بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی گرایش محض

عنوان:

وجود یک زیرگروه جابجاگر بزرگ

استاد راهنما:
دکتر محمدرضا ریسمانچیان

استاد مشاور:
دکتر ندا آهنجیده

پژوهشگر:
الهام پاشنامه

آذرماه ۱۳۹۰

کلیه حقوق مادی مرتبط و نتایج
مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی
از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به
دانشگاه شهرکرد است.

تشکر و قدردانی

خدایا تو را سپاس که مرا در دایره امکان نهادی و نقش علم را بر دفتر اندیشه‌ام کشیدی و چشمه‌سار زلال دانش و معرفتت را ارزانی‌ام داشتی تا در برهوت نادانی سیراب‌گر وجودم باشد.

در ابتدا از اولین و بزرگترین معلمان زندگی‌ام، پدر و مادر عزیزم، که مرا به جان پروردند و امید رسیدن به افق‌های روشن را در دلم شکوفا ساختند، از صمیم قلب تشکر می‌کنم.

صمیمانه‌ترین مراتب سپاس خود را به استاد راهنمای گرامی جناب آقای دکتر محمدرضا ریسمانچیان تقدیم نموده، که حضور ایشان به عنوان یک پشتوانه علمی همیشه مرا در راه علم یاری کرده است.

از خانم دکتر ندا آهنجیده به عنوان استاد مشاور که با صعه‌ی صدر و دقتشان باعث پربار شدن هر چه بیشتر این پایان نامه شدند نهایت تشکر و قدردانی را دارم.

از آقای دکتر غلامرضا رضایی‌زاده و آقای دکتر مهدی ارسخان که زحمت بازخوانی و داوری این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند، کمال تشکر را دارم.

صمیمانه‌ترین مراتب سپاس خود را از اساتید ارجمند که در دوران تحصیل از رهنمودهای ارزشمندشان بهره‌مند شده‌ام دارم.

در پایان از برادرم ایمان و خانم‌ها معصومه بی‌باک و ستاره استکی که مرا همراهی کردند، سپاسگزارم و از خداوند متعال موفقیت روز افزون آنان را خواهانم.

الهام پاشنامه

آذر ماه ۱۳۹۰

تقدیم به

مظهر عشق و استقامت در زندگی

پدرم

زیباترین تجلی مهر الهی و سرچشمه‌ی جوشان محبت

مادرم

و

دریای بیکران همدلی

همسرم

چکیده

با قرار دادن شرایطی روی گروه G می‌توان کران‌هایی برای اندازه‌ی زیرگروه مشتق G که با G' نمایش می‌دهیم به دست آورد.

در هر گروه متناهی G زیرگروهی از G' به‌نام باقیمانده پوچتوان وجود دارد که آن‌را با $U(G)$ نمایش می‌دهیم. $U(G)$ کوچکترین زیرگروه نرمال از G است که خارج قسمت آن پوچتوان است. نمادگذاری معمولی $Z(G)$ و $\Phi(G)$ را برای زیرگروه مرکز و زیرگروه فراتینی گروه G استفاده می‌کنیم. برای یک گروه متناهی G، ارتباط بین اندازه‌ی باقیمانده پوچتوان و مرکزش را مطالعه می‌کنیم و ثابت می‌کنیم اگر G یک گروه حل‌پذیر باشد به‌طوری که $Z(G) = \Phi(G) = ۱$، آن‌گاه $|U(G)| > |G|^{\frac{۱}{۳}}$ است و چون $U(G) \leq G'$، پس به وضوح تحت همان شرایط $|G'| > |G|^{\frac{۱}{۳}}$ است. سپس بدون فرض $Z(G) = \Phi(G) = ۱$ و یا فرض حل‌پذیر بودن گروه G و فقط با فرض غیرپوچتوان بودن گروه G، زیرگروه‌های خارج قسمتی از G پیدا می‌کنیم که دارای باقیمانده پوچتوان بزرگ می‌باشند.

کلمات کلیدی

زیرگروه مشتق، زیرگروه فیتینگ، زیرگروه فراتینی، باقیمانده پوچتوان.

