیجه ۱ - ۱ از دو تعریف بالا به سادگی نتیجه می‌شود که هرگاه رابطه $c_n = o(d_n)$ برقرار باشد آنگاه $c_n = O(d_n)$ نیز برقرار است. همچنین ذکر این نکته نیز ضروری است که وقتی در یک عبارت محاسباتی چندین بار از تابع $O(d_n)$ استفاده می‌شود، ممکن است در هر یک از موارد، این تابع دارای مقداری متفاوت با موارد دیگر باشد.

تعریف ۱ - ۳ فاصله اطمینان با فرض آنکه متغیر تصادفی X دارای توزیع احتمال $f(\theta)$ باشد آنگاه براساس یک نمونه تصادفی مشاهده شده، فاصله تصادفی $S(\underline{X}) = (L(\underline{X}), U(\underline{X}))$ را یک فاصله اطمینان برای پارامتر θ می‌نامیم، که توابع L و U صرفا به مشاهدات نمونه بستگی دارند و مستقل از θ هستند.

تعریف ۱ - ۴ احتمال پوشش با فرض آنکه $X \sim f(\theta)$ باشد و بر اساس نمونه مشاهده شده، یک فاصله اطمینان برای پارامتر θ به صورت $(L(\underline{X}), U(\underline{X}))$ به دست آید آنگاه احتمال پوشش این فاصله برابر است با

$$P_\theta \left[\theta \in (L(\underline{X}), U(\underline{X}))\right].$$

علاوه براین، فاصله $S(\underline{X}) = (L(\underline{X}), U(\underline{X}))$ را یک فاصله اطمینان در سطح اطمینان $1-\alpha$ گوییم هرگاه برای هر θ متعلق به فضای پارامتر داشته باشیم

$$P_\theta \left[\theta \in S(\underline{X})\right] \geq 1-\alpha .$$

تعریف ۱ - ۵ طول مورد انتظار با فرض آنکه $X \sim f(\theta)$ باشد و بر اساس نمونه مشاهده شده، یک فاصله اطمینان برای پارامتر θ به صورت $(L(\underline{X}), U(\underline{X}))$ به دست آید آنگاه طول مورد انتظار این فاصله برابر است با

$$E_\theta \left(U(\underline{X}) - L(\underline{X})\right).$$

برای به دست آوردن فواصل اطمینان، روش‌های گوناگونی ارائه شده است که در اینجا برخی از آنها را معرفی می‌کنیم. یکی از پراستفاده‌ترین این روش‌ها، روش کمیت محوری[1] است. با این فرض که $X \sim f(\theta)$ باشد، متغیر تصادفی $T(\underline{X},\theta)$ را یک کمیت محوری می‌نامیم هرگاه توزیع $T(\underline{X},\theta)$ به θ بستگی نداشته باشد. حال با فرض آنکه T تابعی اکیدا صعودی (یا نزولی) بر حسب θ باشد، به سادگی می‌توان نشان داد که به ازای مقادیر ثابت t_1 و t_2، نامساوی

$$t_1 < T(\underline{X},\theta) < t_2$$

معادل با نامساوی زیر است

$$L(\underline{X}) < \theta < U(\underline{X}).$$

به این ترتیب به ازای متغیرهای تصادفی $L(\underline{X}) < U(\underline{X})$ که مستقل از θ هستند، به فاصله اطمینانی برای پارامتر θ دست می‌یابیم.

به ازای هر کمیت محوری T، اگر t_1 و t_2 به نحوی انتخاب شوند که اندازه $U(\underline{X})-L(\underline{X})$ ، یعنی طول فاصله اطمینان مشاهده شده، مینیمم شود، آنگاه چنین فاصله‌ای را کوتاه‌ترین فاصله اطمینان بر مبنای کمیت محوری T می‌نامند. در عمل برای یافتن کوتاه‌ترین فاصله اطمینان در سطح $1-\alpha$ بر مبنای کمیت محوری T بایستی مقدار $U(\underline{X})-L(\underline{X})$ را با شرط برقرار بودن قید $P_\theta\left[t_1 < T(\underline{X},\theta) < t_2\right] \geq 1-\alpha$ مینیمم کنیم.

