بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه
بخش ریاضی کاربردی

پایان‌نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

کاربرد روش زیر فضای کرایلف در حل معادله $AXB + CXD = F$

مؤلف:
مسعود حسیبی نژاد پاریزی

استاد راهنما:
دکتر عظیم ریواز

استاد مشاور:
دکتر آزیتا تاج الدینی

خرداد ماه ۱۳۹۴

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی ارشد به

بخش ریاضی کاربردی

دانشکده ریاضی و رایانه

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: مسعود حسیبی نژاد پاریزی	امضاء:
استاد راهنما: دکتر عظیم ریواز	امضاء:
استادمشاور: دکتر آزیتا تاج الدینی	امضاء:
داور اول : دکتر محمد علی ولی	امضاء:
داور دوم: دکتر فرنگیس کیانفر	امضاء:
نماینده تحصیلات تکمیلی دانشکده: دکتر علیرضا دعاگویی	امضاء:
معاون آموزشی و پژوهشی دانشکده: دکتر محمد علی یعقوبی	امضاء:

تقدیم به

پدر بزرگوار

و

مادر مهربانم

آن دو فرشته‌ای که از خواسته‌هایشان گذشتند، سختی‌ها را به جان خریدند و خود را سپر بلای مشکلات و ناملایمات کردند تا من به جایگاهی که اکنون در آن ایستاده‌ام برسم.

و همسر فداکارم

که با گرمای عشقش مسیر را برایم هموار ساخت.

تشکر و قدردانی

سپاس و ستایش مر خدای را جل و جلاله که آثار قدرت او بر چهره روز روشن، تابان است و انوار حکمت او در دل شب تار، درفشان. آفریدگاری که خویشتن را به ما شناساند و درهای علم را بر ما گشود و عمری و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده ضعیف خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید.

بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجّل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه‌ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم. اما از آنجایی که تجلیل از استاد، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می‌کند و سلامت امانت‌هایی را که به دستش سپرده‌اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب «من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر اللّٰه عزّ و جلّ»

از پدر و مادر عزیزم، این دو معلم بزرگوار که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت‌هایم گذشته‌اند و در تمام عرصه‌های زندگی یار و یاوری بی چشم داشت برای من بوده اند؛

از استاد با کمالات و شایسته، جناب آقای دکتر عظیم ریواز که با نکته‌های دلاویز و گفته‌های شیوا، همواره راهنما و راه‌گشای نگارنده در اتمام و اکمال پایان نامه بوده است؛

از استاد ارجمند، سرکار خانم دکتر آزیتا تاج‌الدینی، که زحمت مشاوره این پایان‌نامه را متقبل شدند؛

از همسرم فداکارم که سایه مهربانیش سایه سار زندگیم می‌باشد، او که اسوه صبر و تحمل بوده و مشکلات مسیر را برایم تسهیل نمود؛

از دو دوست گرامیم جناب آقای دکتر فرید صابری موحد و جناب آقای هادی وحیدی مطلق که از تجاربشان استفاده کردم؛

کمال تشکر و قدردانی را دارم.باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

چکیده

در این پایان‌نامه، هدف استفاده روش‌های زیر فضای کرایلف در حل معادلات ماتریسی بزرگ، از جمله معادلات اشتاین و سیلوستر تعمیم یافته است. روش‌های تصویری به کار رفته در این نوشته، روش زیر فضای کرایلف و روش‌های کلی هستند. در پایان بازیابی تصویر به عنوان کاربرد آورده شده است.

کلمات کلیدی: *روش‌های تصویری، روش زیر فضای کرایلف، روش‌های تصویری کلی، معادلات اشتاین، معادلات سیلوستر تعمیم یافته، بازیابی تصویر.*

مقدمه

روش‌های زیر فضای کرایلف یکی از مهمترین دسته‌های روش‌های تکراری برای حل دستگاه‌های جبری خطی هستند. در واقع زیر فضای کرایلف، زیر فضای تولید شده توسط بردار مانده اولیه و حاصل‌ضرب‌های آن در ماتریس دستگاه است.