فهرست مندرجات

فهرست نمادها

مجموعه‌ی اعداد صحیح	$\mathbb{Z}$
مجموعه‌ی اعداد طبیعی	$\mathbb{N}$
مجموعه‌ی اعداد گویا	$\mathbb{Q}$
گروه متقارن از درجه‌ی n	$\mathrm{S_n}$
گروه متناوب از درجه‌ی n	$\mathrm{A_n}$
گروه دو وجهی مرتبه‌ی n	$\mathrm{D}_{۲n}$
بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a, b	(a, b)
حاصل‌ضرب مستقیم	$\times, Dr$
حاصل‌ضرب نیم مستقیم	$\rtimes, \ltimes$
یکریخت است با	$\cong$
زیرگروه	$\leq$
کوچکترمساوی	$\leqslant$
زیرگروه سره و کوچکتر	$<$
زیرگروه نرمال	$\trianglelefteq$
زیرگروه سره‌ی نرمال	$\triangleleft$
زیرگروه زیرنرمال	$\trianglelefteq\trianglelefteq$
زیرگروه تولید شده توسط X	$\langle X \rangle$
مجموعه‌ی p–زیرگروه‌های سیلوی G	$\mathrm{Syl_p(G)}$
تعداد اعضای G	$\mathrm{\|G\|}$

مرتبه‌ی عنصر g	$o(g)$
به‌طوری‌که	$\mid$
گروه خارج‌قسمت G به روی H	$\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{H}}$
گروه جابه‌جاگر H,K	[H,K]
زیرگروه مشتق G	G'
مشتق i ام گروه G	$\mathrm{G}^{(\mathrm{i})}$
n امین جمله‌ی سری مرکزی پایینی	$\Gamma_n(\mathrm{G})$
$(n+۱)$ امین جمله سری مرکزی بالایی	$\mathrm{Z_n(G)}$
اندیس H در G	$\mathrm{\|G : H\|}$
مرکزساز زیرگروه H در گروه G	$\mathrm{C_G(H)}$
نرمال‌ساز زیرگروه H در گروه G	$\mathrm{N_G(H)}$
مرکز گروه G	Z(G)
مجموعه‌ی درون ریختی‌های G	End(G)
گروه خودریختی‌های G	Aut(G)
هسته‌ی عمل یا هسته‌ی همریختی	ker
تصویر همریختی	Im
زیرگروه مغز H	Core (H)
زیرگروه فیتینگ G	F(G)
زیرگروه فراتینی G	$\Phi(\mathrm{G})$
باقیمانده پوچتوان G	U(G)
H زیرگروه مشخصه‌ی G	H char G

هولومورف گروه G	$\mathrm{Hol}\ \mathrm{G}$
بزرگترین π–زیرگروه نرمال گروه G	$\mathrm{O}_\pi(\mathrm{G})$
همدسته‌ی راست H در G	Hg

پیشگفتار

زیرگروه مشتق از آن لحاظ حائز اهمیت است که کوچکترین زیرگروه نرمال است که خارج قسمت آن آبلی است. محققان کران‌هایی برای اندازه‌ی زیرگروه مشتق به‌دست آورده‌اند. در سال ۱۹۵۴ نیومن[۱] [۱۰]، نشان داد که اگر G یک گروه باشد به‌طوری‌که مرتبه‌ی عناصر مزدوج، متناهی کراندار با ماکسیمم n باشند، آن‌گاه $|G'|$ متناهی است. وایگولد[۲] در سال ۱۹۵۵ حدس نسبتاً نادقیقی در مورد اندازه‌ی G' آورد که در سال‌های ۱۹۵۶، ۱۹۶۱ و ۱۹۶۳ به ترتیب خود وایگولد [۱۵]، مکدونالد[۳] [۹] و شپرد[۴] [۱۳]، مقداری این فرمول را بهبود بخشیدند. حدس نسبتاً نادقیق وایگولد این بود که $|G'| \leqslant n^{\frac{1}{2}(1+\alpha(n))}$، که $\alpha(n)$ تعداد مقسوم‌علیه‌های اول n را نمایش می‌دهد. در سال ۱۹۶۸ براید[۵] [۲] نشان داد که این فرمول برای گروه‌های پوچتوان از رده‌ی پوچتوانی ۲ درست است. نیومن نیز نشان داد $|G'| \leqslant n^{q(n)}$ که q یک تابع درجه‌ی دوم لگاریتم است.