یک روش دیگر برای یافتن فواصل اطمینان، معکوس نمودن ناحیه پذیرش آزمون فرض است. بر این اساس اگر ناحیه پذیرش آزمون فرض $\mathrm{H}_0: \theta=\theta_0$ در سطح آزمون α به صورت $A(\theta_0)$ باشد آنگاه با استفاده از نمونه تصادفی $\underline{X}=(X_1,X_2,\dots,X_n)$ می‌توان مجموعه

$$S(\underline{X}) = \{\theta: \underline{X} \in A(\theta)\}$$

را به عنوان فاصله اطمینانی برای پارامتر θ در سطح اطمینان $1-\alpha$ در نظر گرفت.

[1] Pivotal Quantity

آخرین روشی که در اینجا ذکر می‌شود، مبتنی بر دیدگاه بیزی و استفاده از اطلاعات موجود در تابع پیشین درباره پارامتر θ است. در واقع اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی (جرم) احتمال $f_\theta(x)$ باشد و θ را نیز به عنوان متغیر تصادفی‌ای با توزیع پیشین $\pi(\theta)$ در نظر بگیریم آنگاه بر مبنای یک نمونه تصادفی n تایی، توزیع پسین θ به شرط $\underline{X}=\underline{x}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$h(\theta|\underline{x}) = \frac{\pi(\theta) f_\theta(\underline{x})}{g(\underline{x})}$$

که در آن

$$g(\underline{x}) = \begin{cases} \sum_{\theta} \pi(\theta) f_\theta(\underline{x}) & \text{اگر } \pi \text{ تابعی گسسته باشد} \\ \int \pi(\theta) f_\theta(\underline{x}) d\theta & \text{اگر } \pi \text{ تابعی پیوسته باشد} \end{cases}$$

حال با استفاده از تابع $h(\theta|\underline{x})$، مقادیر $L(\underline{x})$ و $U(\underline{x})$ را به نحوی مشخص می‌کنیم که در رابطه زیر صدق کنند

$$P\left(L(\underline{X}) < \theta < U(\underline{X}) \middle| \underline{X}=\underline{x}\right) \geq 1-\alpha$$

و به این طریق به فاصله اطمینانی برای پارامتر θ در سطح اطمینان $1-\alpha$ دست می‌یابیم. البته با توجه به استفاده از توزیع پسین و معلوم در نظر گرفتن $\underline{X}$ در این توزیع، می‌بینیم که گاهی در منابع آماری برای تمایز بخشیدن بین فاصله اطمینان به دست آمده از این روش و فواصل حاصل از روش‌های آمار کلاسیک، این فاصله اطمینان بیزی را یک فاصله اعتبار[1] می‌نامند.

تعریف ۱ - ۶ همگرایی در توزیع اگر $\{X_n\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی با تابع توزیع تجمعی $\{F_n\}$ و X یک متغیر تصادفی با تابع توزیع تجمعی F باشد آنگاه گوییم X_n در توزیع به X همگرا می‌شود اگر

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x)=F(x) \quad , \forall x \in C_F$$

که C_F مجموعه نقاط پیوستگی F است، و برای نشان دادن این همگرایی از نماد $X_n \xrightarrow{D} X$ استفاده می‌کنیم.

---

[1] Credible Interval

قضیه ۱ - ۱ (قضیه حد مرکزی) اگر X_1 و ... و X_n یک نمونه تصادفی از متغیر تصادفی X با میانگین متناهی μ و واریانس $\sigma^2 > 0$ باشد و اگر $\overline{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$ و قرار دهیم $Z_n = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}$، آنگاه

$$Z_n \xrightarrow{D} Z$$

که متغیر تصادفی Z دارای توزیع نرمال استاندارد است.