این زیرفضا برای اولین بار در مقاله الکسی نیخولاویچ کرایلف [۱] (۱۹۴۵-۱۸۶۳) که در سال ۱۹۳۱ منتشر شد، ظاهر گردید. انگیزه به وجود آمدن زیر فضای کرایلف از یک کاربرد در علوم دریایی ناشی شد، کرایلف علاقه‌مند به تحلیل سیستم‌های مکانیکی و محاسبه چند جمله‌ای مینیمال از یک ماتریس داده شده بود. [۴]

جدای از کار کرایلف، اولین روش زیر فضای کرایلف برای حل دستگاه‌های جبری خطی دو دهه بعد با انتشار روش گرادیان مزدوج برای حل دستگاه‌هایی با ماتریس معین مثبت توسط هیستنز [۲] و استیفل [۳] ظاهر شد.

نیاز زیاد به حل دستگاه‌های خطی با ابعاد بزرگ و سرعت در انجام محاسبات موجب استفاده روش زیر فضای کرایلف در بسیاری از مسائل، به ویژه در جامعه مهندسی شد. استفاده از زیر فضای کرایلف در روش‌های تکراری برای سیستم‌های خطی در محدوده ده الگوریتم برتر قرن بیستم میلادی قرار گرفت.

یکی از دلایل اصلی موفقیت روش زیر فضای کرایلف بدین گونه است که این زیر فضا می‌تواند به وسیله حاصل ضرب ماتریس ضرایب در یک بردار ساخته شود. پس لزومی ندارد که خود ماتریس سیستم ذخیره شود، بنابراین روش‌های زیر فضای کرایلف برای سیستم‌های خطی بزرگ و تنک [۴] بسیار مناسب هستند.

[۱] Aleksei Nikolaeuich Krylov

[۲] Hestenes

[۳] Stiefel

[۴] Sparse

روش‌های زیر فضای کرایلف براساس روش‌های تصویری عمل می‌کنند و به جای حل دستگاه‌های خطی با ابعاد بسیار بزرگ، تقریبی از جواب دستگاه در زیر فضای کرایلف با بعد کوچک بدست می‌آورند.

در این نوشته کاربرد روش زیر فضای کرایلف در حل معادلات ماتریسی از جمله معادله اشتاین [۱] و معادله سیلوستر تعمیم یافته [۲] مورد بررسی قرار می‌گیرد.

فصل بندی این پایان‌نامه بدین گونه است که بعد از ذکر برخی تعاریف، قضایا و روش‌های تصویری در فصل اول، به حل معادلات اشتاین با روش‌های زیر فضای کرایلف و روش‌های تصویری کلی در فصل دوم می‌پردازیم. در فصل سوم به سراغ معادلات سیلوستر تعمیم یافته، رفته و با استفاده از روش‌های تصویری کلی جوابی برای آن‌ها بدست می‌آوریم. در فصل چهارم نحوه بازیابی تصویر با استفاده از روش‌های منظم سازی و روش‌های تصویری کلی آورده شده و در فصل پنجم با ذکر مثال‌هایی از معادلات اشتاین و سیلوستر تعمیم یافته با ماتریس‌های تنک، به مقایسه روش‌های بیان شده در فصول دوم و سوم، می‌پردازیم.
ضمن تشکر از شما خواننده محترم، خواهشمندم در صورت داشتن هرگونه نظر در رابطه با این پایان‌نامه، آن را با استفاده از ایمیل‌های داده شده ارسال نمایید.

