دانشگاه زنجان

دانشکده علوم - گروه فیزیک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

کنترل دوپایایی نوری در سیستم های کوانتومی با استفاده از جذب القایی الکترومغناطیسی

الهام ساداتی نصرت آباد

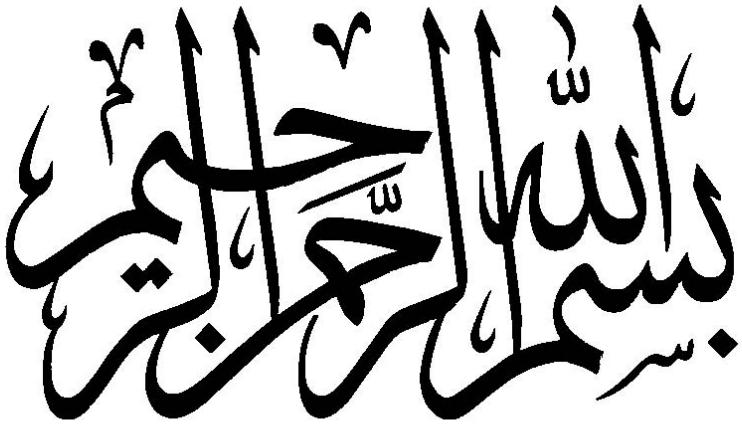
استاد راهنمای اول

دکتر محمد محمودی

استاد راهنمای دوم

دکتر مصطفی صحرایی

۱۳۹۰


بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

چکیده

در این پایان‌نامه رفتار دوپایایی نوری در یک سیستم سه ترازی Λ، با یک وافازی بین دو تراز پایه‌ی تبهگن بررسی شده است. در حالت تشدید میدان دمشی و کاوشگر ($\Lambda = \delta = ۰$)، در حضور تداخل کوانتومی ناشی از گسیل خود به‌خودی، پدیده‌ی جذب القایی الکترو مغناطیسی (EIA) مشاهده می‌شود. در نتیجه سیستم رفتار دوپایایی از خود نشان می‌دهد. همچنین در غیاب تداخل کوانتومی پدیده‌ی شفافیت القایی الکترو مغناطیسی (EIT) رخ می‌دهد، در این حالت رفتار دوپایایی سیستم از بین می رود. با افزایش نامیزانی میدان دمشی، پهنای قله های جذب مربوط به پدیده EIA کاهش و به دنبال آن آستانه دوپایایی نیز کاهش می‌یابد. همچنین در حالت تشدید میدان کاوشگر، چندپایایی نوری در سیستم مشاهده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: *دوپایایی، جذب القایی الکترومغناطیسی، شفافیت القایی الکترومغناطیسی، پهنا، وافازی.*

فهرست مطالب

لیست تصاویر **پ**

مقدمه **ج**

۱ بررسی برهم‌کنش نور با ماده **۱**

۱.۱ معادلات ماکسول ۲

۲.۱ معادله‌ی موج ۲

۳.۱ هامیلتونی برهم‌کنش نور با ماده ۳

۴.۱ برهم‌کنش نور با ماده از دیدگاه نیمه‌کلاسیکی ۶

۵.۱ معرفی حالت‌های پوشیده ۱۱

۶.۱ رهیافت ماتریس چگالی برای توصیف سیستم های کوانتومی ۱۲

۲ اپتیک غیر خطی **۱۶**

۱.۲ بررسی برخی مفاهیم کوانتومی و کاربردهای آن‌ها ۱۷

۱.۱.۲ گسیل خودبه‌خودی ۱۷

۲.۱.۲ همدوسی اتمی ۱۹

۳.۱.۲ تداخل کوانتومی ۲۱

۴.۱.۲ همدوسی ناشی از گسیل خودبه‌خود ۲۳

۵.۱.۲ پدیده‌ی جذب القایی الکترومغناطیسی ۲۹

۲.۲ دوپایایی نوری ۳۰
۱.۲.۲ دوپایایی پاشنده ۳۳
۲.۲.۲ دوپایایی جاذب ۳۴
۳.۲.۲ بررسی دوپایایی نوری با توجه به نظریه‌ی نیمه‌کلاسیک برهم‌کنش ۳۸

۳ کنترل دوپایایی نوری با استفاده از جذب القایی الکترومغناطیسی ۴۱

۱.۳ کنترل دوپایایی نوری با استفاده از جذب القایی الکترومغناطیسی در یک سیستم سه ترازی Λ ۴۱
۱.۱.۳ مدل اتمی و معادلات حاکم بر آن ۴۲
۲.۳ کنترل دوپایایی نوری با استفاده از EIA در سیستم Y معکوس ۵۴
۱.۲.۳ مدل سیستم اتمی و معادلات حاکم بر آن ۵۴
۳.۳ کنترل دوپایایی نوری با استفاده از EIA در یک سیستم سه ترازی آبشاری ۵۹
۱.۳.۳ مدل سیستم اتمی و معادلات حاکم بر آن ۶۰
۴.۳ نتیجه‌گیری ۶۴

