بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده فیزیک

مطالعه‌ی سیاه‌چاله‌های باردار و چرخان در حضور میدان اسکالر در (۲+۱) بعد

پایان‌نامه کارشناسی ارشد فیزیک، گرایش ذرات بنیادی

حلیمه آخوندزاده

استاد راهنما
دکتر فرهنگ لران

دی ماه ۱۳۹۳

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده‌ی فیزیک

پایان‌نامه‌ی کارشناسی‌ارشد فیزیک

تحت عنوان

مطالعه‌ی سیاه‌چاله‌های باردار و چرخان در حضور میدان اسکالر در (۱+۲) بعد

توسط

حلیمه آخوندزاده

در تاریخ ۹۳/۱۰/۲۷توسط کمیته‌ی تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت:

۱. استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر فرهنگ لران
۲. استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر مسلم زارعی
۳. استاد داور پایان نامه	دکتر بهروز میرزا
۴. استاد داور پایان نامه	دکتر غلام‌رضا خسروی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده	دکتر فرهاد شهبازی

تشکر و قدردانی

در ابتدا خدا را شاکرم که حس بودنش، آرامش را به زندگیم بخشید.

سپس مراتب سپاس‌گزاری را تقدیم می‌کنم به،

خانواده‌ی عزیزم که صبر، حمایت و عاطفه‌شان، گرمابخش روزهای سخت زندگیم بود،

استاد راهنمای بزرگوار، دکتر فرهنگ لران که با رهنمودهایشان مرا در انجام این پایان‌نامه یاری نمودند،

استاد مشاور محترم، دکتر مسلم زارعی که مشاوره‌ی این پایان‌نامه را برعهده داشتند،

اساتید داور گرامی، دکتر بهروز میرزا و دکتر غلام‌رضا خسروی که داوری این پایان‌نامه را پذیرفتند.

در انتها از تمامی دوستانم که هرکدام به نحوی با مهربانی‌هایشان لبخند را بر لبانم نشاندند، متشکرم.

تقدیم به بهترین‌های زندگیم...

پدرم، مادرم، برادرم.

فهرست مطالب

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا متریک داخلی یک ستاره‌ی در حال رمبش گرانشی را در چهار بعد مطالعه می‌کنیم. دیده می‌شود این متریک مطابق با متریک جهان بسته‌ی FRW رفتار می‌کند. سپس به علت ویژگی‌های مشترکی که فضا-زمان گرانشی سه بعدی نسبت به فضا-زمان گرانشی چهار بعدی دارد و هم‌چنین سادگی این فضا-زمان، دینامیک یک فضا-زمان سه بعدی، در حضور میدان اسکالر با جفت‌شدگی کمینه و غیر کمینه را محاسبه کرده و شکل‌گیری سیاه‌چاله را در فضا-زمان پاددوسیته مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس با فرضِ ایستا بودنِ فضا-زمان، در فضای سه بعدی حل سیاه‌چاله را برای دو حالت چرخان و باردار مطالعه می‌کنیم.

کلمات کلیدی:

سیاه‌چاله‌ی باردار، سیاه‌چاله‌ی چرخان، جفت‌شدگی کمینه و غیر کمینه، میدان اسکالر، فضا-زمان پاددوسیته

فصل ۱

مقدمه

حضور نسبیت عام در فیزیک، راه‌حلی برای توصیف چگونگی تشکیل سیاه‌چاله و ساختار هندسی آن را به وجود آورد. به عبارت دیگر شکل‌گیری سیاه‌چاله به علت رمبش گرانشی یکی از مهم‌ترین پدیده‌های بنیادی است که توسط نسبیت‌عام بیان می‌شود. به همین منظور می‌توان با استفاده از معادلات اینشتین و تانسور تکانه- انرژی یک حل دینامیکی برای فضا-زمان نوشت و رفتار ستاره‌ی در حال رمبش گرانشی و سپس شکل‌گیری سیاه‌چاله را در گذر زمان مشاهده نمود. هم‌چنین می‌توان با نوشتن معادله‌ی ایستا برای سیاه‌چاله، خواص هندسی آن را به دست آورد و شرایط لازم برای ایجاد سیاه‌چاله را درک کرد.