اثبات این قضیه در منابع متعددی از جمله روهاتجی و صالح[1] (۲۰۰۱، ص۲۹۶) ارائه شده است.

قضیه ۱ - ۲ (قضیه اسلاتسکی[2]) اگر $\{X_n\}$ و $\{Y_n\}$ دو دنباله از متغیرهای تصادفی باشند به طوری که $X_n \xrightarrow{D} X$ و $Y_n \xrightarrow{P} c$، که c یک مقدار ثابت است، آنگاه

$$X_n Y_n \xrightarrow{D} cX .$$

برای دیدن اثبات این قضیه می‌توان به روهاتجی و صالح (۲۰۰۱، ص ۲۷۰) مراجعه نمود.

نتیجه ۱ - ۲ با در نظر گرفتن دو قضیه بالا و با توجه به آنکه می‌دانیم که بر مبنای تابع $\hat{\sigma}^2 = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$، رابطه $\hat{\sigma} \xrightarrow{P} \sigma$ برقرار است لذا

$$W_n = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu}{\hat{\sigma}} \xrightarrow{D} Z . \qquad (۱-۱)$$

تابع مولد کومولانت[3] مقدار لگاریتم طبیعی تابع مولد گشتاور را تابع مولد کومولانت می‌نامند و آنرا با $K_X(t)$ نمایش می‌دهیم. با مساوی ۰ قرار دادن مقدار t در مشتق r ام این تابع، کومولانت مرتبه r ام (k_r) به دست می‌آید (یعنی k_r ضریب t^r در بسط مکلورن $\ln M_X(t)$ است)، به عبارت دیگر

[1] Rohatgi and Saleh
[2] Slutsky
[3] Cumulant

$$k_r = K^{(r)}(0) \qquad \text{و} \qquad K_X(t) = \ln M_X(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_j t^j}{j!}.$$

علاوه بر این،

$$k_4 = \mu_4 - 3\sigma^4 \ \text{و}\ k_3 = \mu_3 \ ،\ k_2 = \sigma^2 \ ،\ k_1 = \mu.$$

۱ – ۳ خانواده توزیع‌های نمایی طبیعی با تابع واریانس درجه دوم

توزیع متغیر تصادفی X را متعلق به خانواده توزیع‌های نمایی طبیعی گوییم هرگاه بتوان تابع چگالی (جرم) احتمال آنرا به صورت زیر نمایش داد

$$f(x|\xi) = \exp\{\xi x - \psi(\xi)\}\ h(x). \qquad (۱-۲)$$

در این خانواده از توزیع‌ها، تکیه‌گاه یا حوزه مقادیر متغیر تصادفی به پارامتر بستگی ندارد، تمامی این توزیع‌ها تک پارامتری هستند و ξ را پارامتر طبیعی می‌نامیم. علاوه بر این، به سادگی می‌توان نشان داد که میانگین، واریانس و تابع مولد کومولانت‌های این خانواده از توزیع‌ها به ترتیب برابر هستند با

$$\mu = \psi'(\xi) \ ،$$

$$\sigma^2 = \psi''(\xi) \ \text{و}$$

$$K(t) = \psi(t+\xi) - \psi(\xi). \qquad (۱-۳)$$

با مشتق گیری از رابطه (۱-۳) ، به عبارت زیر برای کومولانت مرتبه r ام متغیر تصادفی X دست می‌یابیم

$$k_r = \psi^{(r)}(\xi). \qquad (۱-۴)$$

همچنین بر مبنای یک نمونه تصادفی n تایی، برآوردگر درست‌نمایی ماکزیمم این خانواده از توزیع‌ها به صورت زیر به دست می‌آید

$$L(\xi)=f(\underline{x}|\xi)=\exp\{n\overline{x}\,\xi-n\Psi(\xi)\}\prod_{i=1}^{n}h(x_i)$$

$$\Rightarrow \qquad l(\xi)=\ln L(\xi)=n\overline{x}\,\xi-n\Psi(\xi)+\sum_{i=1}^{n}\ln h(x_i)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial l}{\partial \xi}=n\overline{x}-n\Psi'(\xi)=0\,.$$

لذا برآوردگر MLE برای میانگین این خانواده از توزیع‌ها برابر با $\hat{\mu}=\overline{X}$ می‌باشد.