مراجع ۶۶

لیست تصاویر

۱.۱ منحنی احتمال گذار برحسب زمان به ازای نامیزانی بزرگ (توپر) و نامیزانی کوچک (خط‌چین)[۱۹]. ۱۰

۲.۱ منحنی احتمال گذار برحسب نامیزانی [۱۹]. ۱۰

۱.۲ سیستم‌های سه ترازه نوع V و نوع Λ ۲۲

۲.۲ سیستم اتمی نوع Λ ۲۷

۳.۲ جذب میدان کاوشگر بر حسب نامیزانی در حضور میدان دمشی (نقطه‌چین) و بدون میدان دمشی (پیوسته) برای گذارهای مختلف [۸]. ۳۰

۴.۲ نمونه‌هایی از منحنی‌های دوپایایی و چندپایایی نوری ۳۱

۵.۲ نمونه شماتیک تداخل‌سنج فابری پرو [۲۰] ۳۱

۶.۲ ابزار نوری دوپایا به‌صورت یک تداخل‌سنج فابری-پرو که محیط غیر خطی را در بر دارد [۲۰]. ۳۵

۷.۲ رابطه‌ی بین شدت ورودی و خروجی کاواک برای یک وسیله‌ی دوپایای جاذب [۲۰]. . . ۳۷

۸.۲ طرح شماتیک ورودی-خروجی یک سیستم دوپایا [۲۰]. ۳۸

۹.۲ کاواک حلقوی ۳۹

۱.۳ سیستم‌های سه ترازی نوع Λ ۴۲

۲.۳ کاواک حلقوی یکسویه ۴۴

۳.۳ نمودار جذب میدان کاوشگر برحسب نامیزانی ، به ازای $\Delta = ۰$ و $p = ۰/۹۹$ (خط پر)، $p = ۰$ (خط چین)،در این نمودار $\Omega_p = \Omega_{۰p}\sqrt{۱ - p^۲}$ و $\Omega_c = \Omega_{۰c}\sqrt{۱ - p^۲}$ در نظر گرفته شده است. ۴۵

۴.۳ نمودار دوپایایی برای $EIA, p = ۰/۹۹$ (خط پر) و $EIT, p = ۰$(خط چین). ۴۶

۵.۳ نمودار جذب سیستم به عنوان تابعی از نامیزانی میدان کاوشگر و به ازای مقادیر مختلف نامیزانی میدان دمشی ۴۷

۶.۳ نمودار پهنا بر حسب نامیزانی میدان دمشی ۴۸

۷.۳ سیستم Λ در حالت پوشیده ۴۹

۸.۳ نمودار دوپایایی به ازای مقادیر مختلفΔ و $\Omega_C = ۱, \Omega_p = ۰/۰۱$ ۵۱

۹.۳ نمودار آستانه بر حسب پهنا ۵۲

۱۰.۳ نمودار جذب سیستم Λ به ازای نامیزانی دمشی $\Delta = ۳$. ۵۳

۱۱.۳ نمودار دوپایایی سیستم Λ . $\Delta = ۳$، $\delta = ۳/۰۸$ (خطچین)، $\delta = -۰/۰۸$ (خط پر). . ۵۳

۱۲.۳ نمودار جذب یک سیستم چهار ترازی که تحت جفت شدگی دو فوتونی میدان رادیویی قرار دارد. ۵۴

۱۳.۳ نمودار جذب میدان کاوشگر، $\delta_{۴۳} = \delta_{۳۲} = ۰$ و $\Omega_c = ۰/۱\Omega_{rf} = ۰/۵$ ۵۶

۱۴.۳ نمودار جذب میدان کاوشگر برای مقادیر مختلف فرکانس رابی میدان رادیویی، $\delta_{۴۳} = ۰$ و $\delta_{۳۲} = ۰/۵$ و $\Omega_c = ۰/۱\Omega_{rf}$ ۵۷

۱۵.۳ کاواک حلقوی یکسویه ۵۸

۱۶.۳ نمودار دوپایایی نوری برای مقادیر مختلف فرکانس رابی میدان رادیویی، $\delta_{۴۳} = ۰$ و $\delta_{۳۲} = ۰/۵$ و $\Omega_c = ۰/۱\Omega_{rf}$ ۵۹

۱۷.۳ سیستم سه ترازه نوع آبشاری که با میدان دمشی ω_b و میدان کاوشی ω_a اندرکنش می‌کند. $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ آهنگ‌های واپاشی می‌باشند. ۶۰