در چند دهه‌ی گذشته گرانش در فضا-زمان (۱ + ۲) بعدی موردتوجه بسیاری از فیزیک‌دانان واقع شده است. علت این توجه وجود ویژگی‌های مشترکِ این فضا-زمان سه بعدی و تعمیم آن به دیگر فضا-زمان‌ها در ابعاد بالاتر می‌باشد. این دیدگاه با بیان حل‌های متقارن کروی برای گرانش سه‌بعدی با ثابت کیهان‌شناسی منفی [۱] آغاز شد و از آن پس انواع حل‌ها در این فضا-زمان مورد مطالعه قرار گرفت. اخیرا در بررسی فضا-زمان گرانشی (۱ + ۲) بعدی حضور یک منبع مادی، مورد مطالعه قرار می‌دهند [۶، ۷، ۱۰] . به همین منظور می‌توان میدان گرانشی را در حضور یک میدان اسکالر مورد بررسی قرار داد. این میدان بسته به این‌که به صورت کمینه یا غیر کمینه با گرانش جفت شود به دو دسته تقسیم می‌گردد.

[۱] Banados-Teitelboim-Zanelli (BTZ)

هم‌چنین در صورت جرم‌دار بودنِ میدان اسکالر، این میدان با خودش نیز برهم‌کنش دارد و پتانسیل اسکالر ظاهر می‌گردد. از طرفی می‌توان به عنوان یک منبع مادی میدان ماکسول را به فضا-زمان اضافه کرد و حل مربوط به سیاه‌چاله‌ی باردار را محاسبه نمود و یا با در نظر گرفتن متریک چرخان در فضا-زمان موردنظر می‌توان حل مربوط به سیاه‌چاله‌ی چرخان را توصیف نمود. همین‌طور می‌توان بدون در نظر گرفتن منبع مادی، خمش فضا- زمان را با قرار دادن میدان گرانشی در مراتب بالاتر افزایش داد و یا با در نظر گرفتن میدان‌های تانسوری در مراتب بالاتر حل‌های پیچیده‌تری را برای یک سیاه‌چاله به دست آورد.

اگر حل دینامیکی برای فضا-زمان در نظر بگیریم، در واقع می‌توان تکامل هندسی و زمانی آن را از ابتدای شکل‌گیری تا زمان بی‌نهایت، مورد بررسی قرار داد. به همین منظور در فصل دومِ این پایان‌نامه، ابتدا رمبش گرانشی یک فضا-زمان را در فضای $(۱ + ۳)$ بعدی برای یک سیال کامل به دست آورده و نشان داده می‌شود که متریک داخل سیاه‌چاله همان متریک FRW برای جهان بسته می‌باشد [۱]. سپس برای سادگی، کنش مربوط به فضا-زمان گرانشی $(۱ + ۲)$ بعدی در حضور میدان اسکالر را نوشته و حل دینامیکی آن را محاسبه می‌کنیم [۲]. نکته‌ای که باید بدان دقت نمود وجود پتانسیل اسکالر به علت برهم‌کنش میدان اسکالر با خودش است. در این حل دیده می‌شود که این فضا-زمان به صورت مجانبی در زمان بی‌نهایت به حل مربوط به سیاه‌چاله‌ی مویی ایستا منجر می‌گردد.

اگر فضا-زمان، ایستا در نظر گرفته شود، می‌توان خواص هندسی مورد نیاز برای تشکیل سیاه‌چاله را محاسبه نمود. ساده‌ترین حل مربوط به فضا-زمان ایستا $(۱ + ۲)$ بعدی، همان حل مربوط به سیاه‌چاله‌ی BTZ [۹] است که در غیاب هرگونه منبع مادی در نظر گرفته می‌شود. در این پایان نامه با مرور دو مقاله‌ی [۴، ۷] به مطالعه‌ی هندسه‌ی دو سیاه‌چاله‌ی چرخان و باردار در فضا-زمان ایستا $(۱ + ۲)$ بعدی پرداخته می‌شود.

در فصل سوم به بررسی حل سیاه‌چاله برای نظریه میدان اینشتین-ماکسول-اسکالر که در حد غیرکمینه با میدان اسکالر در فضای $(۱ + ۲)$ بعدی جفت شده است، می‌پردازیم. در واقع حل موردنظر، حل مربوط به یک سیاه‌چاله‌ی مویی باردار ایستا در فضا-زمان پاددوسیته [۱] می‌باشد. در این حل چگونگی امکان تشکیل افق رویداد و تاثیر حضور بار اسکالر و بار الکتریکی در شکل هندسی سیاه‌چاله مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در فصل چهارم قصد داریم حل مربوط به یک سیاه‌چاله‌ی مویی چرخان ایستا در فضا-زمان سه‌بعدی را محاسبه کنیم.