در این پایان‌نامه ما نیز تحت شرایط خاص یک کران برای $|G'|$ و برای زیرگروهی از آن به‌نام باقیمانده پوچتوان $U(G)$ که بئر[۶] [۱]، خواص آن‌را بررسی کرده، ارائه می‌دهیم.

این پایان‌نامه در سه فصل تدوین شده است. در فصل اول بخشی از مطالب مقدماتی نظریه‌ی گروه‌ها که مورد نیاز در سرتاسر پایان‌نامه است را بیان می‌کنیم. این مطالب از [۳،۱۲،۱۴،۱۷،۱۸، ۱۹]،

---

[۱] Neumann

[۲] Wiegold

[۳] Macdonald

[۴] Shepperd

[۵] Bride

[۶] Baer

گردآوری شده است. در فصل دوم باقیمانده پوچتوان گروه G که آن‌را با $U(G)$ نمایش می‌دهیم معرفی می‌کنیم و خواص آن رامورد بررسی قرار می‌دهیم. در انتهای فصل G را گروهی متناهی غیربدیهی و حل‌پذیر با مرکز و زیرگروه فراتینی بدیهی در نظر گرفته و با استفاده از خواص باقیمانده پوچتوان کران پایینی برای $|U(G)|$ به صورت زیر به‌دست می آوریم

$$|U(G)| > (|G|.r^{\frac{۱}{r-۱}})^{\frac{p-۱}{۲p-۱}} .$$

توجه شود که p کوچکترین مقسوم‌علیه اول $|G|$ و r بزرگترین مقسوم علیه اول $|G|$ است. با استفاده از این فرمول به‌دست می آوریم که اگر G یک گروه متناهی غیربدیهی حل‌پذیر با مرکز و فراتینی بدیهی باشد، آن‌گاه $|G'| \geqslant |U(G)| > |G|^{\frac{۱}{۳}}$ است. کاپه[۷] و کیرتلند[۸] [۸] گروه‌های متناهی که دارای زیرگروه فراتینی بدیهی هستند را مورد بررسی قرار دادند. سرانجام در فصل سوم با برداشتن شرط حل‌پذیری و همچنین شرایط $Z(G) = ۱$ و $\Phi(G) = ۱$ از روی گروه غیرپوچتوان G، زیرگروه‌های خارج قسمتی از گروه G را به‌دست می آوریم که اندازه‌ی باقیمانده پوچتوان آن‌ها و بنابراین اندازه‌ی زیرگروه مشتق آن‌ها در مقایسه با اندازه‌ی گروه بزرگ است.

در اولین قضیه‌ی اصلی این فصل نشان می‌دهیم در هر گروه متناهی غیرپوچتوان G یک زیرگروه زیرنرمال $K \leq G$ چنان موجود است که $|U(\frac{K}{\Phi(K)})| > |\frac{K}{\Phi(K)}|^{\frac{۱}{۲}}$.

در دومین قضیه‌ی اصلی این فصل نشان می‌دهیم در هر گروه متناهی و غیرپوچتوان G زیرگروه‌های مشخصه M و K چنان موجود است که $M < K$ و M پوچتوان است و $|U(\frac{K}{M})| > |\frac{K}{M}|^{\frac{۱}{۲}}$ است.

در ادامه‌ی کار، زیرگروهی از G به‌نام $W(G)$ را معرفی می‌کنیم که پیش‌تصویر $Z(\frac{G}{\Phi(G)})$ است، یعنی $Z(\frac{G}{\Phi(G)}) = \frac{W(G)}{\Phi(G)}$. سپس خواصی از $W(G)$ را بیان می‌کنیم و در سومین قضیه‌ی اصلی این فصل نشان می‌دهیم در هر گروه پوچتوان G، زیرگروه مشخصه‌ی K از G چنان موجود است که $|\frac{K}{W(K)}|' > |\frac{K}{W(K)}|^{\frac{۱}{۲}}$.

---

[۷] Kappe

[۸] Kirtland

فصل ۱

مقدمات و پیش‌نیازها

در این فصل تعاریف و قضایای مقدماتی از نظریه‌ی گروه‌ها که در سرتاسر پایان نامه مورد استفاده قرار گرفته است آورده شده است، که به منظور جلوگیری از حجیم شدن مطلب از آوردن اثبات قضایا خودداری شده است.