۱۸.۳ جذب میدان کاوشگر بر حسب نامیزانی در حالت $p = ۰$ (نقطه‌چین) و $p = ۰/۹۹$ (تو پر). به ازای $\Delta_۲ = ۰, \gamma_۱ = \gamma_۲ = \gamma, \Omega_{۱۰} = ۲/۵\gamma, \Omega_{۲۰} = ۵\gamma$. ۶۲

۱۹.۳ نمودار دوپایایی در حالت $p = ۰$(نقطه‌چین) و $p = ۰/۹۹$ (تو پر). به ازای $\Delta_۲ = ۰, \gamma_۱ = \gamma, \gamma_۲ = \gamma, \Omega_{۱۰} = ۲/۵\gamma, \Omega_{۲۰} = ۵\gamma$ ۶۳

مقدمه

همانطور که می‌دانیم کلیدزنی الکترونیکی سرعت شبکه‌ها را تا حدود زیادی کاهش می‌دهد. بنابراین هدف دنیای علم این است که نودهایی بر پایه‌ی ساز و کارهای الکتریکی را به وسیله‌ی فناوری اپتیکی جایگزین کند، به این منظور تحقیقات در زمینه‌ی پدیده‌ی اپتیکی غیرخطی دوپایایی نوری افزایش یافته است، با این امید که این پدیده می‌تواند همه‌ی اهداف کلیدزنی اپتیکی را برآورده کند. پدیده‌ی دوپایایی نوری به نوع معینی از رفتار وسایل اپتیکی اطلاق می‌شود که در آن به ازای یک شدت ورودی معین، امکان ایجاد دو حالت پایا برای شدت خروجی سیستم وجود دارد. این رفتار، نتیجه‌ای از تکنیک بازخورد نور و استفاده از یک ماده‌ی غیرخطی است. بر پایه‌ی این رفتار غیرخطی ابزار اپتیکی دوپایا می‌توانند به عنوان سوئیچ‌های اپتیکی، عناصر ذخیره‌سازی اپتیکی و در ارتباطات اپتیکی مورد استفاده قرار گیرند. اولین مقاله نظری توصیف کننده‌ی دوپایایی نوری در سال۱۹۶۹ توسط سزوک و همکارانش[۱] منتشر شد [۱]. همچنین گزارش تجربی دوپایایی را گیبس و همکارانش[۲] در سال ۱۹۷۶ منتشر کرد [۲]. این پدیده در سیستم‌های اتمی دو ترازی به طور گسترده از لحاظ نظری و تجربی بررسی شده است [۳، ۴]. همچنین در سیستم‌های کوانتومی سه ترازی نیز به صورت نظری [۵، ۶] و تجربی [۷] مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

پدیده‌ی جالب دیگر جذب القایی الکترومغناطیسی[۳](EIA) [۸-۱۴] است که شامل یک قله‌ی جذب با پهنای غیر عادی و بسیار باریک می‌باشد که از این خاصیت در ذخیره سازی نوری[۴] وطیف‌سنجی لیزری با دقت بالا[۵] استفاده می‌شود. این جذب با پهنای غیرعادی، در اثر القای همدوسی اتمی میان ترازهای برانگیخته‌ی تبهگن به ترازهای پایه، توسط میدان الکترومغناطیسی ایجاد می‌شود که اولین بار توسط اکولشین و همکارانش[۶] در سال ۱۹۹۸ گزارش شد [۸].

در سال‌های اخیر بیشتر مطالعات در زمینه‌ی دوپایایی نوری به بررسی اتم‌های چند ترازی اختصاص

---

[۱] Szoke at al
[۲] Gibbs at al
[۳] Electromagnetically Induced Absorption
[۴] Light storage
[۵] High resolution
[۶] Akulshin at al

یافته است. در مورد سیستم‌های چند ترازی، کمیت‌های موجود برای کنترل پدیده‌ی دوپایا بیشتر از کمیت‌های کنترلی در مورد اتم‌های دو ترازی است. علاوه بر این میدان‌های کنترلی اضافه شده به سیستم اتمی که ترازهای مختلف اتمی را به هم متصل می‌کند، سبب ایجاد پدیده‌های جالبی در خروجی سیستم می‌شوند. ریشه‌ی این پدیده‌ها در به وجود آمدن اثر تداخل کوانتومی و یا همدوسی کوانتومی در سیستم است. شفافیت القایی الکترومغناطیسی[۷](EIT) [۱۸-۱۵]، جذب القایی الکترومغناطیسی ولیزرزایی بدون ایجاد وارونگی جمعیت[۸](LWI) از جمله پدیده‌های جالب هستند که در این سیستم‌ها مشاهده می‌شوند.