[۱] AdS

به همین منظور یک آنساتز برای متریک فرض می‌شود که علاوه‌بر متقارن بودن فضا-زمان، حالت چرخان آن هم در نظر گرفته شود. سپس تاثیرات چرخان‌بودن فضا-زمان روی هندسه‌ی سیاه‌چاله مورد سنجش قرار می‌گیرد.

فصل ۲

بررسی رمبش گرانشی و حل دینامیکی سیاه‌چاله

در ابتدای این فصل با درنظر گرفتن یک ستاره‌ی در حال رمبش گرانشی، متریک داخلی آن را در فضا-زمان (۱ + ۳) بعدی توصیف کرده [۱]، سپس به فضا- زمان (۱ + ۲) بعدی رفته و کنش مربوط به فضای گرانشی اینشتین که با میدان اسکالر در حد غیرکمینه[۱] جفت شده است را می‌نویسیم. این میدان اسکالر به علت برهم‌کنشی که با خود دارد، دارای پتانسیل خودبرهم‌کنش اسکالر می‌باشد. برای این کنش، یک حل کروی وابسته به زمان فرض می‌شود که به شرح رمبش گرانشی تا تشکیل سیاه‌چاله‌ی ایستا در زمان بی‌نهایت در حد ایستا می‌پردازد. سپس خواص هندسی و تکامل زمانی این حل را بررسی می‌کنیم. درنهایت حل را با یک تبدیل مشابهِ تبدیل همدیس به حد کمینه [۲]برده و نتایج حاصل از آن را بررسی می‌کنیم [۲] .

۲–۱ متریک داخلی یک ستاره‌ی در حال رمبش گرانشی در فضا-زمان (۱+۳) بعدی

یک ستاره‌ی متقارن کروی، دارای چگالی یکنواخت که از سیال کامل [۳] تشکیل شده و در حال رمبش گرانشی می‌باشد را

[۱] non-minimal
[۲] minimal
[۳] perfect fluid

در نظر می‌گیریم. تانسور تکانه- انرژی برای این سیال به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P)u^{\mu}u^{\nu} + Pg^{\mu\nu}, \tag{۱.۲}$$

ρ ، P و u^{μ} به ترتیب بیان‌گر چگالی جرم- انرژی، فشار همگرای یک‌نواخت و چهار بردار سرعت [۱] می‌باشد. شکل کلیِ متریکِ داخلی یک ستاره را می‌توان به شکل زیر بیان نمود،

$$ds^{۲}_{int} = -e^{۲\Phi(t,r)}dt^{۲} + e^{\lambda(t,r)}dr^{۲} + R(r,t)^{۲}d\Omega^{۲}, \tag{۲.۲}$$

که $d\Omega^{۲} = d\theta^{۲} + \sin^{۲}\theta d\phi^{۲}$ می‌باشد و $R(r,t)$ شعاع ناحیه‌ی مورد نظر را نشان می‌دهد [۱۲]،

$$C = \int_{r,\theta=const} \sqrt{ds^{۲}} = \int \sqrt{g_{\phi\phi}d\phi^{۲}} = ۲\pi R.$$

از طرفی به دلیل شکل و توزیع یکنواخت ستاره [۲] $R(t,r) = A(t)B(r)$ در نظر گرفته می‌شود. با توجه به این‌که سیال به طور یکنواخت در حال نزدیک‌شدن به مرکز ستاره می‌باشد چهار بردار سرعت برای آن به صورت $u_{\mu} = (-e^{\Phi(t,r)}, ۰, ۰, ۰)$ تعریف می‌شود. با نوشتن معادله‌ی ژئودزیک [۳] برای این متریک داریم،

$$\frac{du^{\mu}}{d\tau} + \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}u^{\nu}u^{\sigma} = ۰,$$

$$\Gamma^{r}_{tt}u^{t}u^{t} = ۰, \quad \Rightarrow \quad \Phi(t,r) = \Phi(t).$$

سپس با در نظر گرفتن پایستگی تانسور تکانه-انرژی و فرض این‌که ρ تابعی از زمان می‌باشد، می‌توان نتیجه گرفت که فشار فقط به زمان بستگی دارد،

$$T^{۰\mu}_{;\mu} = ۰, \ \Rightarrow \ -\frac{۱}{۲\dot{\Phi}(t)}\left(\rho(t)_{;t} + ۲\rho(t)\dot{\Phi}(t)\right) = P(t) \tag{۳.۲}$$