۱.۱ تعاریف و نتایج مقدماتی

گزاره ۱.۱.۱ فرض کنیم M زیرگروه نرمال گروه G باشد. در این صورت M زیرگروه ماکسیمال گروه G است اگر و فقط اگر $\frac{G}{M}$ گروهی ساده باشد.

برهان. برای اثبات مرجع [۱۷] صفحه‌ی ۲۲۲ را ببینید. $\square$

تعریف ۲.۱.۱ زیرگروه نرمال غیربدیهی H از گروه G را یک زیرگروه نرمال مینیمال G می‌نامیم، هرگاه H حاوی هیچ زیرگروه نرمال G به جز خود و یک نباشد. به عبارت دیگر اگر $N \trianglelefteq G$ و $N \subseteq H$، آن‌گاه $N = H$ یا $N = ۱$.

تعریف ۳.۱.۱ زیرگروه H از گروه G را یک زیرگروه مشخصه‌ی G می‌نامیم، هرگاه به ازای هر خودریختی σ از G، داشته باشیم $\sigma(H) \subseteq H$.

مثال ۴.۱.۱ مرکز یک گروه همواره یک زیرگروه مشخصه‌ی آن گروه است.

قضیه ۵.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد و $K \leq H \leq G$، در این صورت

(الف) اگر $K\ char\ H$ و $H\ char\ G$، آن‌گاه $K\ char\ G$؛

(ب) اگر $H \trianglelefteq G$ و $K\ char\ H$، آن‌گاه $K \trianglelefteq G$؛

(ج) اگر $H \leq K$ و $H\ char\ G$ و $\frac{K}{H}\ char\ \frac{G}{H}$، آن‌گاه $K\ char\ G$.

برهان. برای اثبات مرجع [۱۸] صفحه‌ی ۱۶۳و صفحه‌ی ۱۸۰ را ببینید. □

تعریف ۶.۱.۱ گروه G را یک گروه مشخصاً ساده می‌نامیم هرگاه تنها زیرگروه‌های مشخصه‌ی آن، زیرگروه بدیهی و خود G باشد.

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنیم p یک عدد اول باشد. در این صورت گروه G را یک $p-$گروه می‌نامیم هرگاه مرتبه‌ی هر عضو غیربدیهی G توان مثبتی از p باشد. زیرگروه H از G را یک $p-$زیرگروه G نامیم هرگاه H یک $p-$گروه باشد.

تعریف ۸.۱.۱ $p-$گروه آبلی متناهی G را آبلی مقدماتی می‌نامیم در صورتی‌که مرتبه هر عضو غیربدیهی G عدد اول p باشد.

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنیم G یک گروه متناهی از مرتبه‌ی n باشد و $n = p^\alpha m$ که در آن α یک عدد صحیح مثبت است و p عدد اولی است که $p \nmid m$. در این صورت هر زیرگروه G از مرتبه‌ی p^α را یک p−زیرگروه سیلوی G می‌نامیم. مجموعه‌ی همه‌ی p−زیر گروه‌های سیلوی G را با $\mathrm{Syl}_p(G)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱۰.۱.۱. فرض کنیم G گروهی متناهی و H یک p−زیرگروه سیلوی G باشد. در این صورت H یک p−زیرگروه سیلوی یکتای G است اگر و فقط اگر H در G نرمال باشد.

برهان. برای اثبات مرجع [۱۹] صفحه‌ی ۲۵۶ را ببینید. □

قضیه ۱۱.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه متناهی و p یک عدد اول باشد. به علاوه فرض کنیم $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ و $N \trianglelefteq G$. در این صورت،

(الف) $P \cap N$ یک p−زیرگروه سیلوی N است؛

(ب) p−زیرگروه سیلوی $\frac{G}{N}$ به صورت $\frac{PN}{N}$ است.

برهان. برای اثبات مرجع [۱۷] صفحه‌ی ۷۶ را ببینید. □

تعریف ۱۲.۱.۱ فرض کنیم X زیرمجموعه‌ای ناتهی از گروه G باشد. در این صورت زیرگروه تولید شده با همه‌ی زیرگروه‌های نرمال G که مشمول در X است را مغز X می‌نامیم و با $\mathrm{Core}_G(X)$ (یا به اختصار با $\mathrm{Core}(X)$) نشان می‌دهیم.