در فصل اول این پایان‌نامه چگونگی برهم‌کنش نور با ماده و در فصل دوم به بیان برخی مفاهیم اولیه در اپتیک غیرخطی و همچنین دوپایایی نوری پرداخته شده است. در فصل سوم چگونگی کنترل دوپایایی نوری در سیستم‌های مختلف کوانتومی با استفاده از جذب القایی الکترومغناطیسی، مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

[۷] Electromagnetically Induced Transparency
[۸] Lasing Without Inversion

فصل ۱

بررسی برهم‌کنش نور با ماده

یکی از مباحث مهم و پر کاربرد در فیزیک که از دیرباز توجه دانشمندان فیزیک را به خود جلب نموده، بررسی چگونگی برهم‌کنش نور با ماده است. این دسته از مباحث بعد از تکامل مکانیک کوانتومی و تولید لیزر با ویژگی‌هایی همچون همدوسی بالا، وارد عرصه نوری شده و رفتارهای متنوعی که سیستم های اتمی در حضور میدان های لیزری نشان می‌دهند، را بررسی می‌کند. از کاربردهای این زمینه می‌توان به تبادل اطلاعات کوانتومی اشاره کرد. در فیزیک کلاسیک، برهم‌کنش موج الکترومغناطیسی با ماده در فرکانس‌های اپتیکی نسبت به فرکانس‌های رادیویی یا میکرو موج کمی پیچیده‌تر است. اغلب این نتایج، در حالت تشدیدی برای بازه‌ی اپتیکی اتفاق می‌افتد که در فرکانس‌های بالاتر از $۱۰GHz$ امکان‌پذیر هستند. از جمله می‌توان به تغییرات بزرگ میزان جذب، پراکندگی و پاشندگی نور به ازای تغییرات کم در فرکانس اشاره کرد. این نتایج سبب می‌شود تا بررسی پدیده‌هایی ناشی از برهم‌کنش موج الکترومغناطیسی با ماده در بازه‌ی فرکانس اپتیکی از اهمیت فراوانی برخوردار باشند.

۱.۱ معادلات ماکسول

معادلات بنیادی میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی متغیر با زمان که به معادلات ماکسول مشهور هستند، به شکل زیر نوشته می‌شوند:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = J + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \tag{۱.۱}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{۲.۱}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{D} = \rho\nu, \tag{۳.۱}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = ۰. \tag{۴.۱}$$

روابط ماکسول پاسخ بار الکتریکی به میدان الکترومغناطیسی فرودی بر ماده را توصیف می‌کنند. $\vec{D}$ بردار جابجایی و چگالی شارش مغناطیسی H نامیده می‌شود و به‌صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \varepsilon_{۰}\vec{E} + \vec{P}, \tag{۵.۱}$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} = \mu_{۰}(\vec{H} + \vec{M}). \tag{۶.۱}$$

مغناطش ماده ،$\vec{M}$، در فرکانس‌های اپتیکی یا در مواد غیر مغناطیسی، صفر در نظر گرفته می‌شود. در مواد خطی قطبش برابر است با:

$$\vec{P} = \varepsilon\chi_{۰}^{(۱)}\vec{E}, \tag{۷.۱}$$

که $\chi_{۰}^{(۱)}$ پذیرفتاری الکتریکی خلا را نشان می‌دهد.

۲.۱ معادله‌ی موج

معادله‌ی موج، توصیف کننده‌ی انتشار نور کلاسیکی در ماده است. این رابطه از ترکیب دو معادله‌ی (۱) و (۲) معادلات ماکسول به دست می‌آید. شکل این معادله با فرض $J = ۰$، $M = ۰$ به صورت

زیر است:

$$\nabla^۲\vec{E} - \frac{۱}{c^۲}\frac{\partial^۲\vec{E}}{\partial t^۲} = \mu_۰\frac{\partial^۲ P}{\partial t^۲} \qquad (۸.۱)$$

در رابطه‌ی بالا تغییرات فضایی قطبش، صفر فرض شده است. پارامترهای c و $\mu_۰$ به ترتیب سرعت نور و تراوائی مغناطیسی خلا را نشان می‌دهند.