masoud5169@yahoo.com

masoud.hasibi.69@gmail.com

[۱] Stein

[۲] Generalized Sylvester

فهرست مطالب

۱ مقدمات و پیش‌نیازها ۱

۱.۱ مقدمه ۲

۲.۱ ضرب کرونکر ۴

۱.۲.۱ مقادیر ویژه ضرب کرونکر و ترکیب ماتریس‌ها ۵

۲.۲.۱ کاربرد ضرب کرونکر برای معادله ماتریسی ۶

۳.۱ روش گرام اشمیت ۸

۱.۳.۱ تجزیه QR ۸

۴.۱ روش‌های تصویری ۱۰

۱.۴.۱ روش‌های تصویری کلی ۱۰

۲.۴.۱ نمایش ماتریسی ۱۱

۳.۴.۱ زیر فضای کرایلف و الگوریتم آرنولدی ۱۳

۴.۴.۱ روش متعامد سازی کامل ۱۴

۵.۴.۱ روش مانده مینیمم تعمیم یافته ۱۶

۶.۴.۱ روش گرادیان مزدوج ۱۹

۲ حل معادلات اشتاین ۲۲

۱.۲ مقدمه ۲۳

۲.۲ روش هسنبرگ-شور ۲۴

۳.۲ روش زیر فضای کرایلف برای حل معادله اشتاین ۲۷

۱.۳.۲ انتخاب بردارهای $f \in \mathbb{R}^n, g \in \mathbb{R}^m$ ۳۳

۲.۳.۲ بررسی همگرایی ۳۴

۴.۲ روش زیر فضای کرایلف بلوکی برای حل معادله اشتاین ۳۸
۱.۴.۲ حل معادله اشتاین زمانی که C از رتبه کامل است ۳۹

۳ حل معادلات سیلوستر تعمیم یافته ۴۳
۱.۳ مقدمه ۴۴
۲.۳ روش مانده مینیمم کلی برای حل معادلات سیلوستر تعمیم یافته ۴۴
۳.۳ روش گرادیان مزدوج کلی برای حل معادله سیلوستر تعمیم یافته ۴۸

۴ بازیابی تصویر ۵۲
۱.۴ مقدمه ۵۳
۲.۴ منظم سازی تیخونوف ۵۴
۳.۴ روش‌های انتخاب پارامتر منظم سازی تیخونوف ۵۵
۴.۴ منظم سازی مسائل بدوضع بزرگ ۵۶
۵.۴ منظم سازی مسئله تصویر شده ۵۸
۶.۴ مثال‌های عددی ۵۹

۵ نتایج عددی و برنامه ها ۶۳
۱.۵ نتایج عددی ۶۴
۲.۵ نتیجه‌گیری ۷۱
۳.۵ برنامه‌ها ۷۱
۴.۵ برنامه جایگذاری پسرو ۷۱
۵.۵ برنامه صفر سازی هوس هولدر ۷۲
۶.۵ برنامه حل معادلات کمترین مربعات ۷۲
۷.۵ برنامه بردار سازی ۷۳
۸.۵ برنامه آرنولدی ۷۳
۹.۵ برنامه آرنولدی بلوکی ۷۵
۱۰.۵ برنامه مانده مینیمم تعمیم یافته ۷۵
۱۱.۵ برنامه انتخاب زیر فضاها ۷۶
۱۲.۵ برنامه گرادیان مزدوج کلی ۷۷

۱۳.۵ برنامه زیر فضای کرایلف برای حل معادله اشتاین ۷۸
۱۴.۵ برنامه مانده مینیمم کلی ۷۹
۱۵.۵ برنامه بازیابی تصویر ۸۰

کتاب‌نامه ۸۱

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۸۳

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۸۴

لیست تصاویر

۱.۴ تصویر اصلی ۶۱

۲.۴ تصویر مات شده ۶۱

۳.۴ تصویر بازیابی شده ۶۱

۴.۴ تصویر اصلی ۶۲

۵.۴ تصویر مات شده ۶۲

۶.۴ تصویر بازیابی شده ۶۲

۱.۵ نمودار روش مانده مینیمم تعمیم یافته ۶۶

۲.۵ نمودار روش زیر فضای کرایلف ۶۶

۳.۵ نمودار روش مانده مینیمم بلوکی ۶۶

۴.۵ نمودار روش مانده مینیمم تعمیم یافته ۶۷

۵.۵ نمودار روش زیر فضای کرایلف ۶۷

۶.۵ نمودار روش مانده مینیمم بلوکی ۶۷

۷.۵ نمودار روش مانده مینیمم تعمیم یافته ۶۸

۸.۵ نمودار روش زیر فضای کرایلف ۶۸

۹.۵ نمودار روش مانده مینیمم بلوکی ۶۸

۱۰.۵ نمودارهای مربوط به مثال(۴.۱.۵) ۷۱

لیست جداول

۱.۵ نتایج مثال (۱.۱.۵) ۶۵
۲.۵ نتایج مثال (۲.۱.۵) ۶۵
۳.۵ نتایج مثال (۳.۱.۵) ۶۹

فصل ۱

مقدمات و پیش‌نیازها

۱.۱ مقدمه

این فصل شامل تعاریف، قضایا و روش‌هایی می‌باشد که در فصل‌های بعدی از آن‌ها استفاده خواهد شد. مطالب این فصل از [۶، ۱۲، ۱۴] می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{C}$ باشد. منظور از یک ضرب داخلی روی V، نگاشتی مانند $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$ است که دارای خواص زیر باشد:

۱. $(x,x) \geq 0, \qquad (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

۲. $\forall x, y \in V \qquad (x,y) = \overline{(y,x)},$.