هرگاه $H \leq G$ آن‌گاه به ازای هر زیرگروه نرمال G مانند K که $K \leq H$، $K \leq \mathrm{Core}(H)$. بنابراین $\mathrm{Core}(H)$ بزرگترین زیرگروه نرمال G است که مشمول در H است.

لم ۱۳.۱.۱ فرض کنیم $G = \langle a \rangle$ یک گروه دوری از مرتبه n باشد. در این صورت برای $k \leqslant n$، $o(a^k) = \frac{n}{(n,k)}$.

برهان. برای اثبات مرجع [۱۹] صفحه‌ی ۱۰۴ را ببینید. □

قضیه ۱۴.۱.۱ . فرض کنیم G گروه دوری متناهی از مرتبه‌ی m باشد. در این صورت به ازای هر مقسوم‌علیه مثبت d از m، زیرگروه یکتایی از G از مرتبه‌ی d وجود دارد.

برهان. برای اثبات مرجع [۱۹] صفحه‌ی ۱۵۷ را ببینید. □

قضیه ۱۵.۱.۱ . فرض کنیم H یک زیرگروه سره از گروه متناهیاً تولید شده‌ی G باشد. در این صورت زیرگروه ماکسیمال $M < G$ وجود دارد به‌طوری که $H \leq M$ است.

برهان. برای اثبات مرجع [۱۸] صفحه‌ی ۲۵۷ را ببینید. □

گزاره ۱۶.۱.۱ فرض کنیم G گروه متناهیاً تولید شده است و فقط یک زیرگروه ماکسیمال مانند M دارد. در این صورت برای هر $x \notin M$ داریم $G = \langle x \rangle$ و همچنین G یک $p-$گروه دوری است.

برهان. برای اثبات مرجع [۱۸] صفحه‌ی ۲۶۴ را ببینید.

تعریف ۱۷.۱.۱ فرض کنیم G یک گروه و X مجموعه‌ای ناتهی باشد. در این صورت گوییم گروه G بر مجموعه‌ی X عمل می‌کند، هر گاه نگاشت

$$X \times G \to X$$
$$(x,g) \mapsto x^g \quad \forall x \in X, \quad g \in G \quad ,$$

وجود داشته باشد به‌طوری که داشته باشیم:

(الف) برای هر $x \in X$، $x^1 = x$،

(ب) برای هر $x \in X$ و هر $g,h \in G$، $\left(x^g\right)^h = x^{gh}$.

تعریف ۱۸.۱.۱ مجموعه‌ی $\{g \in G \mid x^g = x \quad , \quad \forall x \in X\}$ را هسته‌ی عمل G بر X نامیم و اگر این مجموعه برابر با ۱ شود، آن‌گاه عمل G بر X باوفا نامیده می‌شود.

تعریف ۱۹.۱.۱ فرض کنیم G و H دو گروه دلخواه باشند. در این صورت گوییم G روی H عمل می‌کند و یا این‌که G یک گروه عملگر روی H است، هر گاه G روی H به عنوان مجموعه عمل کند و به‌علاوه داشته باشیم

$$(xy)^g = x^g y^g \qquad \forall x, y \in H \ , \ \forall g \in G \quad .$$

۲.۱ حاصل‌ضرب مستقیم و نیم مستقیم گروه‌ها و متمم یک گروه

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنیم G_1، G_2، ... و G_n، n گروه باشند. در مجموعه‌ی $G_1 \times \ldots \times G_n$ عمل دوتایی زیر را چنین تعریف می‌کنیم:

$$(g_1, \ldots, g_n)(g'_1, \ldots, g'_n) = (g_1 g'_1, \ldots, g_n g'_n) \quad .$$

که در آن g_i و g'_i در G هستند. به آسانی ملاحظه می‌شود که مجموعه‌ی $G_1 \times \ldots \times G_n$ با عمل فوق یک گروه است. این گروه را حاصل‌ضرب مستقیم خارجی گروه‌های G_1، G_2، ... و G_n می‌نامیم.

قضیه ۲.۲.۱. فرض کنیم G_1، G_2، ... و G_n، n گروه باشند و $G = G_1 \times \ldots \times G_n$. در این صورت G زیرگروه‌هایی مانند H_1، H_2، ... و H_n دارد به‌طوری‌که به ازای هر i که $1 \leqslant i \leqslant n$، $H_i \cong G_i$ و

(الف) به ازای هر i که $1 \leqslant i \leqslant n$، $H_i \trianglelefteq G$؛

(ب) $G = H_1 \ldots H_n$؛

(ج) به ازای هر i که $1 \leqslant i \leqslant n$، $H_i \cap H_1 \ldots H_{i-1} H_{i+1} \ldots H_n = 1$.