۳.۱ هامیلتونی برهم‌کنش نور با ماده

هامیلتونی یک الکترون مقید در اتم، در غیاب میدان‌های خارجی، به‌صورت زیر است:

$$\widehat{H}_۰ = \frac{۱}{۲m}\widehat{\overrightarrow{P}^۲} + V(r) \qquad (۹.۱)$$

$V(r)$ برهم‌کنش کولنی است که الکترون را به هسته مقید می‌کند. همان‌طور که می‌دانیم در فضای مکان، عملگر مکان به‌صورت $\widehat{\overrightarrow{r}}|\overrightarrow{r}\rangle = \overrightarrow{r}|\overrightarrow{r}\rangle$، عملگر تکانه به صورت $\widehat{\overrightarrow{P}} = -i\widehat{\overrightarrow{\nabla}}$ و تابع موج به‌صورت $\psi(\overrightarrow{r}) = \langle\overrightarrow{r} \mid \psi\rangle$، در نمادگذاری دیراک نمایش داده می‌شوند. فرض می‌کنیم ویژه حالت‌های انرژی $|k\rangle$، مربوط به هامیلتونی $\widehat{H}_۰$، در معادله‌ی مستقل از زمان شرودینگر صدق می‌کند:

$$\widehat{H}_۰\psi_k^{(۰)}(\overrightarrow{r}) = E_k\psi_k^{(۰)}(\overrightarrow{r}) \qquad (۱۰.۱)$$

هامیلتونی در حضور میدان‌های خارجی به شکل زیر تغییر می‌کند:

$$\widehat{H}(\overrightarrow{r},t) = \frac{۱}{۲m}[\widehat{\overrightarrow{P}} + e\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r},t)]^۲ - e\Phi(\overrightarrow{r},t) + V(\vec{r}) \qquad (۱۱.۱)$$

که $\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r},t)$، $\phi(\overrightarrow{r},t)$ و $-e$ به ترتیب پتانسیل‌های برداری[۱] ، پتانسیل نرده‌ای[۲] میدان خارجی و بار الکترون هستند. میدان‌های خارجی خود نیز به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r},t) = -\overrightarrow{\nabla}\Phi(\overrightarrow{r},t) - \frac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t}, \qquad \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r},t) \qquad (۱۲.۱)$$

[۱] Vector potential
[۲] Scaler potential

این دو میدان تحت تبدیلات پیمانه‌ای[۳]زیر، ناوردا[۴] هستند:

$$\Phi'(\vec{r},t)=\Phi(\vec{r},t)-\frac{\partial}{\partial t}\chi(\vec{r},t),\qquad \vec{A}'(\vec{r},t)=\vec{A}(\vec{r},t)+\vec{\nabla}\chi(\vec{r},t) \qquad (۱۳.۱)$$

معادله‌ی وابسته به زمان شرودینگر برابر است با:

$$\hat{H}(\vec{r},t)\Psi(\vec{r},t)=i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{r},t)}{\partial t} \qquad (۱۴.۱)$$

برای ساده‌سازی شکل برهم‌کنش نور با ماده، عملگر یکانی U[۵] را چنین در نظر گرفته می‌شوند:

$$\Psi'(\vec{r},t)\equiv\hat{U}\Psi(\vec{r},t) \qquad (۱۵.۱)$$

بنابراین معادله‌ی وابسته به زمان شرودینگر با تابع موج جدید به شکل زیر تغییر می‌کند:

$$\hat{H}'(\vec{r},t)\Psi'(\vec{r},t)=i\hbar\frac{\partial\Psi'(\vec{r},t)}{\partial t} \qquad (۱۶.۱)$$

که $\hat{H}'(\vec{r},t)$ و $\hat{U}$ در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$\acute{H}'(\vec{r},t)=\hat{U}\hat{H}\hat{U}^{\dagger}+i\hbar\frac{\partial\hat{U}\hat{U}^{\dagger}}{\partial t} \qquad (۱۷.۱)$$

با انتخاب عملگر یکانی به‌صورت

$$\hat{U}(\vec{r},t)=e^{(}\frac{-ie\chi(\vec{r},t)}{\hbar}) \qquad (۱۸.۱)$$

برای عبارت‌های پریم‌دار معادله‌ی زیر را برقرار است:

$$\hat{H}'(\vec{r},t)=\frac{۱}{۲m}[\hat{\vec{P}}+e\vec{A}'(\vec{r},t)]^{۲}-e\Phi'(\vec{r},t)+V(\vec{r}) \qquad (۱۹.۱)$$

[۳] Gage transformation
[۴] Invariant
[۵] Unitary operator

که $\vec{A}'(\vec{r},t)$ و $\Phi'(\vec{r},t)$ در معادله‌ی (۱۲.۱) صدق می‌کنند. در اینجا با انتخاب پیمانه‌ی مناسب، به عنوان مثال پیمانه‌ی کولنی[۶]، و قرار دادن $\Phi(\vec{r},t)=۰$ و $\vec{\nabla}.\vec{A}(\vec{r},t)=۰$ در معادله‌های ماکسول، می‌توان برای پتانسیل برداری، معادله‌ی موج زیر را به کمک معادله‌های ماکسول نوشت

$$\nabla^۲\vec{A}'(\vec{r},t)-\frac{۱}{C^۲}\frac{\partial^۲\vec{A}'(\vec{r},t)}{\partial t^۲}=۰ \qquad (۲۰.۱)$$