حال با استفاده از رابطه‌ی مربوط به معادله‌ی اینشتین $G_{\mu\nu} = ۸\pi GT_{\mu\nu}$ متریک موردنظر را محاسبه می‌کنیم،

$$G_{\mu\nu} = ۸\pi G\left[(\rho + P)u^{\mu}u^{\nu} + Pg^{\mu\nu}\right]$$

ابتدا با محاسبه‌ی $G_{tr} = ۰$ داریم،

$$-\partial_t\lambda(t,r)A(t) + ۲\partial_t A(t) = ۰, \quad \Rightarrow \quad e^{\lambda} = A^{۲}(t). \tag{۴.۲}$$

[۱] isotropic
[۲] homogeneous
[۳] geodesics equation

پس می‌توان نتیجه گرفت که λ فقط تابعی از زمان می‌باشد. حال رابطه‌ی $G_{\theta\theta} = 8\pi G A^2 B^2 P$ را نوشته و به شکل زیر ساده می‌کنیم،

$$\frac{\partial_r^2 B}{B} = e^{2\Phi}\left[2A\partial_t^2 A + (\partial_t A)^2 - 2A\partial_t A\partial_t\Phi + 8\pi G A^2 e^{2\Phi} P\right], \tag{۵.۲}$$

با توجه به رابطه‌ی بالا نتیجه می‌شود که $\frac{\partial_r^2 B}{B}$ برابر با مقدار ثابت می‌شود. با در نظر گرفتن $\frac{\partial_r^2 B}{B} = -k^2$ تابع $B(r)$ برحسب توابع سینوسی محاسبه می‌شود که با توجه به این‌که این تابع متناسب با شعاع فضا-زمان است و با افزایش فاصله از مبدا مقدار آن زیاد می‌شود، بنابراین نمی‌تواند مقدار سینوسی داشته باشد. حال اگر $\frac{\partial_r^2 B}{B} = +k^2$ در نظر بگیریم، تابع $B(r)$ برحسب توابع هذلولوی به دست می‌آید،

$$B(r) = a\sinh(kr) + b\cosh(kr).$$

با محاسبه‌ی $G_{rr} = 8\pi G A^2 P$ و با توجه به این نکته که مقدار $B(r)$ در مبدا مختصات برابر با صفر است، این تابع به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$B(r) = \frac{1}{k}\sinh(kr). \tag{۶.۲}$$

سپس با تعریف سرعت ویژه‌ی جریان $U = D_t R = e^{-\Phi(t)}(\partial_t R)_r$ و ضریب لورنتز $\Gamma = D_r R = e^{-\frac{\lambda}{2}}(\partial_r R)_t$ و با محاسبه‌ی $G_{tt} = 8\pi G\rho e^{2\Phi}$ و رابطه‌ی (۶.۲) داریم،

$$\begin{aligned} B^2(\partial_t A)^2 - \frac{8\pi G\rho}{3}A^2B^2 + 1 &= \frac{2}{3}B\partial_r^2 B + \frac{(\partial_r B)^2}{3} + \frac{2}{3}, \\ \Gamma^2 &= 1 + U^2 - \frac{2m}{R}. \end{aligned} \tag{۷.۲}$$

در این‌جا شرط ناظر همراه را اعمال می‌کنیم. برای ناظرِ همراهِ سیال هیچ جابه‌جایی صورت نمی‌گیرد و تنها زمان در حال گذر است. در نتیجه $d\tau = dt$ و ضریب $e^{2\phi}$ در متریک برابر با یک می‌شود. در نتیجه $\Gamma^2 = 1 + R^2\left[\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^2 - \frac{8\pi\rho}{3}\right]$ می‌شود. جمله‌ی داخل براکت یک جمله‌ی وابسته به زمان می‌باشد که با $\frac{1}{a^2(t)}$ معرفی می‌کنیم. حال اگر $\bar{r} = \kappa\frac{R}{a(t)}$ نشان دهیم داریم،

$$\Gamma^2 = 1 - \kappa\bar{r}^2,$$

مقدار κ بسته به این‌که بیان‌گر جهان بسته، تخت یا باز باشد می‌تواند مقادیر ۱ ,۰ ,۱− را شامل شود.در نتیجه با جای‌گذاری این پارامتر جدید به جای r تابع متریک به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$ds^{۲} = -dt^{۲} + a^{۲}(t)\left(\frac{dr^{۲}}{۱ - \kappa r^{۲}} + r^{۲}d\Omega^{۲}\right). \tag{۸.۲}$$