تابع اطلاع فیشر[1] مقدار تابع اطلاع فیشر برای پارامتر μ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$I(\mu)=E_{\mu}\left[\partial\ln f(\underline{X},\mu)/\partial\mu\right]^2$$

و در صورت برقرار بودن شرایط نظم (شرایط نظم در منابع متعددی از جمله روهاتجی و صالح (۲۰۰۱، ص ۳۹۱) ذکر شده است) این تابع برابر است با

$$I(\mu)=-E_{\mu}\left[\partial^2\ln f(\underline{X},\mu)/\partial\mu^2\right].$$

اکنون براساس یک نمونه تصادفی n تایی از توزیعی متعلق به خانواده نمایی طبیعی و بر اساس تابع $b(\cdot)=(\psi')^{-1}(\cdot)$ می‌بینیم که

$$I(\mu)=-E_{\mu}\left[X\,b''(\mu)-n\mu\,b''(\mu)-n\psi''(b(\mu))(b'(\mu))^2\right] \qquad (۵-۱)$$

که در آن $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$.

[1] Fisher

لذا با جایگذاری $\xi = b(\mu)$ ، $\psi''(b(\mu)) = \psi''(\xi) = \sigma^2$ و $b'(\mu) = \dfrac{1}{\psi''(\xi)}$ در رابطه (۱-۵) به دست می‌آوریم

$$I(\mu) = n\,\sigma^{-2}. \tag{۱-۶}$$

برای مطالعه بیشتر در مورد ویژگی‌های خانواده توزیع‌های نمایی طبیعی می‌توان به منابعی همچون موریس[1] (۱۹۸۲ و ۱۹۸۳)، براون[2] (۱۹۸۶)، لتاک و مورا[3] (۱۹۹۰) و عارفی، محتشمی برزادران و واقعی[4] (۲۰۰۸) مراجعه نمود.

اما قابل توجه ترین ویژگی این توزیع‌ها، رفتار جالب تابع واریانس آنها می‌باشد. در این خانواده از توزیع‌ها، می‌توان واریانس را به صورت یک تابع چند جمله ای و یا توانی بر حسب میانگین نمایش داد. در حالت خاصی که بتوان واریانس را به عنوان یک تابع (حداکثر) درجه دوم از میانگین مانند

$$\sigma^2 = Var(X) = V(\mu) = a_0 + a_1\mu + a_2\mu^2 \tag{۱-۷}$$

به ازای ضرایب ثابت a_0، a_1 و a_2 در نظر گرفت، این خانواده را خانواده توزیع نمایی طبیعی با تابع واریانس درجه دوم می‌نامند.

در چنین حالتی، جمله ممیزه[5] این معادله درجه دوم از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\Delta = a_1^2 - 4a_0a_2.$$

خانواده توزیع‌های نمایی طبیعی با تابع واریانس درجه دوم شامل ۳ توزیع گسسته **دوجمله ای، دوجمله ای منفی** و **پواسن** و سه توزیع پیوسته **نرمال، گاما** و **سکانت هذلولوی تعمیم یافته**[6] **(GHS)** می‌باشد. در اینجا به مرور ویژگی‌های این توزیع‌ها می‌پردازیم.

---
[1] Morris
[2] Brown
[3] Letac and Mora
[4] Arefi, MohtashamiBorzadaran and Vaghei
[5] Discriminant
[6] Generalized Hyperbolic Secant