مزیتی که پیمانه‌ی کولنی دارد این است که میدان تابشی به طور کامل با پتانسیل برداری توصیف می‌شود. در این پیمانه، معادله‌ی (۱۱.۱) به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}\hat{H}(\vec{r},t)&=\frac{۱}{۲m}[\hat{\vec{P}}+e\vec{A}'(\vec{r},t)]^۲+V((\vec{r},t))\\&=\frac{\hat{\vec{P}}^۲}{۲m}+\frac{e}{m}\vec{A}.\hat{\vec{P}}+\frac{e^۲}{۲m}\vec{A}^۲+V(\vec{r})\end{aligned} \qquad (۲۱.۱)$$

هم‌چنین معادله‌ی (۱۹.۱) به شکل زیر می‌توان نوشت

$$\hat{H}'(\vec{r},t)=\frac{۱}{۲m}[\hat{\vec{P}}+e(\vec{A}(\vec{r},t)+\vec{\nabla}\chi(\vec{r},t))]^۲+e\frac{\partial\chi(\vec{r},t)}{\partial t}+V(\vec{r}) \qquad (۲۲.۱)$$

بنابراین جواب معادله‌ی موج رابطه‌ی (۲۰.۱) را این‌گونه می‌توان نوشت:

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\vec{A}_۰e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)}+c.c \qquad (۲۳.۱)$$

که در آن $\mid\vec{k}\mid=\frac{۲\pi}{\lambda}$ | بردار موج تابشی، و جمله‌ی دوم همیوغ مختلط[۷] جمله‌ی اول است. با توجه به اینکه $\mid\vec{r}\mid$ | در ابعاد اتمی است و با در نظر گرفتن λ به عنوان طول موج نور تابشی، داریم :۱ $\vec{k}.\vec{r}\ll ۱$. بنابراین، برای تمام فضای اتم، پتانسیل برداری از لحاظ فضایی یکنواخت است. یعنی $\vec{A}(\vec{r},t)\cong\vec{A}(t)$ که همان تقریب دوقطبی است. یک انتخاب دیگر برای تابع پیمانه‌ای به صورت $\chi(\vec{r},t)=-\vec{A}(t).\vec{r}$ است در این پیمانه داریم:

$$\vec{\nabla}\chi(\vec{r},t)=-\vec{A}(t),\quad \frac{\partial\chi(\vec{r},t)}{\partial t}=-\vec{r}.\frac{\partial\vec{A}(t)}{\partial t}=-\vec{r}.\vec{\varepsilon}(t) \qquad (۲۴.۱)$$

[۶] Coulomb gage
[۷] Complex conjugate

بنابراین هامیلتونی به‌صورت زیر تغییر خواهد کرد:

$$\hat{H}'(\vec{r},t)=\frac{\hat{\vec{P}}^{۲}}{۲m}+V(\vec{r})+e\vec{r}.\vec{\varepsilon}(t) \qquad (۲۵.۱)$$

که $\hat{\vec{d}}=-e\hat{\vec{r}}$ نشان دهنده‌ی گشتاور دو قطبی اتم که بر اثر برهم‌کنش نور با ماده ایجاد شده است و به صورت عملگری ظاهر شده است. هامیلتونی را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\hat{H}'(\vec{r},t)=\hat{H}_{۰}-\hat{\vec{d}}.\vec{\varepsilon}(t) \qquad (۲۶.۱)$$

که جمله‌ی دوم سمت راست، هامیلتونی برهم‌کنش را نشان می‌دهد [۱۹].

۴.۱ برهم‌کنش نور با ماده از دیدگاه نیمه‌کلاسیکی

نظریه‌ی نیمه کلاسیک برهم‌کنش نور با ماده زمانی مطرح می‌شود که اتم به‌صورت کوانتومی و میدان به‌صورت کلاسیکی در نظر گرفته شود. به عبارت دیگر اتم به‌صورت یک هسته و تعدادی الکترون که می‌توانند ترازهای گسسته‌ی انرژی را پر کنند، در نظر گرفته می‌شود و با امواج الکترومغناطیسی که انرژی پیوسته دارند برهم‌کنش می‌کنند. در این نظریه به‌جای متغیرهای مختلف هامیلتونی مربوط به اتم، عملگرهای متناظرشان قرار می‌گیرند. میدان الکتریکی خارجی ایجاد شده توسط لیزر، با تابع سینوسی به شکل $\vec{\varepsilon}(t)=\vec{\varepsilon}_{۰}\cos\omega t$ در نظر گرفته می‌شود. فرض شده است که میدان در لحظه‌ی $t=۰$ به طور ناگهانی روشن شده و با اتم برهم‌کنش می‌کند. ω نشان دهنده‌ی فرکانس تابش است و تقریب دوقطبی الکتریکی ($\vec{k}.\vec{r}\ll ۱$) نیز برقرار بوده و اتم در ابتدا در حالت $\mid i\rangle$ می‌باشد که در یک رابطه‌ی ویژه مقداری به‌صورت $\hat{H}_{۰}\mid i\rangle=E_{۰}\mid i\rangle$ صدق می‌کند. بنابراین تابع حالت سیستم در زمان‌های $t>۰$ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\mid\psi(t)\rangle=\sum_{k}C_{k}(t)e^{\frac{-iE_{k}t}{\hbar}}\mid k\rangle \qquad (۲۷.۱)$$