همان‌طور که دیده می‌شود متریک برای ستاره‌ی در حال رمبش، معادل با متریک جهان FRW می‌باشد. در واقع هندسه‌ی مربوط به ستاره‌ی در حال رمبش تا زمانی‌که سیاه‌چاله شکل می‌گیرد مانند هندسه‌ی یک جهان بسته عمل می‌کند.

۲−۲ مدل جفت‌شده‌ی غیرکمینه و حل‌های وابسته به آن در فضا-زمان $(۱ + ۲)$ بعدی

برای بررسی چگونگی شکل‌گیری سیاه‌چاله‌ی حقیقی، یک فضای گرانشی (۱+۲) بعدی در حضور میدان اسکالر درنظر گرفته که میدان موردنظر علاوه بر کنش با فضای گرانشی، با خودش هم برهم‌کنش دارد. به همین منظور کنش مربوط به این فضا-زمان به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\begin{aligned} I &= \int dx^{۳}\sqrt{-g}\left[\frac{R}{۲} - \frac{۱}{۲}g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\Phi\nabla_{\nu}\Phi - \frac{۱}{۱۶}R\Phi^{۲} - U(\Phi)\right], \\ U(\Phi) &= \frac{-۱}{l^{۲}} + \left(\frac{۱}{۵۱۲l^{۲}} - \frac{\alpha}{۲}\right)\Phi^{۶}. \end{aligned} \tag{۹.۲}$$

میدان اسکالر را با Φ و پتانسیل خودبرهم‌کنش را با $U(\Phi)$ بیان می‌کنند. حال با استفاده از کنش (۹.۲) می‌توان معادلات اینشتین و حرکتِ مربوط به این فضا-زمان را به دست آورد،

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\frac{۱}{l^{۲}} &= \kappa T_{\mu\nu}, \\ T_{\mu\nu} &= \frac{۳}{۴}\nabla_{\mu}\Phi\nabla_{\nu}\Phi - \frac{۱}{۴}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\Phi\nabla_{\beta}\Phi + \frac{\Phi}{۴}g_{\mu\nu}\Box^{۲}\Phi - \frac{\Phi}{۴}\nabla_{\mu}\Phi\nabla_{\nu}\Phi \\ &\quad + \frac{۱}{۸}G_{\mu\nu}\Phi^{۲} - \left(\frac{۱}{۵۱۲l^{۲}} - \frac{\alpha}{۲}\right)\Phi^{۶} \end{aligned} \tag{۱۰.۲}$$

$$\Box^{۲}\Phi - \frac{۱}{۸}R\Phi^{۲} - ۶\left(\frac{۱}{۵۱۲l^{۲}} - \frac{\alpha}{۲}\right)\Phi^{۵} = ۰, \tag{۱۱.۲}$$

جمله‌ی ثابت $\lambda = -\frac{۱}{l^{۲}}$ بیان‌گر ثابت کیهان‌شناسی می‌باشد و علامت منفی آن فضای AdS را توصیف می‌کند. هم‌چنین پارامتر α متناسب با جرم سیاه‌چاله است و مقدار آن همیشه مثبت است. حال فضا را یک فضای کروی وابسته به زمان درنظر گرفته، با توجه به معادلات (۱۰.۲) و (۱۱.۲) هندسه‌ی مربوط به این فضا-زمان را به دست می‌آوریم. سپس این

متریک را به مختصات ادینگتون-فینکنشتین [1] برده، درنهایت داریم،

$$ds^۲ = -f(\mu,r)d\mu^۲ + ۲d\mu dr + r^۲ \tanh^{\frac{۲}{۳}}\left(\frac{۱۲\alpha\mu}{q}\right) d\psi^۲\,, \tag{۱۲.۲}$$

$$f(\mu,r) = \frac{r^۲}{l^۲} + \frac{۸\alpha\left(\tanh^۲\left(\frac{۱۲\alpha\mu}{q}\right) - ۱\right) r}{q\,\tanh\left(\frac{۱۲\alpha\mu}{q}\right)} - \frac{۱۲\alpha}{q^۲} - \frac{\alpha}{q^۳ r}\tanh\left(\frac{۱۲\alpha\mu}{q}\right)\,. \tag{۱۳.۲}$$