۳. $\forall x,y,z \in V, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \qquad (\alpha x + y, z) = \alpha(x,z) + (y,z),$.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ باشد. تابع $\|\cdot\|$ از V به مجموعه اعداد حقیقی نامنفی، یک نرم است، اگر در سه شرط زیر صدق کند:

۱. $\|x\| \geq 0, \forall x \in V \qquad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$.

۲. $\forall x \in V, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|,$.

۳. $\forall x,y \in V \qquad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|,$.

تعریف ۳.۱.۱. ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ معین مثبت است، اگر برای هر $x \neq 0, x \in \mathbb{R}^n$، $(Ax,x) > 0$.

تعریف ۴.۱.۱. اگر $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ یک ماتریس معین مثبت متقارن باشد و $x, y \in \mathbb{R}^n$، آنگاه $A-$ ضرب داخلی دو بردار x, y با نماد $(x,y)_A$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(x,y)_A = (Ax,y) = y^T Ax,$$

و $A-$ نرم x نیز به صورت $\|x\|_A = \sqrt{(x,x)_A}$ می‌باشد.

گزاره ۵.۱.۱. *اگر $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ و بردارهای $x, y \in \mathbb{C}^n$، آنگاه؛ $(Ax,y) = (x, A^H y)$، که A^H ترانهاده مزدوج ماتریس A است.*

تعریف ۶.۱.۱. یک مجموعه از بردارهای $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ متعامد گفته می‌شوند اگر برای هر $i \neq j$، $(a_i, a_j) = 0$.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. تابع $\|\cdot\|$ از $\mathbb{R}^{n\times m}$ به $\mathbb{R}^{+}$ که در سه شرط زیر صدق کند، یک نرم ماتریسی گفته می‌شود:

۱. $\|A\| \geq 0, \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times m}, \quad \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$.

۲. $\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\|, \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times m}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

۳. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. ضرب داخلی فروبنیوس [1] A, B به صورت $\langle A, B\rangle_F = \mathrm{tr}(B^T A)$ تعریف می‌شود، که در آن $\mathrm{tr}(A)$ نشان دهنده $\mathrm{trace}(A)$ بوده و برابر با مجموع عناصر قطری ماتریس مربعی A می‌باشد.

نرم فروبنیوس متناظر با این ضرب داخلی به صورت زیر می‌باشد:

$$\|A\|_F = \sqrt{\langle A, A\rangle_F} = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

تعریف ۹.۱.۱. یک مجموعه از ماتریس‌های $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$، $i = 1, \ldots, n$، F - یکامتعامد هستند، هرگاه:

$$\langle A_i, A_j\rangle_F = \mathrm{tr}(A_j^T A_i) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i = j \\ 0 & \text{اگر } i \neq j \end{cases}$$

تعریف ۱۰.۱.۱. اسکالر λ یک مقدار ویژه ماتریس مربعی A است، اگر یک بردار ناصفر $x \in \mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد به طوری که $Ax = \lambda x$. بردار x، یک بردار ویژه A، متناظر با مقدار ویژه λ است. مجموعه همه مقادیر ویژه A با $\sigma(A)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱۱.۱.۱. ماتریس $(A - \lambda E)$ یک پنسیل[2] نامیده می‌شود و برای راحتی توسط جفت (A, E) نمایش داده می‌شود. جفت (A, E) را منظم گوییم هرگاه A و E مربعی و $det(A - \lambda E) \neq 0$ باشد، در غیر این صورت منفرد نامیده می‌شود.

---

[1] Frobenius

[2] Pencil

۲.۱ ضرب کرونکر

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ و $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. ضرب کرونکر[۱] A و B به صورت $A \otimes B$ نوشته و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mm}B \end{bmatrix} = [a_{ij}B]_{i,j=1}^{m} \in \mathbb{R}^{mn\times mn}.$$

چند خاصیت از ضرب کرونکر در قضیه زیر بیان می‌شود.