برهان. برای اثبات مرجع [۱۹] صفحه‌ی ۲۴۰ را ببینید. □

تعریف ۳.۲.۱ فرض کنیم G یک گروه و $I_n = ۱, ۲, ..., n$ و $\{N_i | i \in I_n\}$ خانواده‌ای از زیرگروه‌های نرمال G باشد. در این صورت G حاصل‌ضرب مستقیم داخلی $N_۱$، $N_۲$، ... و N_n نامیده می‌شود، هرگاه هر $a \in G$ را بتوان به صورت یکتای $a = a_۱ a_۲ ... a_n$ بیان کرد، که در آن به ازای هر $i \in I_n$، $a_i \in N_i$.

قضیه ۴.۲.۱. فرض کنیم G حاصل‌ضرب مستقیم داخلی خانواده‌ای از زیرگروه‌های نرمال $\{N_i | i \in I_n\}$ باشد. در این صورت $G \cong N_۱ \times N_۲ \times ... \times N_n$

برهان. برای اثبات مرجع [۱۹] صفحه‌ی ۲۴۳ را ببینید. □

نتیجه ۵.۲.۱ فرض کنیم G یک گروه و A و B زیرگروه‌هایی از G باشند. اگر

(۱) $G = AB$؛

(۲) به ازای هر $a \in A$ و $b \in B$، $ab = ba$؛

(۳) $A \cap B = ۱$،

آن‌گاه G حاصل‌ضرب مستقیم داخلی A و B است.

برهان. برای اثبات مرجع [۱۹] صفحه‌ی ۲۴۵ را ببینید. □

گزاره ٦.۲.۱ اگر H و K زیرگروه‌هایی از گروه G باشند و $HK \leq G$، آن‌گاه $HK = \langle H, K \rangle$.

برهان. برای اثبات مرجع [۱۸] صفحه‌ی ٦٧ را ببینید. □

قضیه ۷.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. در این صورت هر زیرگروه نرمال مینیمال G یا مساوی با حاصل‌ضرب مستقیم گروه‌های یکریخت با $\mathbb{Z}_p$ است، یا این‌که مساوی با حاصل‌ضرب مستقیم گروه‌های ساده‌ی ناآبلی است.

برهان. برای اثبات مرجع [۱۸] صفحه‌ی ۱۶۵ را ببینید. □

تعریف ۸.۲.۱ یک گروه G حاصل‌ضرب نیم مستقیم از یک گروه N با یک گروه H است هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

(الف) $G = NH$،

(ب) $N \cap H = 1$،

(ج) $N \trianglelefteq G$.

در این صورت هر عضو از G مانند g را می‌توان به صورت منحصر به فرد به صورت nh بیان کرد که $h \in H$ و $n \in N$ است و آن‌را با نماد $G = N \rtimes H$ یا $G = H \ltimes N$ نمایش می‌دهیم.

حاصل‌ضرب نیم مستقیم را می‌توان به صورت دیگر نیز تعریف کرد.

تعریف ۹.۲.۱ برای هر دو گروه داده شده N و H با همریختی $\phi : H \to \mathrm{Aut}(N)$، مجموعه‌ی همه‌ی جفت‌های (h,n) که $h \in H$ و $n \in N$ با عمل دوتایی $(h_1, n_1)(h_2, n_2) = (h_1 h_2, (n_1 \phi_{h_2}) n_2)$ که تصویر h توسط ϕ را با ϕ_h نمایش می‌دهیم تشکیل یک گروه می‌دهد که آن‌را گروه حاصل‌ضرب نیم مستقیم N و H با عمل ϕ می‌نامیم و آن‌را با $G = N \rtimes_\phi H$ یا $G = H \ltimes_\phi N$ نمایش می‌دهیم و می‌گوییم گروه H بر گروه N با ϕ عمل می‌کند. درحالتی که ابهامی در مورد ϕ پیش نیاید، به جای علامات مذکور از علامات $G = N \rtimes H$ یا $G = H \ltimes N$ استفاده می‌شود.