بازه تغییرات مکان و زمان برای این متریک برابر است با،

$$-\infty < \mu < +\infty, \quad r \geq ۰, \quad -\pi \leq \psi \leq +\pi.$$

میدان اسکالر در این مختصات به صورت زیر نوشته می‌شود،

$$\Phi(\mu,r) = \pm\sqrt{\frac{۱}{qr\,\tanh^{-۱}\left(\frac{۱۲\alpha\mu}{q}\right) + \frac{۱}{۸}}}\,, \tag{۱۴.۲}$$

دیده می‌شود که میدان اسکالر به مختصه‌ی زمانی وابسته است و با گذر زمان تاثیر این میدان بیشتر می‌شود. مولفه‌ی q یک پارامتر آزاد است که "بار اسکار" نام‌گذاری می‌شود و شدت میدان اسکالر را توصیف می‌کند. هنگامی‌که $q = ۰$ شود، مقدار Φ ثابت می‌شود و حل موردنظر به حل گرانش اینشتین با ثابت کیهان‌شناسی کاهش می‌یابد اما در این حالت خمش در مرتبه‌های بالاتر دارای تکینگی است. [2] از طرفی پارامتر q به عنوان یک مؤلفه‌ی ثابت وارد محاسبات گردیده و نمی‌تواند در فیزیکِ فضا اثری داشته باشد، پس این مقدار هم نمی‌تواند قابل قبول باشد. اگر $q = +\infty$ باشد، مقدار Φ برابر صفر می‌شود و حل فضای مربوطه، در زمان بی‌نهایت به حل فضای تهیِ ایستا BTZ تبدیل می‌گردد.

دراین فصل فقط برای $q > ۰$ ، متریک را می‌نویسیم و فضا-زمان موردنظر را توصیف می‌کنیم. اگر متریک را برای زمان بی‌نهایت بررسی کنیم در نتیجه $\tanh\left(\frac{۱۲\alpha\mu}{q}\right) \to ۱$ میل می‌کند. سپس حل موردنظر را به مختصات شوارزشیلد[3] $d\mu = dt + \frac{dr}{f(r)}$ انتقال می‌دهیم. سرانجام داریم،

$$ds^۲ = -f(r)dt^۲ + \frac{dr^۲}{f(r)} + r^۲ d\psi^۲$$

که $f(r)$ به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$f(r) = \frac{r^۲}{l^۲} - \frac{۱۲\alpha}{q^۲} - \frac{\alpha}{q^۳ r}.$$

[1] Eddington-Finkelestein

[2] در ادامه همین بخش روابط مربوط به خمش فضا بیان شده است.

[3] schwarzschild

هم‌چنین برای میدان اسکالر در زمان بی‌نهایت داریم،

$$\Phi(r) = \pm\sqrt{\frac{۱}{qr + \frac{۱}{۸}}}\,. \tag{۲.۱۵}$$

اگر در معادله‌ی (۲.۱۳) ، طول درخشش $R = r\tanh^{\frac{۱}{۳}}\left(\frac{۱۲\alpha\mu}{q}\right)$ را جای‌گذاری کنیم تابع متریک در این مختصات جدید برابر با

$$ds^۲ = -\tanh^{-\frac{۲}{۳}}\left(\frac{۱۲\alpha\mu}{q}\right)f(\mu,R)d\mu^۲ + ۲\tanh^{-\frac{۱}{۳}}\left(\frac{۱۲\alpha\mu}{q}\right)d\mu dR + R^۲d\psi^۲, \tag{۲.۱۶}$$

$$f(\mu,R) = \frac{R^۲}{l^۲} - \frac{۱۲\alpha}{q^۲}\tanh^{\frac{۲}{۳}}\left(\frac{۱۲\alpha\mu}{q}\right) - \frac{\alpha}{q^۳R}\tanh^۲\left(\frac{۱۲\alpha\mu}{q}\right), \tag{۲.۱۷}$$

$$\Phi(\mu,R) = \pm\sqrt{\frac{۱}{qR\,\tanh^{-\frac{۴}{۳}}\left(\frac{۱۲\alpha\mu}{q}\right) + \frac{۱}{۸}}},$$