قضیه ۲.۲.۱ ([۱۲])**.** *اگر مرتبه ماتریس های $A,\ B,\ C$ به گونه ای باشد که اعمال زیر تعریف شده باشند، آنگاه:*

۱) $I_n \otimes A = \operatorname{diag}(A, A, \dots, A)$.

۲) $A \otimes I_n = \begin{bmatrix} a_{11}I_n & a_{12}I_n & \dots & a_{1n}I_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}I_n & a_{m2}I_n & \dots & a_{mm}I_n \end{bmatrix}$.

۳) $I_m \otimes I_n = I_{mn}$.

۴) $(\mu A) \otimes B = A \otimes (\mu B) = \mu(A \otimes B), \quad \mu \in \mathbb{R}$.

۵) $(A + B) \otimes C = (A \otimes C) + (B \otimes C)$.

۶) $A \otimes (B + C) = (A \otimes B) + (A \otimes C)$.

۷) $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$.

۸) $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$.

قضیه ۳.۲.۱ ([۱۲])**.** *اگر $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ و $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$، آنگاه:*

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD.$$

---

[۱] Kronecker

این قضیه یک نتیجه مهم دارد که در زیر به آن اشاره شده است.

نتیجه ۴.۲.۱. *اگر* $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{m\times m}$ *و* $B=(b_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$*، آنگاه:*

۱. $A\otimes B=(A\otimes I_n)(I_m\otimes B)=(I_m\otimes B)(A\otimes I_n)$.

۲. $(A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1}$*، به شرط آنکه* A^{-1},B^{-1} *موجود باشند.*

تابع مقدار برداری متناظر با یک ماتریس به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید $A=[a_1,a_2,\dots,a_n]\in\mathbb{R}^{m\times n}$ که a_j، برای $j=1,\dots,n$، j امین ستون ماتریس A باشد. تابع مقدار برداری متناظر با ماتریس A با vec(A) نمایش داده می‌شود و به صورت $\mathrm{vec}(A)=[a_1^T,a_2^T,\dots,a_n^T]^T$ تعریف می‌شود.
این تابع خاصیت خطی بودن دارد؛ یعنی:

$$\mathrm{vec}(\alpha A+\beta B)=\alpha\ \mathrm{vec}(A)+\beta\ \mathrm{vec}(B),\quad \forall A,B\in\mathbb{R}^{m\times n},\quad \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

قضیه بعد رابطه بین تابع vec و ضرب کرونکر را نشان می‌دهد.

قضیه ۶.۲.۱ ([۱۲]). *اگر* $A\in\mathbb{R}^{m\times m}$*،* $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ *و* $X\in\mathbb{R}^{m\times n}$*، آنگاه:*

$$\mathrm{vec}(AXB)=(B^T\otimes A)\mathrm{vec}(X).$$

نتیجه ۷.۲.۱. *با نمادگذاری‌های قضیه قبل نتیجه می‌شود:*

۱) $\mathrm{vec}(AX)=(I_n\otimes A)\mathrm{vec}(X).$

۲) $\mathrm{vec}(XB)=(B^T\otimes I_m)\mathrm{vec}(X).$

۳) $\mathrm{vec}(AX+XB)=\big((I_n\otimes A)+(B^T\otimes I_m)\big)\,\mathrm{vec}(X).$

در این بخش ارتباط بین مقادیر ویژه $A\otimes B$ و ماتریس‌های A,B بیان می‌گردد.

۱.۲.۱ مقادیر ویژه ضرب کرونکر و ترکیب ماتریس‌ها

فرض کنید که p یک چند جمله‌ای بر حسب دو متغیر x,y و با ضرایب حقیقی باشد، یعنی:

$$p(x,y)=\sum_{i,j=0}^{l}c_{ij}x^iy^j,$$

اگر $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ و $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$، آن‌گاه، $p(A;B)$، به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$p(A;B) = \sum_{i,j=0}^{l} c_{ij} A^i \otimes B^j. \tag{1.1}$$

مثال ۸.۲.۱. اگر $p(x,y) = 2x + xy^3$ و $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ و$B \in \mathbb{R}^{n\times n}$، $p(A;B)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

چون $p(x,y) = 2x^1y^0 + x^1y^3$ در نتیجه طبق (۱.۱)،

$$p(A;B) = 2A \otimes I_n + A \otimes B^3.$$

قضیه بعد رابطه بین مقادیر ویژه A, B و $p(A;B)$ را نشان می‌دهد.