که در آن دامنه‌ی احتمال در شرط بهنجارش زیر صدق می‌کند:

$$\sum_k \mid C_k(t) \mid^{۲} = ۱ \qquad (۲۸.۱)$$

با جایگذاری در معادله‌ی وابسته به زمان شرودینگر داریم:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \mid \psi(t)\rangle = (\hat{H}_۰ + \hat{H}^I) \mid \psi(t)\rangle \qquad (۲۹.۱)$$

با در نظر گرفتن هامیلتونی برهم‌کنش به صورت $\hat{H}^I = -\hat{\vec{d}}.\vec{\varepsilon}$، معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول زیر، برای دامنه‌های احتمال به‌دست می‌آید:

$$\dot{C}_l(t) = -\frac{i}{\hbar}\sum_k C_k(t)\langle l \mid \hat{H}^I \mid k\rangle e^{i\omega_{lk}t} \qquad (۳۰.۱)$$

در این‌جا $\omega_{lk} = \frac{E_l - E_k}{\hbar}$، فرکانس گذار بین حالت‌های l و k است. حال با استفاده از نظریه‌ی اختلال، برای دامنه‌های احتمال روابط زیر برقرار است:

$$\dot{C_l}^{(۰)}(t) = ۰ \qquad (۳۱.۱)$$

$$\dot{C_l^{(۱)}}(t) = -\frac{i}{\hbar}\sum_k C_k^{(۰)}(t)H_{lk}^{(I)}(t)e^{i\omega_{lk}t} \qquad (۳۲.۱)$$

$$\dot{C^{(۲)}}_l(t) = -\frac{i}{\hbar}\sum_k C_k^{(۱)}(t)H_{lk}^{(I)}(t)e^{i\omega_{lk}t} \qquad (۳۳.۱)$$

در روابط بالا $H_{lk}^{(I)}$ ($H_{lk}^{(I)} \equiv \langle l \mid \hat{H}^l(t) \mid k\rangle$) عناصر ماتریسی هامیلتونی برهم‌کنش است. می‌توان حالت کلی تحول زمانی تصحیح مرتبه‌ی nام دامنه‌ی احتمال را چنین نوشت:

$$\dot{C_l}^{(n)}(t) = -\frac{i}{\hbar}\sum_k \dot{C_k}^{(n-۱)}(t)H_{lk}^{(I)}(t)e^{i\omega_{lk}t} \qquad (۳۴.۱)$$

نظریه‌ی اختلال تا زمانی معتبر می‌باشد که میدان خارجی ضعیف باشد به‌طوری که جمعیت‌های اتمی خیلی کم تغییر کنند. یعنی اگر در لحظه‌ی شروع برهم‌کنش، داشته باشیم: $C_i(۰) = ۱$ و $C_f(۰) = ۰$

$(f \neq i)$، آن‌گاه برای لحظه‌های $t > ۰$ و بعد از شروع برهم‌کنش، با تقریب خوبی می‌توان گفت: $C_i(t) \approx ۱$ و $(f \neq i) \mid C_f(t) \mid \ll ۱$ برقرار است. در اختلال مرتبه‌ی اول برای به‌دست آوردن $\dot{C}_f(t)$، به ازای $i = k$ نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\dot{C_f}^{(۱)}(t) = -\frac{i}{\hbar} {H_{fi}}^I(t) e^{i\omega_{fi}t} C_i^{(۰)}(t) \qquad (۳۵.۱)$$

دامنه‌ی گذار از تراز $\langle i \mid$ به تراز $\langle f \mid$ با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی بالا به دست می‌آید:

$$C_f{}^{(۱)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_o^۱ dt' {H_{fi}}^I(t') e^{i\omega_{fi}t'} {C_i}^{(۰)}(t') \qquad (۳۶.۱)$$