می‌شود. حال می‌توان با توجه به تابع متریک کمیت‌های مربوط به هندسه‌ی فضا را محاسبه و حل وابسته به زمان این کنش را توصیف نمود. به همین منظور در ابتدا تانسور کاتن [۱] که میزان تابش گرانشی فضا را بیان می‌کند را به دست می‌آوریم،

$$C_{ijk} = \nabla_k R_{ij} - \nabla_j R_{ik} + \frac{۱}{۲(D-۱)}\left(\nabla_j R g_{ik} - \nabla_k R g_{ij}\right)$$
$$C_{R\mu R} = -\frac{۳\alpha}{۲q^۳R^۴}\tanh^{\frac{۵}{۳}}\left(\frac{۱۲\alpha\mu}{q}\right).$$

در این‌جا به عنوان مثال، یکی از مؤلفه‌های تانسور کاتن را به دست آوردیم. دیده می‌شود که این تانسور به ازای مقادیر $\alpha \neq ۰$ صفر نخواهد شد، پس متریک بیان‌گر فضای تخت همدیس نمی‌باشد [۳]. از طرفی اسکالر ریچی در این فضا-زمان برابر با $R^{\mu}_{\mu} = -\frac{۶}{l^۲}$ می‌باشد که فضای پاددوسیته را تایید می‌کند. با محاسبه‌ی میزان خمش در مراتب بالاتر داریم،

$$R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = \frac{۱۲}{l^۴} + \frac{۳\alpha^۲}{۲q^۶R^۶}\tanh^۴\left(\frac{۱۲\alpha\mu}{q}\right)$$
$$R_{\mu\nu\lambda\sigma}R^{\mu\nu\lambda\sigma} = \frac{۱۲}{l^۴} + \frac{۶\alpha^۲}{q^۶R^۶}\tanh^۴\left(\frac{۱۲\alpha\mu}{q}\right)\,.$$

فضای مورد مطالعه در شعاع $R = ۰$ دارای تکینگی اساسی است. همان‌طور که گفته شد برای $q = ۰$ فضا-زمان دارای یک تکینگی اساسی است، به عبارت دیگر حل نظریه میدان گرانشی اینشتین با یک میدان اسکالرِ ثابت، جفت شده است.

در این قسمت تصمیم داریم تا فضا-زمان را برحسب زمان و میدان اسکالر توصیف کنیم. به همین منظور پارامتر r

[۱] cotton tensor

را برحسب میدان اسکالر نوشته،

$$r=\left(\frac{8-\Phi^2}{8q\Phi^2}\right)\tanh\left(\frac{12\alpha\mu}{q}\right), \qquad (18.2)$$

سپس در متریک فضا-زمان جای‌گذاری می‌کنیم،

$$ds^2=-f(\mu,\phi)d\mu^2-\frac{4}{q\Phi^3}\tanh\left(\frac{12\alpha\mu}{q}\right)d\mu d\Phi+\frac{(\Phi^2-8)^2}{64q^2\Phi^4}\tanh^{\frac{4}{3}}\left(\frac{12\alpha\mu}{q}\right)d\psi^2, \qquad (19.2)$$

که مقدار تابع $f(\mu,\phi)$ برابر است با،

$$\begin{aligned} f(\mu,\phi)=&\frac{(1-256\alpha l^2)(\Phi^2-8)\Phi^4+192\Phi^2-512}{64q^2l^2\Phi^4(\Phi^2-8)}\\ &+\frac{(\Phi^2-8)}{64q^2l^2\Phi^4}\left((256\alpha l^2-1)\Phi^2+8\right)\left(1-\tanh^2\left(\frac{12\alpha\mu}{q}\right)\right). \end{aligned}$$