قضیه ۹.۲.۱ (استفانوست[1])**.** *اگر $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ مقادیر ویژه $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ و $\mu_1, \ldots, \mu_n$ مقادیر ویژه$B \in \mathbb{R}^{n\times n}$، آنگاه مقادیر ویژه $P(A;B)$ برابر با $P(\lambda_r, \mu_s)$، به طوری که* $r = 1, \ldots, m, s = 1, \ldots, n$.

نتیجه ۱۰.۲.۱. *مقادیر ویژه $A \otimes B$، mn عدد $\lambda_r\mu_s$، $r = 1, \ldots, m,\ s = 1, \ldots, n$، هستند.*

نتیجه ۱۱.۲.۱. *مقادیر ویژه $(I_n \otimes A) + (B \otimes I_m)$، یا به طور معادل مقادیر ویژه $(I_n \otimes A^T) + (B^T \otimes I_m)$، mn عدد $\lambda_r + \mu_s$، $r = 1, \ldots, m,\ s = 1, \ldots, n$ هستند.*

ماتریس $(I_n \otimes A) + (B \otimes I_m)$، جمع کرونکر A, B نامیده می‌شود.

۲.۲.۱ کاربرد ضرب کرونکر برای معادله ماتریسی

معادله ماتریسی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$A_1XB_1 + A_2XB_2 + \cdots + A_pXB_p = C, \tag{2.1}$$

که

$$A_j \in \mathbb{R}^{m\times m}, B_j \in \mathbb{R}^{n\times n}, X, C \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad j = 1, \ldots, p.$$

[1] Estephonost

این معادله ماتریسی با استفاده از قضیه ۶.۲.۱ به صورت یک دستگاه از معادلات خطی تبدیل می‌شود:
از طرفین معادله $\mathrm{vec}\,(.)$ بگیرید، به دست می‌آید:

$$\mathrm{vec}(A_1XB_1 + A_2XB_2 + \cdots + A_pXB_p) = \mathrm{vec}(C),$$

طبق قضیه ۶.۲.۱ و خطی بودن $\mathrm{vec}(.)$ نتیجه می‌شود:

$$\sum_{j=1}^{p} \left(B_j^T \otimes A_j\right) \mathrm{vec}\,(X) = \mathrm{vec}\,(C)\,,$$

تعریف کنید:

$$G := \sum_{j=1}^{p} \left(B_j^T \otimes A_j\right), \quad c := \mathrm{vec}\,(C)\,, \quad x := \mathrm{vec}\,(X)\,,$$

در نتیجه $Gx = c$.

قضیه ۱۲.۲.۱ ([۱۲]). *ماتریس $X \in \mathbb{R}^{m\times m}$ یک جواب معادله (۲.۱) است اگر و تنها اگر $x = \mathrm{vec}(X)$، یک جواب از معادله $Gx = c$ باشد، که c, G در بالا تعریف شده است.*

به منظور نشان دادن معیاری برای وجود و یکتایی جواب معادله ماتریسی (۲.۱)، نتایج زیر بیان می‌شوند.

نتیجه ۱۳.۲.۱. *معادله (۲.۱)، یک جواب X دارد اگر و تنها اگر*

$$\mathrm{rank}\,[G|c] = \mathrm{rank}\ (G).$$

نتیجه ۱۴.۲.۱. *معادله (۲.۱)، یک جواب یکتا دارد اگر و تنها اگر ماتریس G نامنفرد باشد.*

حال مهمترین شکل از معادله (۲.۱)، مشهور به معادله سیلوستر[1]، را که به شکل:

$$XA + BX = C, \tag{۳.۱}$$

است در نظر بگیرید، قضیه بعد شرط داشتن جواب یکتا را بیان می‌کند.

قضیه ۱۵.۲.۱ ([۱۲]). *معادله (۳.۱)، یک جواب یکتا دارد اگر و تنها اگر ماتریس‌های $A, -B$ مقدار ویژه مشترکی نداشته باشند.*

[1] Sylvester equation