عناصر ماتریسی عملگر $\hat{\vec{d}}$ فقط برای حالت‌هایی که پاریته‌ی مخالف دارند، غیر صفر خواهد بود. بنابراین تصحیح مرتبه‌ی اول برای دامنه‌ی احتمال در حالت اولیه صفر می‌شود، $({C_i}^{(۱)} = ۰)$. و با توجه به $H^{(I)} = -\hat{\vec{d}}.\vec{\varepsilon}_۰ \cos\omega t$ داریم:

$$\begin{aligned} C_f{}^{(۱)}(t) &= -\frac{i}{\hbar} \int_o^۱ d\acute{t} {H_{fi}}^I(\acute{t}) e^{i\omega_{fi}\acute{t}} \\ &= \frac{۱}{۲\hbar} (\hat{\vec{d}}.\vec{E}_۰)_{fi} \times [\frac{(e^{i(\omega+\omega_{fi})t} - ۱)}{\omega + \omega_{fi}} - \frac{(e^{-i(\omega-\omega_{fi})t} - ۱)}{\omega - \omega_{fi}}] \end{aligned} \qquad (۳۷.۱)$$

هنگامی‌که فرکانس میدان تابشی ω به فرکانس گذار اتمی ω_{fi} نزدیک باشد، اثر جمله‌ی اول در مقایسه با جمله‌ی دوم ناچیز خواهد بود زیرا جمله‌ی اول به شدت نوسان می‌کند و مقدار انتگرال آن در بازه‌های زمانی که طولشان بزرگ‌تر از $۱/۲\omega$ باشد، نسبت به انتگرال دوم ناچیز خواهد شد. بنابراین در تقریب موج چرخان از جمله‌ی اول در مقابل جمله‌ی دوم صرف‌نظر می‌شود. بدین ترتیب احتمال گذار در مرتبه‌ی اول برابر است با:

$$P_{i\to f}(t) = \mid {C_f}^{(۱)}(t) \mid^۲ = \frac{\mid (\hat{\vec{d}}.\vec{E}_۰)_{fi} \mid^۲ \sin^۲(\frac{\Delta t}{۲})}{\hbar^۲ \Delta^۲} \qquad (۳۸.۱)$$

که $\Delta = \omega - \omega_{fi}$ نامیزانی[۸] میدان تابشی توسط لیزر و گذار اتمی است. وقتی $\Delta \neq ۰$ باشد، $P^{(۱)}_{i\to f}(t)$ دارای مقدار بیشینه‌ای به‌صورت زیر است:

$$P^{(۱)}_{i\to f}(t)|_{max} = \frac{|\ (\hat{\vec{d}}.\vec{E}_۰)_{fi}\ |^۲}{\hbar^۲\Delta^۲} \qquad (۳۹.۱)$$

و در حالت تشدید[۹] $\Delta = ۰$ می‌باشد، بنابراین:

$$P^{(۱)}_{i\to f}(t)|_{max} = \frac{|\ (\hat{\vec{d}}.\vec{E}_۰)_{fi}\ |^۲}{۴\hbar^۲}t^۲ \qquad (۴۰.۱)$$

این نظریه برای بازه‌ی $P^{(۱)}_{i\to f}(t)|_{max} \ll ۱$، اعتبار دارد، احتمال گذار برای حالت غیرتشدیدی به Δ و $|\ (\hat{\vec{d}}.\vec{E}_۰)_{fi}\ |$ وابسته است. در حالت تشدید، احتمال گذار بیشینه، فقط برای زمان‌های کوتاه معتبر است. در شکل زیر احتمال گذار برای موارد $\Delta \approx ۰$ و $\Delta \gg ۰$ برحسب زمان رسم شده است. همچنین می‌توان منحنی $P_{i\to f}(t)$ را بر حسب نامیزانی Δ رسم نمود. مطابق شکل (۲.۱)، نمودار حول $\Delta = ۰$ یک قله دارد که پهنای این قله با $t^{-۱}$، ارتفاع آن با $t^۲$ و سطح زیر منحنی با t، متناسب است.

در حد $t \to \infty$ و شرط $\Delta \approx ۰$، احتمال گذار به‌وسیله‌ی تابع دلتای دیراک بیان می‌شود:

$$P^{(۱)}_{i\to f}(t) = \frac{\pi}{۲}\frac{|\ (\hat{\vec{d}}.\vec{E}_۰)_{fi}\ |^۲}{\hbar^۲}t\delta(\omega - \omega_{fi}) \qquad (۴۱.۱)$$

بنابراین با تعریف نرخ احتمال گذار به‌صورت زیر:

$$W_{i\to f} = \frac{P^{(۱)}_{i\to f}}{t} \qquad (۴۲.۱)$$

[۸] Detuning
[۹] Resonance