در این‌جا فواصل بی‌نهایت معادل با زمانی است که $\Phi=0$ باشد. در بررسی تکامل زمانی برای میدان اسکالر، در زمان ابتدایی $\mu=0$، این میدان صفر می‌باشد. سپس به تدریج با گذر زمان میدان اسکالر افزایش می‌یابد تا در زمان بی‌نهایت این میدان اسکالر شامل حل سیاه‌چاله‌ی اسکالر ایستا در فضا-زمان (۲+۱) بعدی می‌شود. تابع متریک در زمان اولیه، فضا-زمان تهی AdS را در سه بعد توصیف می‌کند. این بیان به علتِ عدمِ وجودِ تکینگیِ اساسی در زمان اولیه برای اسکالر ریچی و دیگر ثابت‌های خمش در ابعاد بالاتر می‌باشد.بنابراین می‌توان گفت در ابتدای پیدایش این حل، فضا-زمان بیان‌گر فضا-زمان تهی آنتی‌دوسیته بوده است. هم‌چنین شعاع افق در چنین حالتی برابر با صفر است که در بخش بعدی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲–۳ بررسی افق ظاهری حل وابسته به زمان در مدل جفت‌شدگی غیرکمینه

اگر برای تابع متریکِ $f(\mu,R)$ یک محور شعاعی در نظر بگیریم،

$$f(\mu,+\infty)\ \to\ +\infty, \qquad f(\mu,0)\ \to\ -\infty. \qquad (20.2)$$

تابع انتقال به قرمز گرانشی از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کند، در نتیجه این حل، حداقل یک افق ظاهری خواهد داشت. برای به‌دست آوردن این افق کافیست که ریشه های تابع متریک $f(\mu,R)$ را به دست آوریم،

$$\frac{R^2}{l^2}-\frac{12\alpha}{q^2}\tanh^{\frac{2}{3}}\left(\frac{12\alpha\mu}{q}\right)-\frac{\alpha}{q^3R}\tanh^2\left(\frac{12\alpha\mu}{q}\right)=0,$$

در ابتدا برای راحتی کار، این تابع را به صورت زیر می‌نویسیم،

$$R^{۳} - ۳m^{۲}R + ۲n = ۰, \quad m > ۰,$$

m و n به صورت زیر تعریف می‌شوند،

$$m = \frac{۲\sqrt{\alpha}l}{q}\tanh^{\frac{۱}{۳}}\left(\frac{۱۲\alpha\mu}{q}\right), \quad n = -\frac{\alpha l^{۲}}{۲q^{۳}}\tanh^{۲}\left(\frac{۱۲\alpha\mu}{q}\right).$$

از حل معادله سه ریشه به شرح زیر به دست می‌آید،

$$R_{۱} = m\left(\zeta + \frac{۱}{\zeta}\right),$$
$$R_{۲} = -m\left(\zeta e^{i\frac{\pi}{۳}} + \frac{e^{-i\frac{\pi}{۳}}}{\zeta}\right),$$
$$R_{۳} = -m\left(\zeta e^{-i\frac{\pi}{۳}} + \frac{e^{i\frac{\pi}{۳}}}{\zeta}\right).$$

که در آن ζ برابر با

$$\zeta = \left(\frac{-n}{m^{۳}} + \sqrt{\frac{n^{۲}}{m^{۶}} - ۱}\right)^{\frac{۱}{۳}}$$

می‌باشد. در صورتی‌که $|n| \leq m^{۳}$ باشد هر سه ریشه حقیقی و مثبت است. بنابراین فضا-زمان سه افق ظاهری خواهد داشت اما اگر $|n| > m^{۳}$ باشد، فقط $R_{۱}$ ریشه‌ی حقیقی است و به عنوان افق ظاهری حل وابسته به زمان تعریف می‌شود.

اگر پارامتر $\mu \to +\infty$ سوق دهیم، مقدار کاهش‌یافته‌ی افق ظاهری برابر است با،

$$R_{۱} = m\left(\zeta + \frac{۱}{\zeta}\right),$$
$$R_{۲} = -m\left(\zeta e^{i\frac{\pi}{۳}} + \frac{e^{-i\frac{\pi}{۳}}}{\zeta}\right),$$
$$R_{۳} = -m\left(\zeta e^{-i\frac{\pi}{۳}} + \frac{e^{i\frac{\pi}{۳}}}{\zeta}\right),$$

که مقدار مؤلفه‌ی m و n در این حالت به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$m = \frac{۲\sqrt{\alpha}l}{q}, \quad n = -\frac{\alpha l^{۲}}{۲q^{۳}}. \qquad (۲۱.۲)$$

در این حالت شعاع بزرگ‌ترین افق ظاهری به افق رویداد نزدیک می‌شود و حل فضا-زمان در زمان بی‌نهایت به حل سیاه‌چاله‌ی اسکالر ایستا میل می‌کند.